

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»

Факультет математики

На правах рукописи

Пятов Павел Николаевич

**R-матричный формализм в дифференциальной
геометрии квантовых групп и в интегрируемых
моделях математической физики**

Резюме диссертации
на соискание ученой степени
доктора математических наук

Москва - 2020

Введение

Настоящая диссертация посвящена приложениям R-матричного формализма в теории квантовых матричных алгебр, построении q-аналогов дифференциально-геометрических конструкций для квантовых линейных групп и в изучении некоторых интегрируемых стохастических процессов и моделей квантовой механики. Под R-матричным формализмом мы понимаем технику, основанную на использовании R-матричных представлений группы кос, а в нашем случае, более конкретно, алгебр Гекке, в построении и изучении разнообразных структур на квантовых многообразиях и в рассмотрении физических моделей.

Представим кратко содержание диссертации.

Первый и второй разделы работы посвящены определению и выяснению структурных свойств семейства квантовых матричных алгебр. В разделе 1 мы даем краткое описание применяемой в дальнейшем R-матричной техники и даем определение квантовой матричной (KM-) алгебры типа $GL(n)$. В разделе 2 вводится коммутативная характеристическая подалгебра KM-алгебры, определяются наборы порождающих ее элементов и предъявляются соотношения между ними — соотношения Ньютона. Затем, формулируется основная структурная теорема о KM-алгебрах типа $GL(n)$ — q-аналог теоремы Гамильтона-Кэли.

В третьем и четвертом разделах мы изучаем гейзенбергов дубль над квантовой линейной группой. Этот дубль является квантованием алгебры дифференциальных операторов на группе. Он строится как специальное смэш-произведение двух замечательных KM-алгебр: RTT-алгебры и алгебры уравнения отражений. В разделе 3 дано определение гейзенбергов дублей $GL(n)$ и $SL(n)$ типов, затем, с использованием q-аналога теоремы Гамильтона-Кэли строится их спектральное расширение, и, в качестве попутного результата, получают 2 серии динамических R-матриц линейного типа. Раздел 4 посвящен исследованию замечательной серии автоморфизмов гейзенбергова дубля. Эти автоморфизмы были введены в рассмотрение Л.Фаддеевым и А.Антоновым и проинтерпретированы ими как операоры дискретной по времени эволюции модели q-деформированного волчка Эйлера. Мы вычисляем оператор эволюции этого волчка.

Разделы 5 и 6 посвящены построению дифференциального исчисления на линейных квантовых группах. Алгебра дифференциального исчисления порождается четырьмя матрицами генераторов: матрицей генераторов RTT-

алгебры квантованных функций на группе; парой матриц генераторов двух алгебр уравнения отражений, играющих роль базисов лево- и право-инвариантных производных Ли; и матрицей базисных 1-форм на группе, порождающих квантовую внешнюю алгебру дифференциальных форм. В разделе 5 дается определение таких алгебр типов $GL(n)$ и $SL(n)$ и строится отображение внешней производной. В разделе 6 строится спектральное расширение алгебр дифференциального исчисления; изучаются три серии замечательных автоморфизмов на этих алгебрах, обобщающих автоморфизмы раздела 4; а затем, с использованием этих автоморфизмов строится анти-инволюция унитарного типа для алгебр дифференциального исчисления.

В седьмом разделе работы R-матричный формализм применяется в построении факторизованных формул для двух серий решений квантового уравнения Книжника-Замолодчикова. Эти решения имеют отношение к модели интегрируемого стохастического процесса Rouse and Peel, введенного в рассмотрение Я. де Гиром, Б.Ниенхойсом, П.Пирсом и В.Риттенбергом с целью физической интерпретации открытых А.Разумовым и Ю.Строгановым комбинаторных свойств спиновой цепочки XXZ, проявляющихся в ее нефизическом режиме.

Небольшие исторические введения предпосланы каждому тематическому блоку диссертации. Во введении к первому разделу кратко излагается история изучения квантовых матричных алгебр. В начале третьего раздела обсуждается история гейзенбергова дубля. В предисловии к пятому разделу описывается история и обсуждаются проблемы построения дифференциального исчисления на квантовых группах. Во введении к седьмому разделу излагается история квантовых уравнений Книжника-Замолодчикова и их применения к модели Rouse-and Peel. Наши исторические заметки не претендуют на полноту обзора всего круга вопросов по каждой из этих обширных тем. Мы упоминаем, в первую очередь, исследования, повлиявшие на исследования в данной диссертации.

В восьмом и девятом разделах диссертации представлены список результатов, выносимых на защиту, и список представляемых к защите статей.

В заключительном десятом разделе мы перечисляем недавние продвижения в направлении исследований диссертационной работы и обсуждаем перспективные направления дальнейших исследований.

