

На правах рукописи



Ле Ань Суан

**Аналитические и геометрические свойства
различных классов гармонических
отображений круга**

01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Казань – 2019

Работа выполнена на кафедре математического анализа
Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского
ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет».

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор кафедры математического анализа
за ФГАОУ ВО К(П)ФУ
Каюмов Ильгиз Рифатович.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор кафедры высшей математики ФГ-
БОУ ВО «Казанский государственный энер-
гетический университет»
Гарифьянов Фархат Нургаязович,
кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры математического анализа
ФГБОУ ВО «Тверской государственный уни-
верситет»
Граф Сергей Юрьевич.

Ведущая организация: Институт математики с вычислитель-
ным центром УФИЦ РАН.

Защита состоится «19» декабря 2019 года в 15 ч 30 мин на заседании диссер-
тационного совета КФУ.01.05. при ФГАОУ ВО К(П)ФУ по адресу: 420008,
г. Казань, ул. Кремлевская, д. 35, ауд. 610.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. Н.И. Лоба-
чевского ФГАОУ ВО К(П)ФУ по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлев-
ская, д. 35. Электронная версия диссертации размещена на сайте К(П)ФУ
(<http://kpfu.ru>).

Автореферат разослан «_____» _____ 2019 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,

кандидат физ.-мат. наук, доцент



Насибуллин Р.Г.

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. Объектом исследования в настоящей диссертационной работе являются гармонические однолистные отображения в плоскости комплексного переменного.

Теория однолистных функций является одной из самых красивых областей в геометрической теории функций. Ее историю можно проследить с 1851 года, когда Б. Риман сформулировал и обосновал известную теорему об отображении в своей докторской диссертации.

Теорема Римана. *Предположим, что D – односвязная область, имеющая более одной граничной точки и $z_0 \in D$. Тогда существует единственное конформное отображение f области D на круг $\mathbb{D}$, удовлетворяющее условиям $f(z_0) = 0, f'(z_0) > 0$.*

Пусть $\mathcal{S}$ – класс функций $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots$, голоморфных и однолистных в круге $\mathbb{D}$. Важным примером функции в этом классе является функция Кёбе

$$k(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = z + \sum_{n=2}^{\infty} n z^n,$$

потому что она играет роль экстремали во многих задачах. Тесно связан с классом $\mathcal{S}$ класс Σ , состоящий из функций

$$F(\zeta) = \zeta + \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \zeta^{-n},$$

мероморфных и однолистных в области $\mathbb{D}^- = \{\zeta \in \overline{\mathbb{C}} : |\zeta| > 1\}$.

В 1909 году П. Кёбе показал, что класс $\mathcal{S}$ компактен относительно топологии локально равномерной сходимости. Так как коэффициент $a_n = a_n(f)$, $f \in \mathcal{S}$, является непрерывным функционалом на классе $\mathcal{S}$, то существует максимум $A_n := \max_{f \in \mathcal{S}} |a_n(f)|$, $n = 2, 3, \dots$

В 1914 году Т.Х. Гронуолл доказал теорему площадей, которая утверждает, что если функция $F \in \Sigma$, то $\sum_{n=1}^{\infty} n |\alpha_n|^2 \leq 1$, получив первый результат по проблеме коэффициентов. Это фундаментальный факт для теории

однолистных функций. Не зная работы Т.Х. Гронуолла, Л. Бибербах¹ доказал то же самое соотношение и вывел результат о коэффициентах в классе $\mathcal{S}$ в 1916 году. Он установил, что точная оценка модуля второго коэффициента a_2 функции в классе $\mathcal{S}$ не превосходит 2. Этот результат выводится из соотношения $|\alpha_1| \leq 1$ в классе Σ , которое является следствием теоремы площадей. Поскольку функция Кёбе играет роль экстремали во многих задачах для класса $\mathcal{S}$, как мы упоминали выше, естественно предположить, что она максимизирует $|a_n|$ для всех n . Это знаменитая гипотеза Бибербаха, предложенная в 1916 году.

Гипотеза Бибербаха. *Среди всех функций*

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n, \quad z \in \mathbb{D}$$

в классе $\mathcal{S}$ функция Кёбе имеет наибольшие по модулю коэффициенты, то есть $|a_n| \leq n$, $n \geq 2$, для любой $f \in \mathcal{S}$.

