Мiнiстерство освiти i науки України Київський нацiональний унiверситет iменi Тараса Шевченка На правах рукопису Гайдук Вiкторiя Андрiївна УДК 512.64 РЕБЕРНО-ЛОКАЛЬНI ДЕФОРМАЦIЇ ДОДАТНИХ КВАДРАТИЧНИХ ФОРМ ТIТСА 01.01.06 – алгебра i теорiя чисел Дисертацiя на здобуття наукового ступеня кандидата фiзико-математичних наук Науковий керiвник Бондаренко Вiталiй Михайлович, доктор фiзико-математичних наук, професор Київ – 2016 Змiст ВСТУП 4 1 ПОПЕРЕДНI ВIДОМОСТI 8 1.1. Квадратичнi форми над полем дiйсних чисел . . . . . . . . . 8 1.2. Квадратична форма Тiтса скiнченного сагайдака . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 10 1.3. Квадратична форма Тiтса скiнченної частково впорядкованої множини . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 12 1.4. Квадратична форма бiграфа . . . . . . . . . . . . . . . . . . 17 1.5. Локальнi деформацiї квадратичних форм . . . . . . . . . . . 19 2 РЕБЕРНО-ЛОКАЛЬНI ДЕФОРМАЦIЇ ДЛЯ ПРОСТИХ КЛАСIВ КВАДРАТИЧНИХ ФОРМ ТIТСА 22 2.1. Випадок несерiйних примiтивних частково впорядкованих множин . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 22 2.1.1. Формулювання основного результату. . . . . . . . . . 22 2.1.2. Доведення теореми 2.1. . . . . . . . . . . . . . . . . . 23 2.1.3. Подальшi твердження. . . . . . . . . . . . . . . . . . . 27 2.2. Випадок найменших несерiйних частково впорядкованих множин . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 28 2.3. Загальнi зауваження. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 31 2.4. Висновки до роздiлу . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 32 3 3 РЕБЕРНО-ЛОКАЛЬНI ДЕФОРМАЦIЇ КВАДРАТИЧНИХ ФОРМ ТIТСА НЕОРIЄНТОВАНИХ ГРАФIВ 33 3.1. Основний результат . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 33 3.2. Доведення теореми 3.1 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 35 3.3. Зауваження про середнiй член . . . . . . . . . . . . . . . . . 51 3.4. P-зваженi графи . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 52 3.4.1. Постановка задачi. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 52 3.4.2. P-зваженi дiаграми Динкiна вiдносно поточково-локальної деформацiї. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 52 3.4.3. P-зваженi дiаграми Динкiна вiдносно реберно-локальної деформацiї. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 59 3.4.4. Порiвняння характеристик P-зважених дiаграм. . . . 62 3.5. Висновки до роздiлу . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 63 4 РЕБЕРНО-ЛОКАЛЬНI ДЕФОРМАЦIЇ КВАДРАТИЧНИХ ФОРМ ТIТСА НЕСЕРIЙНИХ ЧАСТКОВО ВПОРЯДКОВАНИХ МНОЖИН (ЗАГАЛЬНИЙ ВИПАДОК) 64 4.1. Опис цiлочислових P-визначальних полiномiв для несерiйних частково впорядкованих множин з вузловими елементами . . 65 4.2. Загальнi теореми . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 161 4.2.1. Зведення до випадку з вузловими елементами. . . . . 161 4.2.2. Теореми про цiлочисловi P-визначальнi полiноми. . . 163 4.2.3. Теореми про P-граничнi числа. . . . . . . . . . . . . . 164 4.2.4. Пiдсумкова таблиця. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 165 4.2.5. Мiнiмальнi реалiзацiї всiх P-визначальних полiномiв. 166 4.3. Висновки до роздiлу . