На правах рукописи

Александрова Светлана Анатольевна

# Σ-ОПРЕДЕЛИМОСТЬ В НАСЛЕДСТВЕННО КОНЕЧНЫХ НАДСТРОЙКАХ НАД РАСШИРЕНИЯМИ ПОЛЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

01.01.06 – математическая логика,
алгебра и теория чисел

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Новосибирск — 2019

Работа выполнена в федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Новосибирский национальный исследовательский государственный университет».

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор, академик РАН
**Гончаров Сергей Савостьянович**.

Официальные оппоненты:
**Селиванов Виктор Львович**,
доктор физико-математических наук, профессор,
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт систем информатики им. А.П. Ершова Сибирского отделения Российской академии наук, главный научный сотрудник.

**Рыбаков Владимир Владимирович**,
доктор физико-математических наук, профессор,
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Сибирский федеральный университет», профессор кафедры алгебры и математической логики.

Ведущая организация:
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Казанский (Приволжский) федеральный университет».

Защита состоится 23 августа 2019 г. в 16.30 на заседании диссертационного совета Д003.015.02 при Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук по адресу: пр. Академика Коптюга 4, г. Новосибирск, 630090.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук, `http://math.nsc.ru`.

Автореферат разослан «___» июля 2019 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,
кандидат физико-математических наук,
доцент А. И. Стукачёв

# Общая характеристика работы

**Постановка задачи и актуальность темы исследования.** В диссертации исследуются некоторые вопросы теории $\Sigma-$определимости в наследственно конечных надстройках над различными структурами. Ранние исследования наследственно конечных надстроек восходят к работам по теории допустимых множеств, начало которым положили С. Крипке и Р. Платек.

Независимо друг от друга С. Крипке [55] и Р. Платек [67] предложили почти идентичные версии теории допустимых множеств, представляющие в некотором смысле ослабление классической теории множеств $ZF$, которую авторы находили слишком мощной для многих задач, связанных с конкретными математическими структурами. Набор аксиом теории допустимых множеств отличается от $ZF$ только тем, что из него исключены аксиомы бесконечности, мощности и выбора, а в аксиомах разделения и объединения используются формулы с ограниченными кванторами.

Дж. Барвайс [51], в свою очередь, увидел возможность обогатить данную теорию, введя особый род элементов - праэлементы, служащие базой для построения множеств. Такое дополнение позволяет рассматривать допустимые множества, в основании которых лежат произвольные математические структуры. Под допустимым множеством в этой теории понимается непустое транзитивное в теоретико-множественном универсуме с праэлементами множество, удовлетворяющее схемам аксиом $\Delta_0-$выделения и $\Sigma-$рефлексии.

С этого времени началось развитие теории допустимых множеств, центральное место в которой заняли множества и отношения, выделяемых в таких структурах формулами особого вида, такими как $\Delta_0-$формулы и $\Sigma-$формулы (впервые введёнными Леви в [60]).

Большую роль получила теория допустимых множеств в развитии обобщённой вычислимости, объединив в исследованиях объекты и методы теории вычислимости и теории моделей. Теория допустимых множеств позволяет задать вычислимость на произвольной структуре, используя $\Sigma-$определимые множества в качестве аналога вычислимо перечислимых. Вычислимость на произвольной структуре $\mathfrak{M}$ при этом понимается как $\Sigma-$определимость в допустимом множестве над $\mathfrak{M}$. Данный поход к пониманию обобщенной вычислимости для произвольной структуры $\mathfrak{M}$ впервые был предложен Ю., Л. Ершовым [8].

При таком подходе одним из наиболее естественных и интересных для рассмотрения с точки зрения обобщённой вычислимости подклассов допустимых множеств являются наследственно конечные надстройки.

Наследственно конечная надстройка над произвольной структурой $\mathfrak{M}$ может быть определена индуктивно:

$$\begin{aligned}
&HF_0(M) = \{\varnothing\};\\
&HF_{n+1}(M) = \mathcal{P}_\omega(HF_n(M) \cup M);\\
&HF(M) = \bigcup_{n<\omega} HF_n(M),
\end{aligned}$$

где $\mathcal{P}_\omega(X)$ означает множество всех конечных подмножеств множества $X$.

Будучи наименьшим по включению допустимым множеством над заданной структурой, наследственно конечная надстройка, с одной стороны, представляет собой объект достаточно простой и удобный для изучения с помощью теории допустимых множеств, а с другой стороны, достаточно богатый для получения результатов, ценных для теории обобщённой вычислимости. Многочисленные работы, посвящённые изучению допустимых множеств и, в частности, наследственно конечных надстроек, могут быть найдены у Ершова, Калимуллина, Роминой, Коровиной, Морозова, Вайценавичюса, Руднева, Стукачёва, Пузаренко, Хисамиева и других авторов (см., например, [1, 8–23, 25–50, 72, 73]).

Наименьшей из наследственно конечных надстроек является наследственно конечная надстройка над пустым множеством $\mathbb{HF}(\varnothing)$. $\Sigma-$определимость в такой модели очень хорошо согласуется с классической вычислимостью на натуральных числах, например, класс $\Sigma-$определимых при таком подходе множеств совпадает с классом рекурсивно перечислимых, класс $\Delta-$определимых – с рекурсивными множествами. Таким образом, естественно возникает вопрос о переносе при помощи такого приёма понятия вычислимости на другие математические объекты, в частности, действительные числа. При определении вычислимости на действительных числах в таком подходе в качестве основной модели может быть выбрана та или иная формализация поля вещественных чисел, например, упорядоченное поле $\langle R, +, \cdot, 0, 1, < \rangle$. Такой подход получил развитие в работах Морозова, Коровиной, например, в [25], где А., С. Морозовым и М., В. Коровиной исследуются свойства $\Sigma-$определимости счётных структур над вещественными и комплексными числами, а также кватернионами, и [18], где изучаются $\Sigma$-представления упорядоченного поля вещественных чисел $\mathbb{R}$ над $\mathbb{HF}(\mathbb{R})$ с основным множеством, содержащимся в $\mathbb{R}$.

Другой известной формализацией обобщенной вычислимости над структурой является предложенный С.С. Гончаровым, Ю.Л. Ершовым и Д.И. Свириденко [6] метод, использующий $\Sigma-$определимость в наследственно конечной списочной надстройке $\mathfrak{M}$.