В течение многих лет эта проблема оставалась открытой и вдохновляла на разработку оригинальных методов теории однолистных функций. Можно отметить два подхода к гипотезе Бибербаха. Первый заключается в том, чтобы исследовать коэффициенты для некоторого значения n . Например, в 1923 году К. Левнер² доказал, что $|a_3| \leq 3$, в 1955 году П.Р. Гарабедян и М. Шиффер³ установили, что $|a_4| \leq 4$, в 1968 году Р.Н. Педерсон⁴ и М. Озава⁵ обосновали неравенство $|a_6| \leq 6$, и в 1972 году Педерсон и Шиффер⁶ доказа-

¹ Bierberbach L. *Über die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln* // Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Phys-Math. Kl. (1916) 940-955.

² Löwner K. *Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises. I.* // Math. Ann. 176 (1923) 61-94.

³ Garabedian P., Schiffer M. *A proof of the Bieberbach conjecture for the fourth coefficient* // J. Rational Mech. Anal. 4 (1955) 427-465.

⁴ Pederson R. *A proof of the Bieberbach conjecture for the sixth coefficient* // Arch. Rational Mech. Anal. 31 (1968) 331-351.

⁵ Ozawa M. *On the Bieberbach conjecture for the sixth coefficient* // Kodai Math. Sem. Rep. 21 (1969) 97-128.

⁶ Pederson R., Schiffer M. *A proof of the Bieberbach conjecture for the fifth coefficient* // Arch. Rational Mech. Anal. 45 (1972) 161-193.

ли, что $|a_5| \leq 5$. Второй заключается в том, чтобы проанализировать некоторые специальные подклассы класса $\mathcal{S}$, которые включают звездообразные, выпуклые, почти выпуклые функции и т. д. Многие частичные результаты были получены за прошедшие годы, включая результаты для специальных подклассов $\mathcal{S}$ и для конкретных коэффициентов, а также асимптотические оценки и оценки для n в общем случае. Например, в 1925 году Дж.И. Литтлвуд⁷ доказал $|a_n| < e \cdot n$, в 1965 году И.М. Милин⁸ доказал $|a_n| < 1,243 \cdot n$, и в 1972 году К.Х. Фитцджеральд⁹ доказал $|a_n| < \sqrt{7/6} \cdot n = 1,0801\ldots \cdot n$.

В 1985 году гипотеза Бибераха была доказана Л. де Бранжем¹⁰. Он использовал неравенство Лебедева-Милина^{11,12,13}, чтобы доказать гипотезу Милина¹⁴, доказав тем самым гипотезу Робертсона¹⁵ и установив правильность гипотезы Бибераха.

Напомним, что комплексное отображение $f(z)$, $z = x + iy$, которое имеет непрерывные частные производные второго порядка и в области D удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta f = 0$, называется гармоническим в области D . Рассмотрим линейное пространство комплекснозначных гармонических отображений $f = h + \bar{g}$, где $g(0) = 0$ и $h, g \in \mathcal{A}$ – линейное пространство аналитических функций, определенных в круге $\mathbb{D}$, наделенное топологией локально равномерной сходимости. Функции h, g называются, соответственно, аналитической и ко-аналитической частями f . Через $\mathcal{S}_H$ обозначим класс сохраняющих ориентацию гармонических и однолистных отображений $f = h + \bar{g}$ в

⁷ Littlewood J.E. *On inequalities in the theory of functions* // Proc. London Math. Soc. 23(2) (1925) 481-519.

⁸ Милин И.М. *Оценка коэффициентов однолистных функций* // ДАН СССР. 160(4) (1965) 769–771.

⁹ FitzGerald C.H. *Quadratic inequalities and coefficient estimates for schlicht functions* // Arch. Rational Mech. Anal. 46 (1972) 356-368.

¹⁰ de Branges L. *A proof of the Bieberbach conjecture* // Acta Math. 154 (1985) 137-152.

¹¹ Лебедев Н.А., Милин И.М. *Об одном неравенстве* // Вестник. Ленингр. ун-та. 19(20) (1965) 157–158.

¹² Лебедев Н.А. *Принцип площадей в теории однолистных функций*. Москва: Наука (1975).

¹³ Милин И.М. *О коэффициентах однолистных функций* // ДАН СССР. 176(5) (1967) 1015–1018.

¹⁴ Милин И.М. *Однолистные функции и ортонормированные системы*. Москва: Наука (1971).

¹⁵ Robertson M.S. *A remark on the odd schlicht functions* // Bull. Amer. Math. Soc. 42 (1936) 366-370.

$\mathbb{D}$, у которых $g(0) = h(0) = h'(0) - 1 = 0$. Нам также понадобится класс $\mathcal{S}_H^0 = \{f \in \mathcal{S}_H : g'(0) = 0\}$.