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 166 ВИСНОВКИ 167 ДОДАТОК 180 4 ВСТУП Актуальнiсть теми. Дисертацiйну роботу присвячено вивченню локальних деформацiй додатних цiлочислових квадратичних форм. Квадратичнi форми постiйно виникають при розв’язаннi рiзних задач в багатьох галузях математики (див., напр., [1]–[38]). Серед них особливу роль вiдiграють цiлочисловi квадратичнi форми. Це, зокрема, пов’язано з введенням в сучаснiй теорiї зображень та класифiкацiйних задач лiнiйної алгебри так званих квадратичних форм Тiтса. У 1972 р. П. Габрiель [39] ввiв поняття зображення скiнченного сагайдака (орiєнтованого графа) i показав, що сагайдак має скiнченне число класiв еквiвалентностi нерозкладних зображень тодi i лише тодi, коли є додатною деяка (введена ним) цiлочислова квадратична форма. Вiн назвав цю форму квадратичною формою Тiтса вiдповiдного сагайдака. Ця iдея П. Габрiеля природним чином узагальнюється на зображення (без алгебраїчних спiввiдношень) iнших об’єктiв i, зокрема, зображення частково впорядкованих множин (введених Л. О. Назаровою i А. В. Ройтером у [40]). Ю. А. Дрозд [41] довiв, що частково впорядкована множина має скiнченне число класiв еквiвалентностi нерозкладних зображень тодi i лише тодi, коли вiдповiдна квадратична форма є слабо додатною (додатною на множинi векторiв iз невiд’ємними координатами). Найзагальнiший випадок, що стосується зображень без алгебраїчних спiввiдношень, розглянуто М. М. Клейнером i А. В. Ройтером [42] (для введених ними трикутних диференцiальних градуйованих категорiй). Пiзнiше були введенi i почали вивчатиcя квадратичнi форми Тiтса для зображень об’єктiв iз алгебраїчними спiввiдношеннями (першою в цьому напрямку була робота Ш. Бреннер для сагайдакiв зi спiввiдношен- 5 нями [43]). Окрiм згаданих авторiв, квадратичнi форми Тiтса та їх природнi цiлочисловi узагальнення вивчали М. Барот, В. М. Бондаренко, Н. С. Головащук, П. Дрекслер, М. В. Зельдiч, С. А. Овсiєнко, Х. А. де ла Пенья, Ю. М. Перегуда, К. Рiнгель, Д. Сiмсон, М. В. Стьопочкiна, Х. И. фон Хёне та iншi (див., зокрема, [44] – [60]). Багато авторiв дослiджували також зв’язки кадратичних форм Тiтса з вiдповiдними їм задачами теорiї зображень. З iншого боку, багато проблем сучасної математики пов’язанi з рiзними деформацiями математичних об’єктiв, коли тi чи iншi числовi iнварiнти замiнюються параметрами, що поглиблює вивчення початкових проблем. Зокрема, глибоко дослiджувалися деформацiї асоцiативних алгебр, алгебр Лi та алгебр Хопфа ([61] – [66]), деформацiй диференцiальних рiвнянь ([67] – [70]) та функцiоналiв [71], деформацiї структур на многовидах ([72] – [74]), тощо. Локальнi деформацiї квадратичних форм вiдносно коефiцiєнтiв при квадратах змiнних (якi в [76] названi точково-локальними) вивчалися в роботах [77] – [79]. У дисертацiї продовжується вивчення локальних деформацiй квадратичних форм. Основнi результати стосуються додатних квадратичних форм Тiтса для скiнченних графiв та частково впорядкованих множин. Зв’язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Тематика дисертацiйної роботи пов’язана з науковими дослiдженнями на механiко-математичному факультетi Київського нацiонального унiверситету iменi Тараса Шевченка — тема 11БФ038-03 “Застосування алгеброгеометричних методiв в теорiях груп, напiвгруп, кiлець, зображень до задач прикладної алгебри та захисту iнформацiї” (номер державної реєстрацiї 0111U005264). Мета i задачi дослiдження. Метою дослiдження є опис P-визначальних полiномiв для додатних квадратичних форм Тiтса сагайдакiв i 6 частково впорядкованих множин та