Списочная надстройка задаётся следующим образом. Если $\mathfrak{M}$ — структура сигнатуры $\sigma$, к ней добавляется списочная надстройка, носитель которой определяется индуктивно:

$S^0(M)$ – конечные линейные списки из элементов $M$,

$S^n(M)$ – конечные линейные списки из элементов $S^{n-1}(M) \cup M$,

$$S(M) = \bigcup_{n \in \omega} S^n(M).$$

Для работы со списками сигнатура модели списочной надстройки дополняется операциями и отношениями $head, tail, cons, nil, \in, \sqsubseteq$. Здесь $nil$ означает $0-$местную функцию, имеющую значение пустого списка, а операции $head, tail, cons$ и отношения $\in, \sqsubseteq$ интерпретируются следующим образом:

$head(\langle \alpha_1, \alpha_2, \ \ldots, \alpha_n \rangle) = \alpha_n; \ head(nil) = nil;$
$tail(\langle \alpha_1, \alpha_2, \ \ldots, \alpha_{n+1} \rangle) = (\langle \alpha_1, \alpha_2, \ \ldots, \alpha_n \rangle); \ tail(\langle \beta \rangle) = tail(nil) = nil;$
$cons(\langle \alpha_1, \alpha_2, \ \ldots, \alpha_n \rangle, \beta) = (\langle \alpha_1, \alpha_2, \ \ldots, \alpha_n, \beta \rangle),$
$\beta \in \langle \alpha_1, \alpha_2, \ \ldots, \alpha_n \rangle \iff \beta = \alpha_i,$ для некоторого $1 \leq i \leq n.$
$\langle \beta_1, \beta_2, \ \ldots, \beta_m \rangle \sqsubseteq \langle \alpha_1, \alpha_2, \ \ldots, \alpha_n \rangle \iff m \leq n$ и $\beta_i = \alpha_i,$ для всех $1 \leq i \leq m.$

Таким образом, структура списочной надстройки имеет вид:

$$\mathbb{HW}(\mathfrak{M}) = \langle M, S(\mathfrak{M}), \sigma \cup \{head, tail, cons, nil, \in, \sqsubseteq\} \rangle.$$

Термы строятся из констант сигнатуры $\sigma$ и переменных при помощи функциональных сигнатурных символов. Формулы строятся стандартным образом с использованием равенства, сигнатурных отношений $\in, \sqsubseteq$, кванторов $\exists, \forall$ и ограниченных кванторов $\exists x \in t, \forall x \in t, \exists x \sqsubseteq t, \forall x \sqsubseteq t$.

Благодаря переосмыслению $\Sigma-$формул как программ, вычислительным устройством для которых служит семантика, такой подход получил название *семантического программирования*, или $\Sigma-$*программирования*. Семантическое программирование основано на теории списочных расширений $GES$. При таком подходе математические структуры понимаются как структуры данных, на которых работают программы, задаваемые $\Sigma-$формулами. Теоретические результаты семантического программирования широко используют методы, разработанные в теории допустимых множеств (см. монографии [8, 51] и недавние статьи [5, 7]).

Одной из наиболее важных проблем классической рекурсивной теории является существование универсальной функции для определённого класса функций, например универсальной частично вычислимой функции. В рамках подхода к вычислимости как $\Sigma-$определимости в допустимом множестве этот вопрос также является фундаментальным. Ю., Л. Ершовым было показано, что в любом допустимом множестве существует универсальный $\Sigma-$предикат (см. [8]), но, к сожалению, мы не можем утверждать того же о $\Sigma-$определимых функциях даже для наследственно конечных надстроек. В. А. Руднев в своей работе [35] построил модель, в наследственно конечной надстройке над которой класс $\Sigma-$определимых функций не обладает функцией универсальной.

В этой связи в допустимых множествах зачастую ключевое значение имеет свойство униформизации, формулируемое следующим образом:

Пусть $P$ — подмножество декартова произведения $X \times Y$. Будем говорить, что $P'$ униформизует $P$, если $P' \subseteq P$ и $P'$ является графиком функции с областью определения $\{x : \exists y P(x, y)\}$.

Класс $G$ обладает свойством униформизации, если любое $P$ из $G$ может быть униформизовано некоторым $P'$ из $G$.

Также говорят, что в алгебраической системе $\mathfrak{M}$ верна теорема об униформизации, если для любого $\Sigma-$определимого в ней двуместного предиката существует одноместная $\Sigma-$определимая частичная функция с областью определения $dom(f) = \{x : \exists y P(x, y)\}$ такая, что её график $\Gamma_f \subseteq P$.

Понятие свойства униформизации для класса $\Sigma-$определимых предикатов также было введено в монографии Ю.Л. Ершова [8], где также показано, что из свойства униформизации следует существование универсальной $\Sigma-$функции для соответствующего класса функций. Известны результаты об униформизации в наследственно конечных надстройках для некоторых классов алгебраических систем. Так, А. И. Стукачёвым в [36, 37, 72] получен критерий выполнения свойства униформизации в наследственно конечных надстройках над алгебраическими системами регулярных теорий. В частности, в этих работах получен результат об униформизации для $\mathbb{R}$. В дальнейшем тем же автором критерий униформизации был обобщён на случай квазирегулярных теорий [43, 44].

Проблемам существования универсальной $\Sigma-$функции в наследственно конечном допустимом множестве для определённых классов алгебраических систем также посвящены работы [32, 48–50]. В [50] введено понятие $\Sigma-$однородной алгебраической системы и найдено необходимое и достаточное условие для существования универсальной $\Sigma-$функции в наследственно конечной надстройке над такой системой. В [32] исследованы соотношения между некоторыми дескриптивными свойствами на допустимых множествах, такими как перечислимость, униформизация, редукция, отделимость, продолжимость. Также в данной работе рассматривается связь данных свойств с существованием универсальной $\Sigma-$определимой функции и $\Sigma-$функции, универсальной для $\Sigma-$функций, принимающих значения 0 и 1.

Другим важным аспектом теории $\Sigma-$определимости является обобщение понятия вычислимой структуры. Напомним, что структура конечного языка называется вычислимой, если её носитель и предикаты являются вычислимыми множествами, а операции задаются частично вычислимыми функциями. Проблемы существования вычислимых представлений структур всегда занимали важное место в классической теории вычислимых моделей. Те же вопросы естественным образом возникают и при изучении различных её обобщений. Ю.Л. Ершовым [8] в качестве аналога понятия вычислимой модели было введено понятие $\Sigma-$определимой в допустимом множестве структуры.

Алгебраическая система $\mathfrak{A} = \langle A; P_0^{n_0}, \dots, P_k^{n_k}\rangle$ называется $\Sigma-$определимой в допустимом множестве $\mathbb{A}$, если существуют следующие $\Sigma-$формулы (с параметрами в $\mathbb{A}$):
$S(x)$, $E^+(x, y)$, $E^-(x, y)$, $\Psi_i^+(x_1, \dots, x_{n_i})$, $\Psi_i^-(x_1, \dots, x_{n_i})$, $i = 0, \dots, k$, такие, что

1. $S^* = \{x \in \mathbb{A} | \mathbb{A} \models S(x)\} \neq \varnothing$,

2. формула $E^+(x, y)$ определяет отношение конгруэнтности $\eta$ на модели $\mathfrak{A}^* = \langle S^*; P_0^*, \ldots, P_k^*\rangle$, где $P_i^* = \{\langle x_1, \ldots, x_{n_i}\rangle | \mathbb{A} \models \Psi_i^+(x_1, \ldots, x_{n_i})\}$,

3. множества, определяемые формулами $E^+$ и $E^-$, не пересекаются и дают в объединении все $(S^*)^2$,

4. множества, определяемые формулами $\Psi_i^+$ и $\Psi_i^+$, не пересекаются и дают в объединении все $(S^*)^{n_i}$,

5. $\mathfrak{A}^*/\eta \cong \mathfrak{A}$.