Развитие теории гармонических отображений на плоскости состояло из двух основных этапов. Известно, что хотя гармонические отображения являются естественными обобщениями конформных отображений, они первоначально изучались дифференциальными геометрами из-за их естественной роли в параметризации минимальных поверхностей. В любом представлении минимальной поверхности изотермическими параметрами каждая из трех координатных функций является гармонической. Таким образом, проекция непараметрической минимальной поверхности на ее базовую плоскость индуцирует гармоническое отображение. Свойства минимальных поверхностей, такие как кривизна Гаусса, могут быть эффективно изучены с помощью этих гармонических отображений. Т. Радó¹⁶, Л. Берс¹⁷, Э. Хайнц^{18,19}, Й. Нитше^{20,21,22,23} и другие внесли свой вклад (до 1960 года), чтобы осветить взаимодействие между гармоническими отображениями и минимальными поверхностями.

Только в середине 1980-х годов гармонические отображения стали привлекать широкий интерес у специалистов по комплексному анализу. Катализатором была знаковая статья Дж. Клуни и Т. Шейл-Смолла²⁴, указывающая на то, что многие из классических результатов для конформных отобра-

¹⁶ Radó T. *Über den analytischen Charakter der Minimalflächen* // Math. Z. 24 (1926) 321-327.

¹⁷ Bers L. *Isolated singularities of minimal surfaces* // Ann. of Math. 53 (1951) 364-386.

¹⁸ Heinz E. *Über die Lösungen der Minimalflächengleichung* // Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl. (1952) 51-56.

¹⁹ Heinz E. *On one-to-one harmonic mappings* // Pacific J. Math. 9 (1959) 101-105.

²⁰ Nitsche J.C.C. *Über eine mit der Minimalflächengleichung zusammenhängende analytische Funktion und den Bernsteinschen Satz* // Archiv der Math. (Basel). 7 (1956) 417-419.

²¹ Nitsche J.C.C. *On harmonic mappings* // Proc. Amer. Math. Soc. 9 (1958) 268-271.

²² Nitsche J.C.C. *On the constant of E. Heinz* // Rend. Circ. Mat. Palermo. 8 (1959) 178-181.

²³ Nitsche J.C.C. *Zum Heinschen Lemma über harmonische Abbildungen* // Archiv der Math. (Basel). 14 (1963) 407-410.

²⁴ Clunie J.G., Sheil-Small T. *Harmonic univalent functions* // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A.I. 9 (1984) 3-25.

жений имеют явные аналоги для гармонических отображений. Авторы этой статьи нашли аналоги классических теорем вращения и искажения, теоремы покрытия и оценки коэффициентов для однолистных гармонических отображений. Они также построили аналог гармонической функции Кёбе, который, похоже, призван сыграть роль функции Кёбе в классе $\mathcal{S}$. Это ожидание порождает изящные и весьма правдоподобные гипотезы, некоторые из которых были проверены для гармонических отображений со специальными геометрическими свойствами. Статья Дж. Клуни и Т. Шейл-Смолла положила начало систематическому изучению однолистных гармонических отображений с точки зрения комплексного анализа. С тех пор эта область быстро развивается, хотя ряд основных проблем остается нерешенным, привлекая внимание большого числа математиков по всему миру таких, как П. Дюрен, Х. Поммеренке, О.П. Ахуджа, С. Поннусами, Х. Сильверман, М. Дорф, С. Рушевей, а также российских математиков: С.Ю. Граф, Д.В. Прохоров, В.В. Старков, В.Г. Шеретов и др.

Упомянутая статья Клуни и Шейл-Смолла состоит из шести разделов, в которых сформулирован ряд открытых проблем (включая вопрос об оценке коэффициентов гармонической однолистной функции, аналогичной гипотезе Бибербаха для аналитической однолистной функции). После доказательства гипотезы Бибербаха для класса $\mathcal{S}$ естественно было выяснить, можно ли каким-либо образом распространить классический набор результатов для класса $\mathcal{S}$ и его различных подклассов на классы гармонических однолистных функций $\mathcal{S}_H$ и $\mathcal{S}_H^0$. Дж. Клуни и Т. Шейл-Смолл дали утвердительный ответ. Они обнаружили, что хотя оценки для этих классов не совпадают, все же существуют аналогичные оценки для гармонических отображений в классах $\mathcal{S}_H$ и $\mathcal{S}_H^0$. Они установили результат для класса $\mathcal{S}_H^0$, в котором используется аналог функции Кёбе k в классе $\mathcal{S}$. Фактически они построили гармоническую

функцию Кёбе $K = H + \overline{G}$ в классе $\mathcal{S}_H^0$, определенную согласно формулам

$$H(z) = \frac{1 - z^2/2 + z^3/6}{(1 - z)^3} \quad \text{и} \quad G(z) = \frac{z^2/2 + z^3/6}{(1 - z)^3}.$$

Можно показать, что K однолистно отображает круг $\mathbb{D}$ на плоскость $\mathbb{C}$ с исключенным лучом вдоль отрицательной вещественной оси от точки $(-1/6)$ до $(-\infty)$. Они также выдвинули следующий гармонический аналог гипотезы Бибербаха для класса $\mathcal{S}_H^0$.