1 Квантовые матричные алгебры

С самого создания ленинградской школой математической физики квантового метода обратной задачи рассеяния (КМОЗ) в его формализме просматривались неявно конструкции теории квантовых групп. Их открытие принадлежит В. Дринфельду [D1].

R-матричный формализм в теории квантовых групп активно развивался с конца 80-х годов в приложении к квантовым интегрируемым моделям и в исследованиях по некоммутативной геометрии квантовых групп. Помимо изначально присутствовавших в формализме КМОЗ, так называемых, *RTT-алгебр*, — квантованных алгебр функций на группах Ли [FRT], важную роль в развитии теории и приложений квантовых групп сыграло еще одно замечательное семейство алгебр, порождаемых матричными компонентами: *алгебры уравнения отражений* [Ch1, KS]. При значительных различиях в структуре и в теории представлений этих двух семейств в их исследовании возникают общие конструкции (квантовый след, квантовый детерминант, q-обобщения соотношений Ньютона и теоремы Гамильтона-Кэли), роднящие их с классическими матричными алгебрами (см. [EOW, NT, PS, Zh]). Поэтому естественным шагом стало объединение этих двух семейств в едином семействе *квантовых матричных* (КМ-) алгебр, предложенное независимо и из разных соображений в работах [H, IOP1]. Структурная теория этих алгебр станет предметом нашего изучения в этом и следующем разделах.

Квантовые матричные алгебры — семейство ассоциативных алгебр с единицей, порождаемых набором матричных компонент $\{M_{ij}\}_{i,j=1}^N$, удовлетворяющих квадратичным соотношениям специального вида. Эти соотношения задаются с использованием, так называемых, R-матричных представлений группы кос и определяют правила перестановки генераторов M_{ij} . Именно типические свойства R-матричных представлений позволяют доказывать структурные результаты о КМ-алгебрах. Они определяют конкретный вид тождеств Гамильтона-Кэли и структуру характеристических подалгебр в КМ-алгебрах.

Мы начнем с краткого обзора R-матричных представлений группы кос, относящихся к типу геккевских. Такие представления применяются в построении семейств КМ-алгебр линейных типов: $GL(N)$, $SL(N)$, $GL(N|M)$. Первые два семейства будут основными объектами изучения в этом разделе.

Рассмотрим конечномерное $\mathbb{C}$ -линейное пространство V , $\dim V = N$. Зафиксировав в нем базис $\{v_j\}_{j=1}^N$, мы отождествляем операторы $X \in \text{End}(V^{\otimes n})$

с матрицами $X_{j_1 j_2 \dots j_n}^{k_1 k_2 \dots k_n}$.

Для всякого $X \in \text{End}(V^{\otimes m})$ и для любого $i \geq 1$ обозначим символом $X_i \in \text{End}(V^{\otimes n})$, $n \geq i + m - 1$, оператор, матрица которого имеет вид

$$(X_i)_{j_1 \dots j_n}^{k_1 \dots k_n} = I_{j_1 \dots j_{i-1}}^{k_1 \dots k_{i-1}} X_{j_i \dots j_{i+m-1}}^{k_i \dots k_{i+m-1}} I_{j_{i+m} \dots j_n}^{k_{i+m} \dots k_n}. \quad (1.1)$$

Здесь и далее символом I обозначается тождественный оператор.

Оператор $R \in \text{Aut}(V^{\otimes 2})$, для которого выполнено соотношение

$$R_1 R_2 R_1 = R_2 R_1 R_2, \quad (1.2)$$

называется *R-матрицей*.

Оператор перестановки $P \in \text{Aut}(V^{\otimes 2})$: $P(u \otimes v) = v \otimes u \quad \forall u, v \in V$ является R-матрицей. Если R — R-матрица, то и R^{-1} является R-матрицей.

Всякая R-матрица R порождает серию представлений ρ_R групп кос $\mathcal{B}_n$

$$\rho_R : \mathcal{B}_n \rightarrow \text{Aut}(V^{\otimes n}), \quad g_i \mapsto R_i, \quad 1 \leq i \leq n-1. \quad (1.3)$$

Здесь символами g_i обозначены артиновы генераторы группы кос.

R-матрица называется *косо обратимой*, если существует оператор $\Psi_R \in \text{End}(V^{\otimes 2})$, такой что

$$\text{Tr}_{(2)} R_{12} \Psi_{R23} = \text{Tr}_{(2)} \Psi_{R12} R_{23} = P_{13}. \quad (1.4)$$

В записи этой формулы мы используем обозначение X_{ij} , указывающее явно порядковые номера пространств V , в которых оператор X действует не тождественно (например, $P_{13} = P_{i_1 i_3}^{j_1 j_3} I_{i_2}^{j_2}$). Символом $\text{Tr}_{(i)}$ здесь и далее мы обозначаем операцию взятия следа в пространстве с порядковым номером i .