Такая определимость аналогична понятию конструктивизируемой системы в следующем смысле: при $\mathbb{A} = \mathbb{HF}(\varnothing)$ получаем структуру, имеющую вычислимую изоморфную копию.

В дальнейшем данный подход разрабатывался многими авторами. Целый пласт работ, посвящённых этой тематике, можно найти у И., Ш., Калимуллина [9], А., С., Морозова [15], А., В., Роминой [34], А., И., Стукачёва [38–45], В., Г., Пузаренко [28–33], А., Н, Хисамиева [46]. В частности, большой интерес авторов вызывает уточнение понятия сводимости одних допустимых множеств к другим. Авторы [9, 10, 16, 26, 31, 38, 44] вводят различные понятия $\Sigma$-сводимости, допускающие сохранение тех или иных свойств допустимых множеств. Рассматриваются также вопросы непредставимости [22, 23], изучаются теоретико-решёточные свойства сводимости [39–41, 47].

Также исследовались вопросы существования $\Sigma-$представлений структур над наследственно конечными надстройками над упорядоченным полем вещественных чисел, полем комплексных чисел, проблемы характеризации всех $\Sigma-$представлений для заданной структуры в заданном допустимом множестве (см. работы [17–21, 25, 54]).

Особо стоит выделить вопросы, связанные с определимостью в надстройках над вещественными числами. Действительные числа являются одним из наиболее естественных и значимых объектов для изучения обобщенной вычислимости.

Исследование теоретико-модельных свойств алгебраических структур, и, в частности, полей, начались более восемьдесяти лет назад. Ещё А. Тарский [74] исследовал теорию поля действительных чисел, подняв вопрос разрешимости известных структур, таких, как поле действительных и поле комплексных чисел. Доказательство Тарского элиминации кванторов в поле действительных чисел положило начало исследованиям и других свойств этой структуры. Рассматривались способы формализации вычислений на действительных числах, а также вычислимость второго порядка над действительными числами [57–59]. С. В. Селиванова и В. Л. Селиванов изучали возможности применения методов численного анализа для доказательства вычислимости, в частности, некоторых систем уравнений в частных производных с вычислимыми действительными коэффициентами [69–71].

$\Sigma-$определимость вещественнозначных функций над такой формализацией действительных чисел изучалась М. В. Коровиной [11, 12]. В [11, 56] также дана характеризация функций, $\Sigma-$определимых в наследственно конечной списочной надстройке над полем вещественных чисел.

С другой стороны, из работ данного автора следует, что теория $\Sigma-$определимости над полем действительных чисел получается недостаточно выразительной (см. [11,13]), позволяя представить вычислимым образом только "кусочно-алгебраические"функции.

В силу такой ограниченности выразительных возможностей этой структуры перспективным с точки зрения развития теории обобщённой вычислимости представляется переход к рассмотрению моделей, расширенных дополнительными функциями, не $\Sigma-$определимыми в исходной структуре, например, функцией экспоненты. Теоретико-модельное поведение полей действительных и комплексных чисел с экспоненциальной функцией в настоящее время активно изучается, например, ему посвящены работы [61, 68, 75]. Использование таких моделей в рамках теории $\Sigma-$определимости позволяет существенно расширить получаемые классы $\Sigma-$определимых функций и множеств.

Наработки $\Sigma-$определимости в наследственно конечной надстройке и теория $\Sigma-$определимости для списочных надстроек над полем действительных чисел входят в целый ряд моделей вычислимости, представленных различными авторами для обобщения понятия вычислимости на действительные числа. В отличие от классической теории вычислимости на натуральных числах, существующие различные подходы к определению вычислимости на несчётных множествах не эквивалентны, и до сих пор не представляется возможным выделить единственный подход, который наиболее естественным образом обобщал бы понятия классической теории вычислимости. С этой точки зрения представляется важным исследовать ограничения, заложенные в ту или иную модель вычислимости, взаимосвязи этих моделей.

Широкую известность получил подход к заданию вычислимости над вещественными числами, предложенный К. Вайраухом, – вычислимый анализ [76]. Данный подход основан на аппроксимации действительных чисел сходящимися к ним вычислимыми рациональными последовательностями. Вычислимость функции задаётся возможностью выдать по заданной аппроксимации аргумента аппроксимацию её значения с произвольной точностью. Этот способ, однако, также не лишён недостатков: так, например, мы не можем аппроксимировать таким образом функции, имеющие разрыв в какой-либо точке. Более подробно модель вычислимости действительных функций по Вайрауху рассмотрена в параграфе 1.3 диссертации.

Другой подход использует Р. Миллер [63]. Он рассматривает так называемые локально вычислимые структуры, для определения которых вводит понятие вычислимого покрытия, которое представляет собой вычислимое семейство вычислимых конечнопорожденных структур, связанных между собой системой гомоморфизмов и изоморфных конечнопорожденным подструктурам исходной структуры.

Я. Московакис [64–66] , в свою очередь, строит модель вычислимости, основанную на списках элементов заданной модели. Московакис вводит аналог класса примитивно-рекурсивных функций над такими списками с помощью имитации натурального ряда, составленной из кортежей любой конечной длины. Функции этого класса задаются своими индексами, которые кодируются в списки индуктивным образом.

Также среди известных подходов к обобщенной вычислимости стоит выделить предложенный И.В. Ашаевым, В.Я. Беляевым и А.Г. Мясниковым [2, 24]. В данном подходе роль вычислительного устройства над некоторой структурой выполняют BSS-машины, работающие на списочной надстройке над этой структурой.

Другим интересным аспектом исследования формальной теории линейных списков является теоретико-вычислимая сложность её моделей. Аксиоматическая теория для линейных списков была введена в работе Мура и Рассела [77]. Пример модели такой теории можно задать следующим образом. Предположим, что $A$ — непустое множество. Тогда *списочной надстройкой* $LS(A)$ над $A$ называется двусортная структура, содержащая в качестве первого сорта элементы из $A$, которые здесь называются атомами, а в качестве второго — конечные линейные списки атомов $A$. Язык $LS(A)$ состоит из двух символов:

1. константы $nil$, интерпретируемой как пустой список, и
2. функционального символа $cons$ сорта $\texttt{список} \times \texttt{атом} \to \texttt{список}$, интерпретируемого как присоединение атома к списку.

Заметим, что такая структура может рассматриваться как ограничение наследственно конечной списочной надстройки $\mathbb{HW}(\mathfrak{M})$: основное множество $\mathbb{HW}(\mathfrak{M})$ ограничивается на элементы первого ранга (списки, содержащие только атомы), а язык надстройки обедняется до двух символов. Таким образом, эта структура также может служить основой модели вычислимости семантического программирования, при таком подходе программы также представляются $\Sigma$-формулами в подходящем языке.