Гипотеза Клуни и Шейл-Смолла. Для функции $f = h + \bar{g} \in \mathcal{S}_H^0$ с представлением в виде

$$h(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \quad \text{и} \quad g(z) = \sum_{n=2}^{\infty} b_n z^n, \quad z \in \mathbb{D},$$

для всех $n \geq 2$ выполняются неравенства:

$$|a_n| \leq \frac{(n+1)(2n+1)}{6}, \quad |b_n| \leq \frac{(n-1)(2n-1)}{6}, \quad \text{и} \quad ||a_n| - |b_n|| \leq n.$$

Более того, равенства достигаются для гармонической функции Кёбе $K(z)$.

Эта гипотеза была проверена для стандартных геометрических подклассов $\mathcal{S}_H^0$, а именно, для класса всех звездообразных функций (а также для функций почти выпуклых, типично вещественных или выпуклых в одном направлении)^{25,26}. В отличие от класса $\mathcal{S}$, проблема коэффициентов для $\mathcal{S}_H^0$ является чрезвычайно сложной и остается открытой даже для второго коэффициента a_2 функции h . В качестве попытки решить вышеуказанную гипотезу, следующая более сильная гипотеза была предложена в работе С. Поннусами и Калиража²⁷.

Гипотеза 1. $\mathcal{S}_H^0 = \mathcal{S}_H^0(\mathcal{S})$, где $\mathcal{S}_H^0(\mathcal{S}) = \{h + \bar{g} \in \mathcal{S}_H^0 : \Phi = h + e^{i\theta}g \in \mathcal{S} \text{ для некоторого } \theta \in \mathbb{R}\}$. То есть, для каждой функции $f = h + \bar{g} \in \mathcal{S}_H^0$ существует $\theta \in \mathbb{R}$ такое, что $\Phi = h + e^{i\theta}g \in \mathcal{S}$.

²⁵ Sheil-Small T. *Constants for planar harmonic mappings* // J. London Math. Soc. 42 (1990) 237-248.

²⁶ Wang X.T., Liang X.Q., Zhang Y.L. *Precise coefficient estimates for close-to-convex harmonic univalent mappings* // J. Math. Anal. Appl. 263(2) (2001) 501-509.

²⁷ Ponnusamy S., Sairam Kaliraj A. *On the coefficient conjecture of Clunie and Sheil-Small on univalent harmonic mappings* // Proc. Indian Acad. Sci. 125(3) (2015) 277-290.

Гипотеза С. Поннусами и Калиража привлекла внимание различных математиков, о чем свидетельствует тот факт, что в последнее время появилось много работ^{28,29,30}, посвященных вопросам, связанным с этой гипотезой и ее обобщениями. Например, В.В. Старков доказал, что $\mathcal{S}_H^0 = \mathcal{S}_H^0(\mathcal{S})$ тогда и только тогда, когда для любой функции $f \in \mathcal{S}_H^0$ существует $\theta \in (0, \pi/2]$ такое, что $A(z, t) \neq -e^{i\theta} B(z, t)$, $\forall (z, t) \in E$, где

$$A(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\sin nt}{\sin t} z^n, \quad B(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{a_{-n}} \frac{\sin nt}{\sin t} z^n$$

и $E = \{(z, t) \in \mathbb{D} \times (0, \pi/2] : |A(z, t)| = |B(z, t)|\}$. Позже, в работе М. Айдогана и др. было показано, что гипотеза С. Поннусами и Калиража неверна.

В работе С. Поннусами и Калиража также была выдвинута еще одна гипотеза о выпуклых гармонических отображениях, которую мы представим ниже. Для этого обозначим через $\mathcal{C}$ и $\mathcal{C}_H^0$ классы всех гармонических отображений f классов $\mathcal{S}$ и $\mathcal{S}_H^0$ соответственно, таких что область $f(\mathbb{D})$ является выпуклой.