Для косо обратимой R-матрицы R определим оператор $D_R \in \text{End}(V)$

$$D_{R1} = \text{Tr}_{(2)} \Psi_{R12}. \quad (1.5)$$

R называется *строго косо обратимой*, если D_R обратима. Если R-матрица R строго косо обратима, то R^{-1} тоже строго косо обратима [Gu], причем

$$(D_{R^{-1}})_2^{-1} = \text{Tr}_{(1)} \Psi_{R12}.$$

Косо обратимой R-матрице R сопоставим $\mathbb{C}$ -линейное отображение $\text{Tr}_R : \text{End}(V) \otimes W \rightarrow W$ из пространства $N \times N$ матриц, с компонентами принадлежащими $\mathbb{C}$ -линейному пространству W , в пространство W

$$\text{Tr}_R(M) = \sum_{j,k=1}^N D_{Rj}^k M_k^j \quad \forall M \in \text{End}(V) \otimes W. \quad (1.6)$$

Это отображение называется *R-следом*. Нетрудно убедиться, что перестановка P строго косо обратима, а Tr_P совпадает с обычным следом. Характеристическим свойством R-следа является соотношение

$$\text{Tr}_{R(2)} R_1 = I_1. \quad (1.7)$$

R-матрица R , чей минимальный многочлен является квадратичным, называется *геккевской*. С помощью масштабного преобразования минимальный многочлен такой R-матрицы всегда можно привести к виду

$$(R - qI)(R + q^{-1}I) = 0, \quad (1.8)$$

где $q \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ – отличный от нуля комплексный параметр.

R-матричные представления (1.3), порождаемые геккевскими R-матрицами, являются представлениями алгебр Ивахори-Гекке $\mathcal{H}_n(q)$, чьи артиновы генераторы g_i удовлетворяют квадратичным условиям $(g_i - q1)(g_i + q^{-1}1) = 0$ – соотношениям Гекке. В алгебрах $\mathcal{H}_n(q)$ можно задать набор, так называемых, *бакстеризованных* генераторов

$$g_i(x) = 1 + \frac{x-1}{q-q^{-1}} g_i, \quad x \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad (1.9)$$

для которых выполняются соотношения

$$g_i(x) g_{i+1}(xy) g_i(y) = g_{i+1}(y) g_i(xy) g_{i+1}(x), \quad (1.10)$$

$$g_i(x) g_i(x^{-1}) = \frac{(qx - q^{-1})(qx^{-1} - q^{-1})}{(q - q^{-1})^2} 1, \quad (1.11)$$

именуемые, соответственно, *уравнениями Янга-Бакстера* и *соотношениями унитарности*. Бакстеризованные элементы играют важную роль в теории представлений алгебр Ивахори-Гекке. В частности, с их помощью задаются рекуррентные выражения для пары примитивных центральных идемпотентов $a^{(n)}, s^{(n)} \in \mathcal{H}_n(q)$ [J, Gy]:

$$\begin{aligned} a^{(1)} &= s^{(1)} = 1, \\ a^{(i+1)} &= \frac{q^i}{[i+1]_q} a^{(i)} g_i(q^{-2i}) a^{(i)}, \quad s^{(i+1)} = \frac{q^{-i}}{[i+1]_q} s^{(i)} g_i(q^{2i}) s^{(i)} \quad \forall i \geq 1, \\ g_j a^{(n)} &= a^{(n)} g_j = -q^{-1} a^{(n)}, \quad g_j s^{(n)} = s^{(n)} g_j = q s^{(n)} \quad \forall j : 1 \leq j \leq n-1. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Здесь $[i]_q = (q^i - q^{-i})/(q - q^{-1})$ – стандартное обозначение для q -чисел. Во избежание сингулярностей при определении $a^{(n)}, s^{(n)}$ мы полагаем

$$[i]_q \neq 0 \quad \forall i : 2 \leq i \leq n. \quad (1.13)$$

Определение 1.1. *Строго косообратимая геккевская R-матрица R называется R-матрицей типа $GL(n)$, если в порождаемом ей представлении ρ_R выполнены условия*

$$\text{rank } \rho_R(a^{(i)}) > 0 \quad \forall i = 1, \dots, n, \quad \rho_R(a^{(n+1)}) = 0. \quad (1.14)$$

Как показано в [Gu], для R-матриц типа $GL(n)$ верно соотношение

$$\text{rank } \rho_R(a^{(n)}) = 1.$$

Это позволяет вводить понятие q-определителя в квантовых матричных алгебрах, связанных с такими R-матрицами (см. ниже).