С. С. Гончаров [4] разработал обобщение теории из [77], введя аксиоматическую теорию списков над заданным абстрактным типом данных. При таком подходе тип данных определяется некоторой теорией первого порядка $T$. Тогда модель теории С. С. Гончарова может быть задана как списочная надстройка $LS(\mathcal{A})$, где в качестве $\mathcal{A}$ вместо множества берётся модель теории $T$.

В мотивации к изучению списочных надстроек можно выделить два аспекта. Во-первых, такие надстройки представляют собой естественный тип данных. Более того, они тесно связаны с понятием семантического программирования, (см. [6, 52, 53]).

Второй аспект связан с теорией структур, представимых конечными автоматами. Идея использования автоматов для исследования проблем разрешимости алгебраических структур восходит к Бюхи [78] и Рабину [79]. Систематическое изучение автоматных структур (т.е. структур, представимых с помощью автомата) было начато Хусаиновым и Нероудом [80]. Дальнейшие сведения по теории автоматных структур могут быть найдены, например, в обзорах [81–84]. Использование автоматных представлений позволяет получать более сильные результаты в вопросах разрешимости: в частности, для любой автоматной структуры её теория первого порядка, расширенная квантором $\exists^{\infty}$ («существует бесконечно много»), разрешима [85, следствие 3.12].

В [86] Н. А. Баженовым были начаты исследования автоматных представлений для списочных надстроек. В частности, было доказано, что для произвольного множества $A$ обогащённая списочная надстройка $ELS(A)$ (определение надстройки приведено в параграфе 1.5) имеет автоматную копию тогда и только тогда, когда $A$ конечно. Отметим, что данный результат можно интерпретировать следующим образом: для произвольного конечного множества $A$ теория первого порядка $ELS(A)$, расширенная квантором $\exists^\infty$, разрешима.

**Цели и задачи исследования.** Целями настоящей работы являются:

(I.) Изучение взаимосвязи наследственно конечных и списочных надстроек в отношении $\Sigma$-определимости.

(II.) Исследование свойств $\Sigma$-определимости в наследственно конечных и списочных надстройках над расширениями поля действительных чисел.

(III.) Изучение теоретико-вычислимой сложности различных структур, основанных на списочном типе данных.

В качестве основных задач данного исследования можно выделить следующие:

1. Получение теоремы об униформизации для наследственно конечных списочных надстроек над расширениями поля вещественных чисел.

2. Изучение $\Sigma$-представимости наследственно конечной и списочной надстройки над произвольной моделью друг в друге.

3. Построение примера вычислимой по Вайрауху функции, не $\Sigma$-определимой в наследственно конечной надстройке над расширениями $\mathbb{R}$ с разрешимой элементарной теорией.

4. Исследование сохранения разрешимости элементарной теории при переходе от структуры к её обогащённой списочной надстройке.

5. Получение критерия автоматной представимости списочной надстройки $LS(\mathcal{M})$ над произвольной структурой.

**Научная новизна.** Все основные результаты диссертации являются новыми.

**Основные результаты диссертации.** На защиту выносятся следующие основные результаты диссертации:

1. Получена теорема об униформизации для наследственно конечной списочной надстройки над полем вещественных чисел с экспонентой, а также над расширениями поля вещественных чисел пфаффовыми функциями [90, 91].

2. Доказано, что наследственно конечная и списочная надстройки над произвольной моделью $\Sigma$-определимы друг в друге, а множества их $\Sigma$-отношений над этой моделью совпадают [92].

3. Построена вычислимая по Вайрауху функция, не $\Sigma$-определимая в наследственно конечной надстройке ни над каким расширением $\mathbb{R}$ с разрешимой теорией [93].

4. Показано, что переход от структуры $\mathcal{M}$ к $ELS(\mathcal{M})$ не всегда сохраняет разрешимость элементарной теории, а также, что для любого непустого не более чем счётного множества $S$ теория структуры $ELS(ELS(S))$ вычислимо изоморфна арифметике первого порядка [94].

5. Показано, что $LS(\mathcal{M})$ допускает представление конечным автоматом в том и только в том случае, когда $\mathcal{M}$ — конечная структура [94].

Основные результаты 4, 5 получены в неразделимом соавторстве с Н. А. Баженовым при равном участии обеих сторон, остальные основные результаты получены автором самостоятельно.

**Теоретическая и практическая значимость.** Диссертация имеет теоретический характер, её результаты могут использоваться в дальнейших исследованиях по теории $\Sigma$-определимости в допустимых множествах. Материалы диссертации также могут быть использованы при разработке спецкурсов по теории обобщённой вычислимости, написании учебных пособий и монографий.

**Методология и методы исследований.** В работе используются методы математической логики и теории вычислимости.

**Апробация работы.** По результатам диссертации были сделаны доклады на следующих международных конференциях: МНСК «Студент и научно-технический прогресс» (Новосибирск, 2012 г.), «Continuity, Computability, Constructivity – From Logic to Algorithms» (Любляна, Словения, 2014 г.), «Logic Colloquium» (Вена, Австрия, 2014 г.; Хельсинки, Финляндия, 2015 г.; Лидс, Англия, 2016 г.; Стокгольм, Швеция, 2017 г.; Удине, Италия, 2018 г.), Кроме того, результаты диссертации неоднократно докладывались на совместных семинарах ИМ СО РАН и НГУ «Теория вычислимости» и «Алгебра и логика».

**Публикации.** Результаты автора по теме диссертации опубликованы в работах [90]– [105], из них [90]– [94] входят в перечень ВАК российских рецензируемых научных журналов, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук. Работы [94,102,103] написаны совместно с Н. А. Баженовым при равном участии обеих сторон.

**Структура и объём диссертации.** Диссертация состорит из введения, трёх глав, заключения и списка литературы, содержащего 117 наименований. Объём диссертации - 81 страница.

## Содержание диссертации

В **Главе 1** приведены необходимые предварительные сведения. В **параграфе 1.1** даны предварительные сведения по теории допустимых множеств. Вводятся понятия $\Delta_0-$ и $\Sigma-$формул. Приводятся аксиомы теории Крипке и Платека с праэлементами (KPU), даётся определение допустимого множества.

В **параграфе 1.2** даётся информация о $\Sigma$-определимости в наследственно конечных надстройках. Приводится определение наследственно конечной надстройки, наследственно конечной списочной надстройки. Вводятся понятия $\Sigma$-определимой функции и $\Sigma$-предиката. Для $\Sigma$-определимых функций приводится определение универсальной функции и общий вид теоремы об униформизации, являющиеся ключевыми для результатов параграфа 3.1.

Также в параграфе 1.2 приводится одна из версий известного [3, 8, 54] результата о разложении $\Sigma-$формул наследственно конечной надстройки в вычислимую дизъюнкцию $\exists-$формул.

Следуя монографии [8], вводится понятие $\Sigma$-определимости ($\Sigma$-представимости) структуры в допустимом множестве.