Гипотеза 2. Если $f = h + \bar{g} \in \mathcal{C}_H^0$, то существует вещественное число θ такое, что аналитическая функция $\Phi_\theta(z) = h(z) + e^{i\theta} g(z)$ однолистка и отображает круг $\mathbb{D}$ на выпуклую область. Другими словами $\mathcal{C}_H^0 = \mathcal{C}_H^0(\mathcal{C})$.

Однако, в недавней работе³¹ мы доказали, что гипотеза 2 также неверна.

Хотя гипотезы, предложенные С. Поннусами и Калиражем, оказались неверными, они способствуют дальнейшему исследованию гипотезы Клуни и Шейл-Смолла.

Цели и задачи диссертационной работы.

²⁸ Abu-Muhanna Y., Ali R.M., Ponnusamy S. *The spherical metric and univalent harmonic mappings* // Monatsh. Math. 188(4) (2019) 703-716.

²⁹ Aydoğan M., Bshouty D., et. al. *On the shears of univalent harmonic mappings* // Complex Anal. Oper. Theory. 13(6) (2019) 2853-2862.

³⁰ Starkov V.V. *Univalence of harmonic functions, problem of Ponnusamy and Sairam, and constructions of univalent polynomials* // Issues Anal. 3(21) (2014) 59-73.

³¹ Kayumov I.R., Ponnusamy S., Xuan L.A. *Rotations of convex harmonic univalent mappings* // Bull. Sci. math. 155(6) (2019) 1-9.

- Получение оценки функционала $|\arg h'|$ для функций вида $f = h + \bar{g}$, когда f принадлежит либо классу гармонических однолистных отображений $\mathcal{S}_H^0(\mathcal{S})$ либо классу гармонических выпуклых отображений $\mathcal{C}_H^0(\mathcal{C})$.
- Доказательство гипотезы Клуни и Шейл-Смолла о коэффициентах гармонических отображений при определенных условиях на их аналитическую часть.
- Изучение радиуса выпуклости аналитической части однолистных гармонических отображений.
- Установление условия, при котором аналитическая часть гармонического однолистного отображения принадлежит пространству Харди H_p .
- Исследование вопросов, связанных с гипотезами С. Поннусами о гармоническом однолистном отображении в классах $\mathcal{S}_H^0$ и $\mathcal{C}_H^0$.
- Исследование вопроса о максимальной листности функции $h + e^{i\theta}g$ при условии, что область $(h + \bar{g})(\mathbb{D})$ можно разрезать на n выпуклых подобластей.

Научная новизна. Все основные результаты работы являются новыми и получены автором самостоятельно, в нераздельном сотрудничестве с И.Р. Каюмовым и С. Поннусами. В совместных публикациях И.Р. Каюмову и С. Поннусами принадлежат постановки задач и метод исследования. Роль автора в доказательстве выносимых на защиту результатов является определяющей.

Теоретическая и практическая значимость. Работа имеет теоретический характер. Полученные в данной диссертации результаты могут быть использованы для дальнейшего изучения экстремальных свойств гармонических однолистных отображений и различных классов аналитических одно-

листных функций, а также в образовательном процессе при чтении спецкурсов.

Методы исследования. В диссертации использовались вариационные методы, а также методы геометрической теории функций комплексного переменного.

Положения, выносимые на защиту.

- Точная оценка функционала $|\arg h'(z)|$ в случае, когда $|z| \leq 1/\sqrt{2}$ и $f = h + \bar{g} \in \mathcal{S}_H^0(\mathcal{S})$, и для случая, когда $f = h + \bar{g} \in \mathcal{C}_H^0(\mathcal{C})$.
- Точные оценки коэффициентов гармонических отображений $f = h + \bar{g}$ класса $\mathcal{S}_H^0(\mathcal{S})$ при определенных условиях на их аналитическую часть.
- Точный радиус выпуклости для аналитической части однолистных гармонических отображений $f = h + \bar{g}$ класса $\mathcal{S}_H^0(\mathcal{S})$.
- Достаточное условие на аналитическую часть однолистного гармонического отображения f , гарантирующее принадлежность f пространству H_p при $0 < p < 1/3$.
- Опровержение второй гипотезы С. Поннусами: показано, что существует функция $f = h + \bar{g} \in \mathcal{C}_H^0$ такая, что голоморфная однолистная функция $h(z) + e^{i\theta}g(z)$ не звездообразна в круге $\mathbb{D}$.
- Оценка листности голоморфных отображений круга, составленных из аналитических компонент гармонического отображения.

Степень достоверности и апробация результатов. Основные результаты диссертации докладывались на следующих конференциях:

- 1) Международная конференция «Фундаментальные проблемы алгебры, анализа и геометрии», 26 июня – 02 июля 2016 г., г. Казань.