Серия R-матриц Дринфельда-Джимбо

$$R_{(DJ)} = \sum_{j,k=1}^N q^{\delta_{jk}} E_{jk} \otimes E_{kj} + (q - q^{-1}) \sum_{j < k} E_{jj} \otimes E_{kk}, \quad (1.15)$$

где $(E_{jk})_l^m := \delta_{jm} \delta_{kl}$, $j, k, m, l = 1, \dots, N$, – базис матричных единиц, является наиболее известным, но далеко не единственным примером R-матриц типа $GL(n)$. В данном примере $n = \dim V = N$, но, вообще говоря, это не так (контрпримеры построены в [Gu]). К типу $GL(n)$ относятся также многопараметрические обобщения R-матриц (1.15) [R1], семейство R-матриц Кремера-Жерве [CG, IO] и др.

Упорядоченная пара $\{R, F\}$ R-матриц R и F называется *совместной R-матричной парой*, если выполняются соотношения

$$R_1 F_2 F_1 = F_2 F_1 R_2, \quad R_2 F_1 F_2 = F_1 F_2 R_1, \quad (1.16)$$

Равенства (1.16) называются *соотношениями твиста*. Пары R-матриц $\{R, P\}$ и $\{R, R\}$ являются совместными.

Совместным парам строго косообратимых R-матриц $\{R, F\}$ мы будем сопоставлять *квантовые матричные алгебры* $\mathcal{M}(R, F)$. Для их определения нам потребуется свободная ассоциативная алгебра $W = \mathbb{C}\langle 1, M_a^b \rangle$, порождаемая единицей и компонентами $N \times N$ матрицы $M = \|M_a^b\|_{a,b=1}^N$. Мы также будем использовать $\bar{i}$ -копии матрицы M : $M_{\bar{i}}$, $i \geq 1$, задаваемые рекуррентно с использованием R-матрицы F

$$M_{\bar{1}} := M_1, \quad M_{\bar{i}} := F_{i-1} M_{\bar{i-1}} F_{i-1}^{-1} \quad \forall i > 1. \quad (1.17)$$

В частном случае $F = P$ $\bar{i}$ -копии оператора $M \in \text{End}(V) \otimes W$ совпадают с его обычными копиями (1.1): $M_{\bar{i}} = M_i$.

Определение 1.2. [H, IOP1]. Пусть $\{R, F\}$ — совместная пара строго ко-сообратимых R -матриц. Фактор-алгебра свободной алгебры $W = \mathbb{C}\langle 1, M_a^b \rangle$, $a, b = 1, \dots, N$, по двустороннему идеалу, порождаемому соотношениями

$$R_1 M_{\bar{1}} M_{\bar{2}} = M_{\bar{1}} M_{\bar{2}} R_1, \quad (1.18)$$

называется квантовой матричной (КМ-) алгеброй и обозначается $\mathcal{M}(R, F)$.

В случае, если R — геккевская R -матрица (R -матрица типа $GL(n)$), соответствующая алгебра $\mathcal{M}(R, F)$ называется геккевской КМ-алгеброй (КМ-алгеброй типа $GL(n)$).

В алгебре $\mathcal{M}(R, F)$ для всех $\bar{i}$ -копий матрицы генераторов M выполняются соотношения [IOP1]

$$R_i M_{\bar{i}} M_{\overline{i+1}} = M_{\bar{i}} M_{\overline{i+1}} R_i, \quad \forall i \geq 1, \quad (1.19)$$

причем при различных значениях индекса i соотношения (1.19) эквивалентны.

Пожалуй, наиболее важными примерами квантовых матричных алгебр, являются алгебры, отвечающие совместным парам $\{R, P\}$ и $\{R, R\}$.

Паре $\{R, P\}$ отвечает, так называемая, RTT -алгебра [D1, FRT]. Обычно матрицу ее генераторов обозначают символом T . Соотношения (1.18) в данном случае принимают вид

$$R_1 T_1 T_2 = T_1 T_2 R_1. \quad (1.20)$$

Паре $\{R, R\}$ отвечает алгебра *уравнения отражений* [Ch1, KS]. Мы будем обозначать матрицу генераторов этой алгебры символом L . Соотношения (1.18) для генераторов этой алгебры можно переписать в виде

$$R_1 L_1 R_1 L_1 = L_1 R_1 L_1 R_1. \quad (1.21)$$

Оба эти семейства КМ-алгебр играют важную роль в построении и изучении интегрируемых моделей математической физики. Оба семейства обладают дополнительными алгебраическими структурами. Нам будет в дальнейшем важна геометрическая трактовка этих алгебр: в случае $R = R_{(DJ)}$ RTT -алгебра интерпретируется как *алгебра квантованных функций на группе $GL(n)$* , алгебра уравнения отражений представляется *квантованием алгебры право-инвариантных дифференциальных операторов на $GL(n)$* . Применение этих алгебр в построении дифференциального исчисления на квантовых группах мы обсудим разделах 3 и 5. В следующем разделе мы сформулируем общие для всех КМ-алгебр $GL(n)$ типа структурные результаты.