В **параграфе 1.3** даны необходимые определения и известные факты вычислимого анализа. Следуя работе [76], описывается модель вычислимости над вещественными числами вычислимого анализа. Вводится понятие представления действительного числа с помощью рациональной аппроксимации. Формулируется определение вычислимой (по Вайрауху) вещественной функции.

В **параграфе 1.4** приводятся предварительные сведения о списочных надстройках конечных рангов, в частности, списочной надстройке $LS(M)$ и обогащённой списочной надстройке $ELS(M)$. Следуя работе [87], вводятся понятия бесконечных формул и вычислимых бесконечных формул языка $L$ для счётного ординала $\alpha$. Приводится определение разрешимой структуры. Следуя [4, 86], вводятся необходимые понятия для работы со списками, приводится предложение [4] о разрешимости элементарной теории списочной надстройки $LS(\mathcal{M})$ структуры $\mathcal{M}$ с разрешимой теорией.

Вводится понятие $\Psi$-расширенно-списочной надстройки, также даны некоторые примеры такой надстройки. Описывается метод итерации структуры из [88], приводятся некоторые результаты о разрешимости элементарной теории базовой и полной итераций структур.

В **параграфе 1.5** содержатся необходимые предварительные сведения об автоматных структурах. Следуя [89], вводятся понятия конечного и древесного автомата, автоматной и древесно-автоматной структуры. Также здесь приводится результат [80, 85], из которого следует, что любая автоматная (древесно-автоматная) структура разрешима.

**Глава 2** посвящена изучению $\Sigma$-определимости наследственно конечных и списочных надстроек. В рамках этой тематики в **параграфе 2.1** исследуется взаимная $\Sigma$-представимость наследственно конечной и списочной надстроек над заданной произвольной структурой.

Основным результатом этого раздела являются следующие теоремы, связывающие наследственно конечную надстройку над произвольной структурой с соответствующей наследственно конечной списочной надстройкой:

**Теорема 2.1.1.** *Пусть $\mathfrak{M}$ – произвольная структура. Наследственно конечная надстройка $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ $\Sigma-$представима в наследственно конечной списочной надстройке $\mathbb{HW}(\mathfrak{M})$ без параметров.*

**Теорема 2.1.2.** *Пусть $\mathfrak{M}$ – произвольная структура. Наследственно конечная списочная надстройка $\mathbb{HW}(\mathfrak{M})$ $\Sigma-$представима* *в наследственно конечной надстройке $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ без параметров и с тривиальной эквивалентностью $\eta$.*

**Глава 3** посвящена исследованию свойств Σ-определимости в наследственно конечных и списочных надстройках над расширениями поля действительных чисел.

В **параграфе 3.1** изучаются дескриптивные свойства наследственно конечной списочной надстройки над полем действительных чисел с экспонентой. В параграфе получены теоремы об униформизации для наследственно конечных списочных надстроек над полем действительных чисел с экспонентой и ресширениями поля действительных чисел функциями Пфаффа:

**Теорема 3.1.1.** *Для любого $\Sigma-$определимого в $HW(\mathbb{R}_{exp})$ предиката $P \subseteq R^n \times R$ существует $n$-местная $\Sigma-$определимая функция с областью определения $dom(f) = \{x : \exists y P(x,y)\}$ и графиком $\Gamma_f \subseteq P$.*

*Другими словами, для класса $\Sigma-$определимых в $HW(\mathbb{R}_{exp})$ предикатов выполняется свойство униформизации.*

**Теорема 3.1.2.** *Для любого $\Sigma-$определимого в $\mathbb{HW}(\mathbb{R}_{exp})$ предиката $P \subseteq \mathbb{HW}(\mathbb{R}_{exp}) \times \mathbb{HW}(\mathbb{R}_{exp})$ существует $n$-местная $\Sigma-$определимая функция $f$ с областью определения $dom(f) = \{x : \exists y P(x,y)\}$ и графиком $\Gamma_f \subseteq P$.*

**Следствие 3.1.2.** *Пусть $f$ – функция Пфаффа. Для любого $\Sigma-$определимого в $HW(\mathbb{R}_f)$ предиката $P \subseteq HW(\mathbb{R}_f) \times HW(\mathbb{R}_f)$ существует $n$-местная $\Sigma-$определимая функция $g$ с областью определения $dom(g) = \{x : \exists y P(x,y)\}$ и графиком $\Gamma_g \subseteq P$.*

Как следствие теоремы  получено существование универсальной функции для $\Sigma-$функций $HW(\mathbb{R}_{exp})$:

**Следствие 3.1.1.** *Существует $\Sigma-$определимая универсальная частичная функция для класса $\Sigma-$определимых в $HW(\mathbb{R}_{exp})$ функций из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}$.*

В **параграфе 3.2** проведено исследование выразительной силы $\Sigma-$определимости над расширениями поля вещественных чисел относительно вычислимого анализа.

В качестве основного результата этого параграфа можно выделить следующую теорему о существовании вещественнозначной функции, вычислимой по Вайрауху, но не $\Sigma-$определимой в наследственно конечных надстройках над расширениями поля действительных чисел, обладающими разрешимой элементарной теорией:

**Теорема 3.2.1.** *Для любого расширения упорядоченного поля вещественных чисел $\mathbb{R}^*$ с разрешимой теорией существует всюду определённая вычислимая функция $F(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, не определимая в $\mathbb{HF}(\mathbb{R}^*)$ никакой $\Sigma-$формулой.*

В **Главе 4** исследуются свойства и алгоритмическая сложность списочной надстройки $LS(M)$ и расширенной списочной надстройки $ELS(M)$.

В **параграфе 4.1** построена разрешимая структура эквивалентности $\mathcal{E}$, такая что *стандартное представление* структуры $ELS(\mathcal{E})$ не является разрешимым.

**Теорема 4.1.1.** *Предположим, что $\mathcal{A}$ — структура эквивалентности с вычислимым неограниченным характером и бесконечным числом бесконечных классов. Тогда существует $\mathcal{B}$ — разрешимая копия структуры $\mathcal{A}$, такая, что стандартное представление расширенно-списочной надстройки $\{\in\}$-$S(\mathcal{B})$ неразрешимо.*

В качестве следствия этой теоремы получен тот факт, что стандартное представление обогащённой списочной надстройки $ELS(\mathcal{B})$ также неразрешимо.

Также в этом разделе получен результат, из которого следует существование разрешимой структуры, такой, что её обогащённая списочная надстройка не имеет разрешимых копий:

**Теорема 4.1.2.** *Пусть $\mathcal{M} = (\omega; +)$ — это коммутативный моноид натуральных чисел относительно сложения. Тогда элементарная теория $ELS(\mathcal{M})$ неразрешима.*

**Следствие 4.1.1.** *Расширенно-списочная структура $\{head, tail, \sqsubseteq\}$-$S(\omega, +)$ не имеет разрешимых копий. В частности, она не может быть представлена с помощью конечного или древесного автомата.*

Таким образом, переход от структуры $\mathcal{M}$ к $ELS(\mathcal{M})$ не всегда сохраняет разрешимость элементарной теории.