- 2) XIII Международная летняя школа-конференция «Теория функций, её приложения и смежные вопросы», 21 – 27 августа 2017 г., г. Казань.
- 3) II Международная научно-практическая конференция «Актуальные проблемы физико-математического образования», 20 – 22 октября 2017 г., г. Набережные Челны.
- 4) XVII Всероссийская молодежная школа-конференция «Лобачевские чтения - 2018», 23 - 28 ноября 2018 г., г. Казань.
- 5) XIV Международная летняя школа-конференция «Теория функций, её приложения и смежные вопросы», 07 – 12 сентября 2019 г., г. Казань.

Публикации. Содержание диссертации опубликовано в 8 печатных работах, из них 3 статьи опубликованы в рецензируемых журналах, входящих в список ВАК РФ, или приравненных к ним [1–3], а также в изданиях, индексируемых в базах данных Web of Science и Scopus, 5 работ опубликованы в сборниках трудов конференций как тезисы докладов [4–8].

Личный вклад автора. Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают личный вклад автора в опубликованные работы. В совместных публикациях И.Р. Каюмову и С. Поннусами принадлежат постановки задач и метод исследования. Роль автора в доказательстве выносимых на защиту результатов является определяющей.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Общий объем диссертации 92 стр. имеется 11 рисунков. Библиография включает 79 наименований на 8 стр.

Содержание работы

Во введении кратко изложена история вопроса, обоснована актуальность диссертационной темы, поставлены основные цели и задачи диссертации.

ции, обоснованы научная новизна и практическая значимость работы, сформулированы выносимые на защиту положения, описана структура диссертации.

В первой главе изложены основные понятия, которые будут использованы в тексте диссертации.

Параграф 1.2 диссертации посвящен доказательству теоремы вращения для аналитической части гармонических однолистных функций класса $\mathcal{S}_H^0(\mathcal{S})$.

Теорема 1.2.3. *Если $f = h + \bar{g} \in \mathcal{S}_H^0(\mathcal{S})$, то*

$$|\arg h'(z)| \leq \begin{cases} 5 \arcsin |z| & \text{при } |z| \leq 1/\sqrt{2}, \\ \pi + \log \frac{|z|^2}{1-|z|^2} + \arcsin |z| & \text{при } |z| \geq 1/\sqrt{2}. \end{cases}$$

Оценка является точной для $|z| \leq 1/\sqrt{2}$.

Аналогично в этом параграфе получен следующий результат

Теорема 1.2.5. *Если $f \in \mathcal{C}_H^0(\mathcal{C}) = \{h + \bar{g} \in \mathcal{C}_H^0 : h + e^{i\theta}g \in \mathcal{C} \text{ для некоторого } \theta \in \mathbb{R}\}$, то $|\arg h'(z)| \leq 3 \arcsin |z|$. Оценка является точной и достигается тогда и только тогда, когда $f(z) = e^{-i\alpha}f_0(e^{i\alpha}z)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, где*

$$f_0(z) = \frac{1}{2} \left[\frac{z}{1-z} + \frac{z}{(1-z)^2} \right] + \overline{\frac{1}{2} \left[\frac{z}{1-z} - \frac{z}{(1-z)^2} \right]}.$$

Хорошо известно³², что каждая функция $f \in \mathcal{S}$ отображает круг $|z| < r$ на выпуклую область, если $r \leq 2 - \sqrt{3} = 0.267949\dots$, и константа $2 - \sqrt{3}$ является точной. Это число называется радиусом выпуклости для класса $\mathcal{S}$. В следующей теореме мы определяем радиус выпуклости для аналитической части функции f в классе $\mathcal{S}_H^0(\mathcal{S})$.

Теорема 1.2.7. *Для каждого положительного действительного числа $r \leq (5 - \sqrt{17})/4 = 0.219224\dots$ и каждой $f = h + \bar{g} \in \mathcal{S}_H^0(\mathcal{S})$ функция h отображает круг $|z| < r$ на выпуклую область. Гармоническая функция Кёбе показывает, что оценка является точной.*

³² Duren P. *Univalent functions*. New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo: Springer-Verlag (1983).

Вторая глава диссертации посвящена исследованию гипотезы Клуни и Шейл-Смолла о коэффициентах при определенных условиях на аналитическую часть гармонических отображений. Кроме того, в этой главе мы устанавливаем условие для аналитической части гармонического однолистного отображения f , гарантирующее принадлежность f пространству Харди H_p при $0 < p < 1/3$.