2 Структура характеристической подалгебры и q-аналог теоремы Гамильтона-Кэли

Рассмотрим в КМ-алгебре $\mathcal{M}(R, F)$ линейную оболочку единицы и всех элементов вида

$$ch(x^{(k)}) := \text{Tr}_{R(1\dots k)} \left(\rho_R(x^{(k)}) M_{\bar{1}} M_{\bar{2}} \dots M_{\bar{k}} \right) \quad \forall k \geq 1, \quad (2.1)$$

где $x^{(k)}$ — произвольный элемент групповой алгебры $\mathbb{C}[\mathcal{B}_k]$. Будем обозначать это подпространство символом $\mathcal{C}(R, F)$.

Утверждение 2.1. $\mathcal{C}(R, F)$ является абелевой подалгеброй КМ-алгебры $\mathcal{M}(R, F)$. Мы будем называть эту подалгебру характеристической.

Характеристическая подалгебра алгебры уравнения отражений принадлежит ее центру: $\mathcal{C}(R, R) \subset \mathbb{Z}[\mathcal{M}(R, R)]$.

Примечания.

- Абелевость характеристических подалгебр РТТ-алгебр была впервые отмечена в работе [Mai], где проверялась коммутативность элементов $\mathcal{C}(R, P)$, называемых степенными суммами (см. ниже). Полное доказательство абелевости для произвольных КМ-алгебр приведено в [IOP1].
- Центральность характеристической подалгебры для алгебр уравнения отражений доказывалась в [D2, R2] с использованием конструкции квазитреугольных алгебр Хопфа. В формализме КМ-алгебр доказательство центральности приведено в [IP2].

При изучении умножения в характеристических алгебрах рассматриваются следующие наборы элементов.

Степенные суммы p_i , $i \geq 0$:

$$p_0 := \text{Tr}_R(I) \, 1 \text{ (} = q^{-n} [n]_q! \text{ в } GL(n) \text{ случае), } \quad p_1(M) := \text{Tr}_R(M),$$

$$p_k(M) := \text{Tr}_{R(1\dots k)} (R_{k-1} \dots R_2 R_1 M_{\bar{1}} M_{\bar{2}} \dots M_{\bar{k}}), \quad k = 2, 3, \dots \quad (2.2)$$

При рассмотрении КМ-алгебр геккевского типа также используются *элементарные симметрические многочлены e_i , $i \geq 0$:*

$$e_0 := 1,$$

$$e_k(M) := \text{Tr}_{R(1\dots k)} \left((\rho_R(a^{(k)}) M_{\bar{1}} M_{\bar{2}} \dots M_{\bar{k}}) \right), \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.3)$$

При этом для корректности определения e_k на параметр q накладываются ограничения $q : [i]_q \neq 0 \quad \forall i = 2, \dots, k$. Отметим, что в КМ-алгебрах типа $GL(n)$ число нетривиальных элементов e_i конечно: $e_{n+i} = 0 \quad \forall i > 0$.

В дальнейшем мы будем указывать аргумент в обозначении степенных сумм и элементарных симметрических многочленов лишь в случаях, когда его отсутствие может вызвать путаницу (см., например, утверждение 3.2).

Утверждение 2.2. *Характеристическая подалгебра геккевской КМ-алгебры порождается набором степенных сумм $\{p_i\}_{i \geq 0}$. При условии $[i]_q \neq 0 \quad \forall i \geq 2$, она также порождается набором элементарных симметрических многочленов $\{e_i\}_{i \geq 0}$. Эти два набора генераторов связаны между собой q -аналогами соотношений Ньютона*

$$\sum_{i=0}^{k-1} (-q)^i e_i p_{k-i} = (-1)^{k-1} [k]_q e_k \quad \forall k \geq 0. \quad (2.4)$$

Представление набора генераторов $\{M_a^b\}_{a,b=1,\dots,N}$ КМ-алгебры в виде матрицы позволяет не только компактным образом записывать соотношения на них (1.18). Важной особенностью КМ-алгебр является наличие аналога теоремы Гамильтона-Кэли для матрицы генераторов M . Для формулировки этой теоремы нам требуется определить понятие матричной степени M .

Матрица

$$(M^{\bar{k}})_1 = \text{Tr}_{R(2 \dots k)} (R_{k-1} \dots R_2 R_1 M_{\bar{1}} M_{\bar{2}} \dots M_{\bar{k}}), \quad k = 2, 3, \dots \quad (2.5)$$

называется $\bar{k}$ -ой матричной степенью матрицы M генераторов КМ-алгебры $\mathcal{M}(R, F)$. Мы используем надчеркнутый символ $\bar{k}$ в определении (2.5), чтобы исключить возможную путаницу с обозначением обычной матричной степени M^k . По определению полагаем $M^{\bar{1}} = M$, $M^{\bar{0}} = I$.