Более того, доказано, что для любого непустого не более чем счётного множества $S$ теория структуры $ELS(ELS(S))$ вычислимо изоморфна арифметике первого порядка:

**Теорема 4.1.3.** *Предположим, что $A$ — непустое не более чем счётное множество. Тогда элементарная теория структуры $ELS^2(A)$ вычислимо изоморфна арифметике первого порядка.*

**Следствие 4.1.3.** *Пусть $\mathcal{M}$ — $L$-структура, имеющая арифметическую атомарную диаграмму $D(\mathcal{M})$, т.е. $D(\mathcal{M}) \leq_T \emptyset^{(n)}$ для некоторого $n \in \omega$. Тогда элементарная теория структуры $ELS^2(\mathcal{M})$ вычислимо изоморфна арифметике первого порядка. В частности, $ELS^2(\mathcal{M})$ не представима с помощью конечного или древесного автомата.*

В **параграфе 4.2** исследуется алгоритмическая сложность списочной и обогащённой списочной надстроек относительно конечных и древесных автоматов. Получены необходимые и достаточные условия для автоматной представимости надстройки $LS(\mathcal{M})$:

**Теорема 4.2.1.** *Пусть $\mathcal{M}$ — структура конечного языка. Тогда списочная надстройка $LS(\mathcal{M})$ имеет автоматное представление в том и только том случае, когда $\mathcal{M}$ конечна.*

Также в параграфе приведены примеры автоматных структур, таких, что их списочные надстройки не могут быть представлены с помощью древесных автоматов:

**Предложение 4.2.1.** *Пусть $\alpha$ — ординал, такой, что $\alpha \geq \omega^\omega$. Тогда структура $ELS(\alpha)$ не имеет древесно-автоматных представлений.*

Все доказанные в главе 4 результаты получены в неразделимом соавторстве с Н. А. Баженовым при равном участии обеих сторон. Результаты глав 2 и 3 получены автором самостоятельно.

В **заключении** изложены итоги проведённого исследования.

Изложение работы заканчивается списком литературы.

Автор выражает глубокую признательность своему научному руководителю академику РАН Сергею Савостьяновичу Гончарову за постановку задач, поддержку в работе и живой интерес к исследованиям автора.

# Список литературы


1. *Авдеев Р. Р., Пузаренко В. Г.* Вычислимая модель с нестандартной вычислимостью. // Алгебра и логика, 56:5 (2017), 636–638.

2. *Ашаев И. В., Беляев В. Я., Мясников А. Г.* Подходы к теории обобщенной вычислимости. // Алгебра и логика, 32, 4(1993), 349–386.

3. *Вайценавичюс Р. Ю.* О необходимых условиях существования универсальной функции на допустимом множестве. // Математическая логика и применения, 6(1989), Вильнюс, 21–37.

4. *Гончаров С. С.* Теория списков и её модели. // Новосибирск, 1986. Выч. Системы, Вып. 114. С. 84–95.

5. *Гончаров С. С.* // Условные термы в семантическом программировании. // Сиб. мат. журн., 58(5):1026–1034, 2017.

6. *Гончаров С. С., Свириденко Д. И.* $\Sigma-$программирование. // Новосибирск, 1985. Выч. Системы, Вып. 10. С. 3–30.

7. *Гончаров С. С., Свириденко Д. И.* Рекурсивные термы в семантическом программировании. // Сиб. матем. журн., 59:6 (2018), 1279–1290.

8. *Ершов Ю. Л.* Определимость и вычислимость. // Новосибирск: Научная книга, 1996.

9. *Калимуллин И. Ш.* Соотношения между алгоритмическими сводимостями алгебраических систем. // Изв. вузов. Матем., 2009, № 6, 71–72

10. *Калимуллин И. Ш., Пузаренко В. Г.* О сводимости на семействах. // Алгебра и логика, 48:1 (2009), 31–53

11. *Коровина М. В.* Обобщённая вычислимость на вещественных функциях. // Новосибирск, 1990. Выч. Системы, вып.133. С.38–67.

12. *Коровина М. В.* Об универсальной рекурсивной функции и абстрактных машинах на вещественных числах со списочной надстройкой. // Новосибирск, 1996. Выч. Системы, вып.156. С.–.

13. *Коровина М. В.* Обобщенная вычислимость над действительными числами. // Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, Институт математики СО РАН, 1996.

14. *Морозов А. С.* $\Sigma-$множество натуральных чисел, не перечислимое с помощью натуральных чисел. // Сиб. матем. журн., 41:6 (2000), 1404–1408.

15. *Морозов А. С.* О представимости групп $\Sigma-$определимых перестановок над допустимыми множествами. // Алгебра и логика, 41:4 (2002), 459–480.

16. *Морозов А. С.* Об отношении $\Sigma-$сводимости между допустимыми множествами. // Сиб. матем. журн., 45:3 (2004), 634–652

17. *Морозов А. С.* О некоторых представлениях поля вещественных чисел. // Алгебра и логика, 50:2 (2011), 270–271

18. *Морозов А. С.* О некоторых представлениях поля вещественных чисел. // Алгебра и логика. 2012. Т. 51, № 1. С. 98–128.

19. *Морозов А. С.* Непредставимость полугруппы $\omega^\omega$ над $\mathbb{HF}(\mathbb{R})$. // Сиб. мат. журн. 2014. Т. 55, № 1. С. 156–164.

20. *Морозов А. С.* О $\Sigma-$представлениях вещественного порядка. // Алгебра и логика. 53, № 3 (2014), 340-371.

21. *Морозов А. С.* $\Sigma-$жёсткие представления вещественного порядка. // Сиб. матем. журн., 55:3 (2014), 562–572; Siberian Math. J., 55:3 (2014), 457–464.

22. *Морозов А. С.* Об одном достаточном условии непредставимости структур в наследственно-конечных надстройках. // Алгебра и логика, 55:3 (2016), 366–379.

23. *Морозов А. С.* Непредставимость некоторых структур анализа в наследственно конечных надстройках. // Алгебра и логика, 56:6 (2017), 691–711.

24. *Морозов А. С., Кёпке П.* О вычислительных возможностях машин Блюм–Шуба–Смэйла, работающих в бесконечном времени. // Алгебра и логика, 56:1 (2017), 55–92

25. *Морозов А. С., Коровина М. В.* О $\Sigma$-определимости счётных структур над вещественными, комплексными числами и кватернионами. // Алгебра и логика. 2008. Т. 47, № 3. С. 335–363.

26. *Морозов А. С., Пузаренко В. Г.* О $\Sigma-$подмножествах натуральных чисел. // Алгебра и логика, 43:3 (2004), 291–320.

27. *Мясников А. Г., Ремесленников В. Н.* Допустимые множества в теории групп. // Алгебра и логика, 31, 4(1992), 413–433.