Основными результатами этой главы являются следующие теоремы.

Теорема 2.1.1. *Предположим, что $f = h + \bar{g} \in \mathcal{S}_H^0$ и $h(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ удовлетворяет условию*

$$\left| \frac{\Phi'(z)}{h'(z)} - 1 \right| < 1, \quad \text{т.е.} \quad \frac{h'(z)}{\Phi'(z)} \prec \frac{1}{1-z}, \quad z \in \mathbb{D}, \quad (*)$$

для некоторого $\Phi \in \mathcal{S}$. Тогда для $n \geq 2$ имеет место неравенство

$$|a_n| \leq \frac{(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Равенство достигается тогда и только тогда, когда $h(z) = e^{-i\theta} H(e^{i\theta} z)$ и $\Phi(z) = e^{-i\theta} k(e^{i\theta} z)$, $\theta \in \mathbb{R}$, где H является аналитической частью гармонической функции Кёбе и $k(z) = z/(1-z)^2$.

Теорема 2.1.3. *Предположим, что $f = h + \bar{g} \in \mathcal{S}_H^0$ и $h(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ удовлетворяет условию $(*)$ для некоторой выпуклой однолистной функции Φ . Тогда для $n \geq 2$ имеет место неравенство $|a_n| \leq (n+1)/2$. Равенство достигается тогда и только тогда, когда $h(z) = e^{-i\theta} h_0(e^{i\theta} z)$ и $\Phi(z) = z/(1 - e^{i\theta} z)$, $\theta \in \mathbb{R}$, где $h_0(z) = (z - z^2/2)/(1-z)^2$.*

Через $\mathcal{F}$ обозначим класс локальных однолистных отображений ψ в пространстве $\mathcal{A}$, удовлетворяющих условию

$$\operatorname{Re} \left(1 + \frac{z\psi''(z)}{\psi'(z)} \right) > -\frac{1}{2}, \quad z \in \mathbb{D},$$

с нормировкой $\psi(0) = \psi'(0) - 1 = 0$. Известно, что функции класса $\mathcal{F}$ выпуклы в некотором направлении (и, следовательно, почти выпуклы и однолиственны в круге $\mathbb{D}$). Более того, модули коэффициентов при z^n функции $\psi \in \mathcal{F}$ меньше или равны $(n+1)/2$ и оценка достигается, когда $h_0(z) = (z - z^2/2)/(1-z)^2$

или функция h_0 совпадает с ее вращением^{33,34}.

Теорема 2.1.5. *Предположим, что $f = h + \bar{g} \in \mathcal{S}_H^0$ и $h(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ удовлетворяет условию (*) для некоторой $\Phi \in \mathcal{F}$. Тогда для $n \geq 2$ имеет место неравенство $|a_n| \leq (n+1)(n+2)/6$. Равенство достигается тогда и только тогда, когда $h(z) = e^{-i\theta} h_1(e^{i\theta} z)$ и $\Phi(z) = e^{-i\theta} h_0(e^{i\theta} z)$, $\theta \in \mathbb{R}$, где*

$$h_1(z) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{(1-z)^3} - 1 \right) \text{ и } h_0(z) = \frac{z - \frac{1}{2}z^2}{(1-z)^2}.$$

Пусть H_p (соответственно, h_p) – пространство Харди порядка p ($0 < p < \infty$) аналитических (соответственно, гармонических) функций. Известно, что если функция $f = h + \bar{g} \in \mathcal{S}_H^0$, то $h, g \in H_p$ и $f \in h_p$ для всех $p \in (0, p_0)$, где p_0 зависит от $|a_2|$, второго коэффициента функции h .³⁵

Теорема 2.2.4. *Предположим, что $f = h + \bar{g} \in \mathcal{S}_H^0$ и условие (*) выполнено. Тогда имеют место следующие утверждения:*

- i) $f \in h_p$ для всех $p < 1/3$.
- ii) $\int_{\mathbb{D}} \left(|h'(z)| + |g'(z)| \right)^p dx dy < +\infty$ для всех $p < 1/2$.

В третьей главе в первом параграфе мы опровергаем гипотезу С. Поннусами и Калиража, утверждающую, что для каждой функции $f = h + \bar{g} \in \mathcal{C}_H^0$ существует такое значение $\theta \in \mathbb{R}$, что $h + e^{i\theta} g \in \mathcal{C}$. В следующем параграфе мы исследуем вопрос о максимальной листности функции $h + e^{i\theta} g$ для области, которую можно разрезать на n выпуклых подобластей.