Для матриц L генераторов алгебр уравнения отражений $\mathcal{M}(R, R)$ (1.21) понятия надчеркнутой и обычной матричных степеней совпадают: $L^{\bar{k}} \equiv L^k$.

Надчеркнутую матричную степень, как и обычную, можно представить в виде последовательного применения бинарной ассоциативной операции $\star$ к парам матриц M и N :

$$M \star N = M \cdot \phi(N), \quad (2.6)$$

где ϕ – линейное преобразование вида

$$\phi(N)_1 = \text{Tr}_{R(2)} (N_{\bar{2}} R_{12}), \quad (2.7)$$

а символом " $\star$ " обозначена операция обычного произведения матриц. Отображение ϕ задается по совместной паре строго косообратимых R -матриц $\{R, F\}$ и является обратимым [OP].

Эквивалентной формой определения (2.5) является

$$M^{\bar{k}} = \underbrace{M \star M \star \dots \star M}_{k \text{ раз}}, \quad (2.8)$$

при этом ассоциативность операции $\star$ приводит к аддитивности процедуры возведения в надчеркнутую степень

$$M^{\bar{k}} \star M^{\bar{j}} = M^{\overline{k+j}}.$$

Теорема 2.3. (*q -аналог теоремы Гамильтона-Кэли*).

Для матрицы M генераторов КМ-алгебры типа $GL(n)$ выполняется характеристическое тождество

$$\sum_{i=0}^n (-q)^i M^{\overline{n-i}} e_i = 0. \quad (2.9)$$

Примечания.

- Соотношения Ньютона для алгебр уравнения отражений были выведены в статьях [PS, GPS1], их обобщение на случай произвольной геккевской КМ-алгебры доказано в [IOP1]. Отметим, что определение КМ-алгебры использовавшееся в [IOP1], отличается от приведенного выше. Эквивалентность этих определений доказывается в [IOP2].
- Тождества Гамильтона-Кэли для алгебр уравнения отражений, связанных с R -матрицей Дринфельда-Джимбо (1.15), были доказаны в [NT]. Обобщение на случай произвольных алгебр уравнения отражений типа $GL(n)$ представлено в [GPS1], а на случай произвольной КМ-алгебры типа $GL(n)$ в [IOP1]. Ранее варианты тождеств Гамильтона-Кэли для некоторых примеров RTT-алгебр обсуждались в [EOW].
- В работах И.Гельфанда, В. Ретаха и соавторов (см.[G-T] и ссылки в ней) рассматривалось иное обобщение теоремы Гамильтона-Кэли на случай некоммутативных ассоциативных алгебр. В этом подходе вводится понятие *квазидетерминанта*, позволяющее строить аналоги формул и утверждений классической теории матриц для наиболее общего семейства алгебр порождаемых матричными компонентами. При этом не

используются R -матрицы и не накладываются специфические квадратичные соотношения на матричные генераторы (1.18). Для построения матричных степеней применяется классическое определение матричного умножения; скалярные коэффициенты характеристического тождества заменяются диагональными матрицами, причем компоненты этих матриц являются не многочленами, а рациональными функциями генераторов алгебры. Такую цену приходится заплатить за большую общность рассмотрения. В частном случае алгебр уравнения отражений, отвечающих R -матрице Дринфельда-Джимбо (1.15), характеристические тождества Гельфанда, Ретаха и соавторов совпадают с (2.9), однако для КМ-алгебр общего вида связи характеристических тождеств в двух подходах не просматривается.

Из теоремы 2.3 следует, что необходимым и достаточным условием обратимости матрицы генераторов КМ-алгебры типа $GL(n)$ как по отношению к обычному матричному умножению, так и по отношению к умножению $\star$ (2.6), является обратимость элемента e_n . В алгебрах $\mathcal{M}(R, F)$ типа $GL(n)$ с элементом e_n связывают понятие *квантового определителя* матрицы генераторов M (см. ниже).

Рассмотрим факторизацию КМ-алгебры $GL(n)$ типа по соотношению вида $e_n \sim 1$. Такая факторизация приводит к контролируемому и интересному результату в случае, если элемент e_n принадлежит центру КМ-алгебры. В алгебрах уравнения отражений условие центральности e_n выполнено всегда. В RTT -алгебрах условия центральности квантового определителя описываются следующим утверждением.