отримання рiзних наслiдкiв iз такого опису. Об’єктом дослiдження є реберно-локальнi деформацiї та P-визначальнi полiноми квадратичних форм над полем дiйсних чисел. Предметом дослiдження є вивчення поведiнки квадратичних форм при реберно-локальнiй деформацiї їх коефiцiєнтiв. Методи дослiдження. Основними методами дослiджень є матричний метод та класичнi i сучаснi комбiнаторнi методи. Наукова новизна одержаних результатiв. У дисертацiї отримано новi теоретичнi результати, основними iз яких є такi: • Обчислено P-визначальнi полiноми та P-граничнi числа ребернолокальних деформацiй квадратичних форм Тiтса для несерiйних дiаграм Динкiна. • Обчислено основнi геометричнi характеристики несерiйних дiаграм Динкiна, оснащених ваговою функцiєю, яка задана P-граничними числами поточково-локальних деформацiй чи максимальними P-граничними числами реберно-локальних деформацiй. • Доведено, що зважена несерiйна схема Динкiна має єдиний центр вiдносно як поточково-локальних, так i реберно-локальних деформацiй. • Показано, що будь-який P-визначальний полiном несерiйної частково впорядкованої множини реалiзується на частково впорядкованiй множинi ширини 2 з вузловим елементом, а для таких множин вказано явний вигляд P-визначальних полiномiв для всiх пар порiвняльних елементiв. • Виписано всi полiноми, якi можуть бути цiлочисловими P-визначальними полiномами для несерiйних частково впорядкованих множин; • Вказано мiнiмальну систему несерiйних частково впорядкованих множин, на яких реалiзуються всi P-визначальнi полiноми. Практичне значення одержаних результатiв. Результати дисертацiйної роботи мають теоретичний характер i можуть бути використанi 7 в загальнiй теорiї квадратичних форм i в подальших дослiдженнях деформацiй квадратичних форм для рiзних класiв алгебраїчних об’єктiв. Особистий внесок здобувача. Усi результати дисертацiйної роботи отримано здобувачем самостiйно. У спiльних з науковим керiвником роботах останньому належать, як правило, постановки задач та загальнi iдеї щодо методiв їх розв’язання, а практична реалiзацiя та низка конкретних iдей належать здобувачевi. У статтi [85] (з трьома спiвавторами) здобувачу належать всi результати про несерiйнi дiаграми Динкiна. Апробацiя результатiв дисертацiї. Результати дисертацiйної роботи оприлюднено на: — X Мiжнароднiй алгебраїчнiй конференцiї в Українi, присвяченiй 70- рiччю Ю. А. Дрозда (м. Одеса, 20-27 серпня 2015 р.). — Мiжнароднiй конференцiї молодих математикiв (м. Київ, 3-6 червня 2015 р.); — Сiмнадцятiй Мiжнароднiй науковiй конференцiї iменi академiка Михайла Кравчука (м. Київ, 19-20 травня 2016 р.); — XI лiтнiй школi — алгебра, топологiя, аналiз (Одеса, 1-14 серпня 2016 р.) Публiкацiї. Основнi результати дисертацiї опублiковано в шести наукових роботах [81]–[86], всi з яких опублiкованi у фахових виданнях, одна з них [85] — у виданнi, що вiдображається в наукометричнiй базi Scopus. Чотири роботи опублiковано у тезах конференцiй [87]–[90]. Структура та обсяг дисертацiї. Дисертацiйна робота складається зi вступу, чотирьох роздiлiв, висновкiв, списку використаних джерел та додатку. Загальний обсяг роботи (без додатку) — 179 сторiнок, iз них список використаних джерел займає 12 сторiнок (90 найменування); додаток займає 17 сторiнок. Автор висловлює щиру подяку своєму науковому керiвнику професору В. М. Бондаренку за постiйну увагу, цiкавi iдеї та кориснi поради