28. *Пузаренко В. Г.* О теории моделей на наследственно конечных надстройках. // Алгебра и логика, 41:2 (2002), 199–222

29. *Пузаренко В. Г.* О теореме Левенгейма–Сколема–Мальцева для HF-структур. // Алгебра и логика, 43:6 (2004), 749–758

30. *Пузаренко В. Г.* О семействе вычислимых множеств на допустимых множествах. // Сиб. электрон. матем. изв., 5 (2008), 1–7

31. *Пузаренко В. Г.* Об одной сводимости на допустимых множествах. // Сиб. матем. журн., 50:2 (2009), 415–429

32. *Пузаренко В. Г.* Дескриптивные свойства на допустимых множествах. // Алгебра и логика, 49:2 (2010), 238–262

33. *Пузаренко В. Г.*, Неподвижные точки оператора скачка. // Алгебра и логика, 50:5 (2011), 615–646

34. *Ромина А. В.* Определимость булевых алгебр в HF-надстройках. // Алгебра и логика, 39, 6(2000), 711–719.

35. *Руднев В. А.* Об универсальной рекурсивной функции на допустимых множествах. // Алгебра и логика. 1986. Т. 25, № 4. С. 425–436.

36. *Стукачёв А. И.* Теорема об униформизации в HF(R). // Материалы XXXIV Международной научной студенческой конференции "Студент и научно-технический прогресс: Математика НГУ, 1996, стр. 83.

37. *Стукачёв А. И.* Теорема об униформизации в наследственно конечных надстройках. // Новосибирск, 1998. Выч. Системы, Вып. 161. С. 3–14.

38. *Стукачёв А. И.* Σ-определимость в наследственно конечных надстройках и пары моделей. // Алгебра и логика. 2004. Т. 43, № 4. С. 459–481.

39. *Стукачёв А. И.* О степенях представимости моделей. I. // Алгебра и логика, 46:6 (2007), 763–788

40. *Стукачёв А. И.* О степенях представимости моделей. II. // Алгебра и логика, 47:1 (2008), 108–126.

41. *Стукачёв А. И.* Теорема об обращении скачка для полурешёток Σ−степеней. // Сиб. электрон. матем. изв., 6 (2009), 182–190.

42. *Стукачёв А. И.* Σ-определимость несчётных моделей $c$-простых теорий. // Алгебра и логика. 2010. Т. 51, № 3. С. 649–661.

43. *Стукачёв А. И.* О квазирегулярных структурах вычислимых сигнатур. // Сиб. электрон. матем. изв., 11 (2014), 444–450.

44. *Стукачёв А. И.* О свойствах sΣ−сводимости. // Алгебра и логика, 53:5 (2014), 625–642.

45. *Стукачёв А. И.* Обобщённо гиперарифметическая вычислимость над структурами. // Алгебра и логика, 55:6 (2016), 769–799.

46. *Хисамиев А. Н.* О квазирезольвентных моделях и B-моделях. // Алгебра и логика, 40, 4 (2001), 484–499.

47. *Хисамиев А. Н.* О верхней полурешётке Ершова $\mathfrak{L}_E$. // Сиб. мат. журнал, 45, 1(2004), 211–228.

48. *Хисамиев А. Н.* Σ−Ограниченные алгебраические системы и универсальные функции, I. // Сиб. мат. журнал, 51, 1(2010), 217–235.

49. *Хисамиев А. Н.* Σ−Ограниченные алгебраические системы и универсальные функции, II. // Сиб. мат. журнал, 51, 3(2010), 676–693.

50. *Хисамиев А. Н.* Σ-однородные алгебраические системы и Σ-функции. // Алгебра и логика. 2011. Т. 50, № 5. С. 659–684.

51. *Barwise J.* Admissible Sets and Structures. Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1975.

52. *Goncharov S. S., Sviridenko D. I.* Theoretical aspects of $\Sigma$-programming. // In W. Bibel and K. P. Jantke, editors, Mathematical Methods of Specification and Synthesis of Software Systems '85, volume 215 of Lect. Notes Comput. Sci., pages 169–179. Springer, Berlin, Heidelberg, 1986.

53. *Ershov Yu. L., Goncharov S. S., Sviridenko D. I.* Semantic foundations of programming. // In L. Budach, R.G. Bukharajev, and O. B. Lupanov, editors, Fundamentals of Computation Theory, volume 278 of Lect. Notes Comput. Sci., pages 116–122. Springer, Berlin, Heidelberg, 1987.

54. *Ershov Yu. L., Puzarenko. V. G., Stukachev A. I.* HF-Computability. // S. Barry Cooper and Andrea Sorbi, editors, Computability in Context. Computation and Logic in the Real World. World Scientific, 2011.

55. *Kripke S.* Transfinite recursion on admissible ordinals, I, II (abstracts). // J. Symbolic Logic, 29(1964), 161–162.

56. *Korovina M. V.* Generalised computability of real functions. // Siberian Advances in Mathematics, 2(4):1–18, 1992.

57. *Korovina M. V., Kudinov O. V.* The Uniformity Principle for $\Sigma-$definability. // Journal of Logic and Computation, Volume 19, Issue 1, 1 February 2009, Pages 159–174.

58. *Korovina M. V., Kudinov O. V.* New approach to computability. // Sib. Adv. Math., 8, 3(1998), 59–73.

59. *Korovina M. V., Kudinov O. V.* Semantic characterisations of second-order computability over the real numbers. // In Proceedings of CSL'01, Lecture Notes in Computer Science 2142 (2001), 160–172.

60. *Levy A.* A hierarchy of formulas in set theory. // Memoir Amer. Math. Soc., 57(1965).

61. *Marker D.* Model Theory and Exponentiation. // Notices Of The Ams., V.43, №7(1996), 753–759.

62. *Macintyre A., Wilkie A.* On the decidability of the real exponential field. // Kreiseliana, A. K. Peters, Wellesley, MA, 1996, pp. 441-467.

63. *Miller R. G.*, Locally computable structures. // In: Cooper, S.B., Löwe, B., Sorbi, A. (eds.) CiE 2007. LNCS, vol. 4497, pp. 575–584.

64. *Moschovakis Y. N.* Abstract computability and invariant definability. // J. Symb. Log., 34(1969), 605–633.

65. *Moschovakis Y. N.* Abstract first order computability I. // Trans. Am. Math. Soc., 138(1969), 427–464.

66. *Moschovakis Y. N.* Abstract first order computability II. // Trans. Am. Math. Soc., 138(1969), 465–504.

67. *Platek R.* Foundations of recursion theory. // Doctoral Dissertation and Supplement, Stanford, CA: Stanford Univ., 1966.

68. *Servi T.* On the first order theory of real exponentiation. // PhD thesis, ENS Pisa, 2006.

69. *Selivanova S.V., Selivanov V.L.* Computing solution operators of symmetric hyperbolic systems of PDEs. // J. Univers. Comput. Sci. 15, 6 (2009), 1337–1364

70. *Selivanova S.V., Selivanov V.L.* Computing Solution Operators of Boundary-value Problems for Some Linear Hyperbolic Systems of PDEs. // Log. Methods Comput. Sci. 13, 4 (2017), 1–3.