Утверждение 2.4. [Gu] *В RTT -алгебре (1.20) типа $GL(n)$ для квантового определителя e_n и матрицы генераторов алгебры T выполняются соотношения*

$$T e_n = e_n (O_R)^{-1} T O_R, \quad (2.10)$$

где взаимнообратные матрицы O_R , $(O_R)^{-1}$ задаются формулами

$$\begin{aligned} O_{R1} &= [n]_q \operatorname{Tr}_{R(2, \dots, n+1)} \left(P_1 P_2 \dots P_n \rho_R(a^{(n)}) \right), \\ (O_R^{-1})_1 &= [n]_q \operatorname{Tr}_{R(2, \dots, n+1)} \left(\rho_R(a^{(n)}) P_n \dots P_2 P_1 \right). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Руководствуясь этим результатом, мы можем выделить подкласс RTT -алгебр типа $SL(n)$.

Определение 2.5. Рассмотрим RTT -алгебру $\mathcal{M}(R, P)$ типа $GL(n)$. Квантовым определителем матрицы ее генераторов T называется элемент¹

$$\det_R T := \text{Tr}_{(1\dots n)} \left(\rho_R(a^{(n)}) T_1 T_2 \dots T_n \right) = q^{n^2} e_n(T), \quad (2.12)$$

Предположим, что задающая ее R -матрица R такова, что соответствующая матрица O_R (2.11) скалярна. В таком случае квантовый определитель принадлежит центру алгебры, и фактор-алгебра $\mathcal{M}(R, P)$ по соотношению $\det_R T = 1$ называется RTT -алгеброй типа $SL(n)$.

Важным свойством RTT -алгебр типа $SL(n)$ является обратимость матрицы генераторов T или, иными словами, наличие отображения антипода $T \mapsto T^{-1} : TT^{-1} = T^{-1}T = I$, которое превращает ее в алгебру Хопфа (см. [FRT]). Явное выражение для T^{-1} дается формулой

$$(T^{-1})_1 = q^{n(n-1)} [n]_q \text{Tr}_{R(2, \dots, n)} \left(T_2 \dots T_n \rho_R(a^{(n)}) \right). \quad (2.13)$$

Хорошо известными примерами RTT -алгебр типа $SL(n)$ являются квантованные алгебры функций на группах $SL(n)$ [FRT], в построении которых используются R -матрицы Дринфельда-Джимбо (1.15), удовлетворяющие условиям определения (2.5). Заметим однако, что для многопараметрических R -матриц типа $GL(n)$ [R1] условия определения (2.5), как правило, не выполняются.

В следующем разделе мы займемся исследованием структуры гейзенбергова дубля (определение см. ниже) над RTT -алгебрами типа $SL(n)$.

3 Квантование дифференциальных операторов на линейных группах

Гейзенбергов дубль над квантовой группой был введен в рассмотрение в начале 90-х годов прошлого века в работах М.Семенова-Тян-Шанского и др. [S, AF1, SWZ2]. С алгебраической точки зрения он является смешным произведением квантованной универсальной обертывающей алгебры и двойственной ей алгебры Хопфа (см. [Mon]). В дифференциально-геометрической интерпретации гейзенбергов дубль представляет из себя квантование алгебры дифференциальных операторов на группе Ли или, иначе, квантование

¹Нормировочный коэффициент в определении элемента $\det_R T$ выбирается так, чтобы он был групповым относительно операции коумножения $\Delta(T_k^j) = \sum_{m=1}^n T_m^j \otimes T_k^m$.

алгебры функций на кокасательном расслоении группы Ли. Поскольку кокасательные расслоения групп Ли являются естественными фазовыми пространствами при формулировке классических интегрируемых моделей, стоит ожидать, что гейзенбергов дубль сыграет аналогичную роль в теории квантовых интегрируемых систем.

В этом разделе мы занимаемся изучением структуры гейзенбергова дубля над РТТ-алгеброй типа $SL(n)$. Мы строим его спектральное расширение и вводим в спектрально расширенном дубле новый набор генераторов. Вычисление перестановочных соотношений для этих генераторов дает новый способ построения динамических R -матриц $GL(n)$ типа, как известной серии, так и ранее не встречавшейся. В следующем разделе с использованием новых генераторов мы решим задачу построения оператора эволюции квантовой модели q -деформированного изотропного волчка [AF1, AF2].