Мы выдвигаем более слабую гипотезу, чем гипотеза С. Поннусами о выпуклых гармонических отображениях, а именно.

³³ Ponnusamy S., Qiao J. *Characterization of univalent harmonic mappings with integer or half-integer coefficients* // Analysis. 37(1) (2017) 23-38.

³⁴ Ponnusamy S., Kumar Sahoo S., Yanagihara H. *Radius of convexity of partial sums of functions in the close-to-convex family* // Nonlinear Analysis. 95 (2014) 219-228.

³⁵ Abu-Muhanna Y., Lyzzaik A. *The boundary behaviour of harmonic univalent maps* // Pacific J. Math. 141(1) (1990) 1-20.

Гипотеза 3.1.2. Если $f = h + \bar{g} \in C_H^0$, то существует вещественное число θ такое, что аналитическая функция $h(z) + e^{i\theta}g(z)$ однолистна и отображает круг $\mathbb{D}$ на звездообразную область.

Основными результатами этой главы являются следующие утверждения.

Теорема 3.1.4. Гипотеза 3.1.2 неверна.

Отсюда мы приходим к выводу, что гипотеза Поннуса неверна.

Теорема 3.1.6. Существует гармонический автоморфизм круга $f = h + \bar{g}$ такой, что функция $h + e^{i\theta}g$ выпукла только в одном направлении, как предсказано теоремой сдвига Клуни и Шейл-Смолла для $\theta \neq 0$. Кроме того, аналитическая функция $h + g$ не звездообразна в нем.

Область Ω называется n -выпуклой областью, если ее можно разрезать на n выпуклых подобластей. Имеет место теорема

Теорема 3.2.8. Пусть $f = h + \bar{g}$ гармоническое и локально однолистное отображение круга $\mathbb{D}$ на область Ω . Если Ω — n -выпуклая область, то функция $h + e^{i\theta}g$ не более, чем n -листка в круге $\mathbb{D}$.

В заключении сформулированы результаты диссертации.

Благодарности. Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю профессору Каюмову Ильгизу Рифатовичу за постановку проблемы, постоянную поддержку и за внимание к работе. Автор также выражает благодарность сотрудникам кафедры математического анализа Института математики и механики Казанского федерального университета за помощь и полезные замечания.

Список публикаций автора по теме диссертации

1. *Суан, Л.А.* Гармонические отображения и конечная листность аналитических функций / Л.А. Суан // *Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки.* — 2018. — Т. 160, № 4. — С. 771–777.
2. *Kayumov, I.R.* On the analytic part of univalent harmonic mappings / I.R. Kayumov, S. Ponnusamy, L.A. Xuan // *Complex Analysis and Operator Theory.* — 2018. — Vol. 12, no. 5. — P. 1291–1301.
3. *Kayumov, I.R.* Rotations of convex harmonic univalent mappings / I.R. Kayumov, S. Ponnusamy, L.A. Xuan // *Bulletin des Sciences Mathématiques.* — 2019. — Vol. 155, no. 6. — P. 1–9.

Материалы конференций

4. *Каюмов, И.Р.* Об одной гипотезе С. Поннусами / И.Р. Каюмов, Л.А. Суан // Международная конференция «Фундаментальные проблемы алгебры, анализа и геометрии». — Казань: Казанский университет, Изд-во Академии наук РТ, 2016. — С. 365.
5. *Каюмов, И.Р.* Теорема вращения для гармонических отображений / И.Р. Каюмов, С. Поннусами, Л.А. Суан // Международная летняя школа-конференция «Теория функций, её приложения и смежные вопросы». — Т. 54. — Казань: Издательство Казанского математического общества, Изд-во Академии наук РТ, 2017. — С. 345–346.
6. *Каюмова, А.В.* Гипотеза Клуни и Шейл-Смолла о коэффициентах при определенных условиях на аналитическую часть / А.В. Каюмова, С. Поннусами, Л.А. Суан // II Международная научно-практическая конференция «Актуальные проблемы физико-математического образования». — Набережные Челны, 2017. — С. 28–29.
7. *Суан, Л.А.* Конечная листность аналитических функций / Л.А. Суан // Международная летняя школа-конференция «Теория функций, её прило-

- жения и смежные вопросы». — Т. 57. — Казань: Издательство Казанского математического общества, Изд-во Академии наук РТ, 2019. — С. 322–324.
8. *Суан, Л.А.* О гармонических отображениях из пространства Харди / Л.А. Суан // XVII Всероссийская молодежная школа-конференция «Лобачевские чтения-2018». — Т. 56. — Казань: Из-во Казан. ун-та, 2018. — С. 277–278.