71. *Selivanova S.V., Selivanov V.L.* On constructive number fields and computability of solutions of PDEs. // Dokl. Math. 477, 3 (2017), 282–285.

72. *Stukachev A. I.* Uniformization property in heredidary finite superstructures. // Siberian Advances in Mathematics, v.7, N1 (1997), pp. 123–132.

73. *Stukachev A.* Effective model theory: an approach via $\Sigma-$definability. // Lecture Notes in Logic. 2013. V. 41. P. 164–197.

74. *Tarski A.* A Decision Method for Elementary Algebra and Geometry, 2nd edition, revised. // University of California Press, Berkeley and Los Angeles, 1951.

75. *Zilber B.* Pseudo-exponentiation on algebraically closed Fields of characteristic zero. // Annals of Pure and Applied Logic 132 (1):67-95 (2005).

76. *Weihrauch K.*, Computable analysis // Texts in Theoretical Computer Science, An EATCS Series, Springer-Verlag, Berlin 2000.

77. D. J. Moore and B. Russell. Axiomatic data type specifications: a first order theory of linear lists. *Acta Inf.*, 15(3):193–207, 1981.

78. J. R. Büchi. Weak second-order arithmetic and finite automata. *Z. Math. Logik Grundlagen Math.*, 6:66–92, 1960.

79. M. O. Rabin. Decidability of second-order theories and automata on infinite trees. *Trans. Am. Math. Soc.*, 141:1–35, 1969.

80. B. Khoussainov and A. Nerode. Automatic presentations of structures. In D. Leivant, editor, *Logic and Computational Complexity*, volume 960 of *Lect. Notes Comput. Sci.*, pages 367–392. Springer, Berlin, Heidelberg, 1995.

81. V. Bárány, E. Grädel, and S. Rubin. Automata-based presentations of infinite structures. In J. Esparza, C. Michaux, and C. Steinhorn, editors, *Finite and Algorithmic Model Theory*, volume 379 of *London Mathematical Society Lecture Note Series*, pages 1–76. Cambridge University Press, Cambridge, 2011.

82. B. Khoussainov and M. Minnes. Three lectures on automatic structures. In F. Delon, U. Kohlenbach, P. Maddy, and F. Stephan, editors, *Logic Colloquium 2007*, volume 35 of *Lecture Notes in Logic*, pages 132–176. Cambridge University Press, Cambridge, 2010.

83. B. Khoussainov and A. Nerode. Open questions in the theory of automatic structures. *Bull. Eur. Assoc. Theor. Comput. Sci. EATCS*, 94:181–204, 2008.

84. S. Rubin. Automata presenting structures: a survey of the finite string case. *Bull. Symb. Log.*, 14(2):169–209, 2008.

85. A. Blumensath. Automatic structures, 1999. Diploma Thesis. RWTH Aachen.

86. N. A. Bazhenov. Automatic structures and the theory of lists. *Сибирские электронные математические известия*, 12:714–722, 2015.

87. C. J. Ash and J. F. Knight. *Computable structures and the hyperarithmetical hierarchy*, volume 144 of *Stud. Logic Found. Math.* Elsevier Science B.V., Amsterdam, 2000.

88. D. Kuske and M. Lohrey. Monadic chain logic over iterations and applications to push-down systems. In *21st Annual IEEE Symposium on Logic in Computer Science (LICS'06)*, pages 91–100. IEEE Computer Society, Los Alamitos, 2006.

89. J. E. Hopcroft, R. Motwani, and J. D. Ullman. *Introduction to automata theory, languages, and computation.* Addison-Wesley, Boston, 2000.

**Работы автора по теме диссертации**

Оригинальные статьи

90. *Александрова С. А.*, Проблема униформизации для Σ-предикатов в наследственно конечной списочной надстройке над полем действительных чисел с экспонентой // Алгебра и логика. – 2014. – Т. 53, № 1. – С. 3–14.

91. *Александрова С. А.*, Об униформизации в надстройках над некоторыми расширениями R // Алгебра и логика. – 2015. – Т. 54, № 4. – С. 431–438.

92. *Александрова С. А.*, О Σ-определимости наследственно конечной и списочной надстроек // Сибирский журнал чистой и прикладной матем. – 2018. – Т. 18, № 1. – С. 3–10.

93. *Александрова С. А.*, О Σ-определимости в наследственно конечных надстройках и вычислимом анализе // Сиб. мат. журн. – 2018. – Т. 59, № 5. – С. 970–975.

94. *Александрова С. А., Баженов Н. А.*, О разрешимости списочных структур // Сиб. мат. журн. – 2019. – Т. 60, № 3. – С. 489–505.

Переводы оригинальных статей на английский язык

95. *Aleksandrova S. A.* The Uniformization Problem for Σ-Predicates in a Hereditarily Finite List Superstructure over the Real Exponential Field // Algebra and Logic. – 2014. – V. 53, N. 1. – P. 1–8.

96. *Aleksandrova S. A.* Uniformization in Superstructures Over Some Extensions of $\mathbb{R}$ // Algebra and Logic. – 2015. – V. 54, N. 4. – P. 273–278.

97. *Aleksandrova S. A.* $\Sigma-$definability in hereditarily finite superstructures and computable analysis // Siberian Mathematical Journal. – 2018. – V. 59, N. 5. – P. 763–767.

98. *Aleksandrova S. A., Bazhenov N. A.* On decidability of list structures // Siberian Mathematical Journal. – 2019. – V. 60, N. 3. – P. 377–388.

Тезисы конференций

99. *Александрова С. А.* Проблема униформизации для Σ-определимых предикатов в $HW(\mathbb{R}_{exp})$ // Материалы 50-й юбилейной международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс». Математика. – Новосибирск: НГУ, 2012. – С. 5.

100. *Aleksandrova S.* On common properties of hereditarily finite and hereditarily finite list superstructures // Continuity, Computability, Constructivity – From Logic to Algorithms. Book of Abstracts. – Ljubljana: 2014. – P. 11.

101. *Aleksandrova S.* Uniformization property for Σ-predicates in the hereditarily finite list superstructure over the real exponential field // Bull. Symb. Logic. – 2015. – V. 21, N 1. – P. 55.

102. *Aleksandrova S., Bazhenov N.* Local computability and hereditarily finite superstructures // Bull. Symb. Logic. – 2016. – V. 22, N 3. – P. 382–383.

103. *Aleksandrova S., Bazhenov N.* 4. Automatic and tree-automatic list structures // Bull. Symb. Logic. – 2017. – V. 23, N 2. – P. 228–229.

104. *Aleksandrova S.* On computability in hereditarily finite superstructures and computable analysis // Logic Colloquium 2017. Programme and Abstracts. – Stockholm: 2017. – P. 76.

105. *Aleksandrova S.* $\Sigma-$definability of hereditarily finite and hereditarily finite list superstructures // Logic Colloquium 2018. Program and Abstracts. – Udine: 2018. – P. 60.