Определение 3.1. *Рассмотрим пару КМ-алгебр, ассоциируемых со строго косообратимой R -матрицей R : РТТ-алгебру $\mathcal{M}(R, P)$, порождаемую матрицей генераторов T с соотношениями (1.20), и алгебру уравнения отражений $\mathcal{M}(R, R)$, порождаемую матрицей генераторов L с соотношениями (1.21). Гейзенберговым дублем этих алгебр называется алгебра, генераторами которой выступают компоненты матриц T и L , удовлетворяющие, помимо (1.20) и (1.21), еще и перестановочным соотношениям (3.3) между компонентами T и L . Для удобства запишем все соотношения вместе:*

$$R_1 T_1 T_2 = T_1 T_2 R_1, \quad (3.1)$$

$$R_1 L_1 R_1 L_1 = L_1 R_1 L_1 R_1, \quad (3.2)$$

$$R_1 L_1 R_1 T_1 = \gamma^2 T_1 L_2, \quad \text{где } \gamma \in \{\mathbb{C} \setminus 0\}. \quad (3.3)$$

Для этой алгебры в дальнейшем используется обозначение $\mathcal{HD}_\gamma(R)$.

Алгебра $\mathcal{HD}_\gamma(R)$ называется гейзенберговым дублем геккевского типа (типа $GL(n)$), если используемая в ее построении R -матрица R относится к геккевскому типу (типу $GL(n)$).

Для построения $SL(n)$ редукции этой алгебры рассмотрим перестановочные соотношения элементов $e_n(T)$ и $e_n(L)$.

Утверждение 3.2. [IP2]. *В гейзенберговом дубле $\mathcal{HD}_\gamma(R)$ типа $GL(n)$ выполняются соотношения*

$$L e_n(T) = q^{-2} \gamma^{2n} e_n(T) (O_R)^{-1} L O_R, \quad (3.4)$$

$$T e_n(L) = q^2 \gamma^{-2n} e_n(L) T. \quad (3.5)$$

Определение 3.3. Рассмотрим гейзенбергов дубль $\mathcal{HD}_\gamma(R)$ типа $GL(n)$. Предположим, что для задающей его R -матрицы R соответствующая матрица O_R (2.11) скалярна, а параметры γ и q связаны соотношением $\gamma^n = q$. В таком случае фактор-алгебра $\mathcal{HD}_\gamma(R)$ по соотношениям²

$$\det_R T = q^{n^2} e_n(T) = 1, \quad e_n(L) = q^{-1} 1 \quad (3.6)$$

называется гейзенберговым дублем типа $SL(n)$ и обозначается $\mathcal{HD}_{SL(n)}(R)$.

Прокомментируем классический предельный переход $q \rightarrow 1$ для алгебры $\mathcal{HD}_{SL(n)}(R)$, задаваемой с помощью R -матрицы Дринфельда-Джимбо (1.15).

Произведем линейную замену и переобозначение генераторов алгебры

$$T \rightarrow t : t_k^j = T_k^j, \quad L \rightarrow \ell : \ell_k^j = \left(\delta_k^j 1 - q^{\frac{1-n^2}{n}} L_k^j \right) / (q - q^{-1}), \quad (3.7)$$

и учтем условия предельного перехода

$$R_{(DJ)} \xrightarrow{q \rightarrow 1} P, \quad R_{(DJ)}^2 \xrightarrow{q \rightarrow 1} I + (q - q^{-1})P, \quad \gamma^2 = q^{2/n} \xrightarrow{q \rightarrow 1} 1 + (q - q^{-1})\frac{1}{n}. \quad (3.8)$$

Соотношения на генераторы гейзенбергова дубля (3.1)–(3.3) и условия $SL(n)$ редукции (3.6) в пределе $q \rightarrow 1$ принимают вид

$$\begin{aligned} [t_1, t_2] &= 0, \\ [\ell_1, \ell_2] &= P_{12}(\ell_2 - \ell_1), \\ [\ell_1, t_2] &= (P_{12} - \frac{1}{n} I_{12}) t_2, \\ \text{Tr } \ell &= 0, \quad \det t = 1, \end{aligned} \quad (3.9)$$

что есть не что иное, как определяющие соотношения алгебры Ли $sl(n)$ правоинвариантных векторных полей ℓ_k^j , действующих на координатных функциях t_k^j группы Ли $SL(n)$. Такой классический предел оправдывает интерпретацию гейзенбергова дубля $\mathcal{HD}_{SL(n)}(R)$ как квантования (т.е., q -деформации) алгебры дифференциальных операторов на $SL(n)$.

Для дальнейшего изучения гейзенбергова дубля нам потребуется центрально расширить КМ-алгебру $GL(n)$ типа $\mathcal{M}(R, R)$ с использованием корней характеристического многочлена матрицы ее генераторов L .

Рассмотрим алгебру рациональных функций от n переменных $\mathbb{C}(\mu_1, \dots, \mu_n)$. В предположении алгебраической независимости генераторов $e_i(L)$ характеристической подалгебры $\mathcal{C}(R, R)$ алгебры уравнения отражений $\mathcal{M}(R, R)$ за-

²Нормировка элемента $e_n(L)$ будет в дальнейшем объяснена.

дадим ее вложение $\mathcal{C}(R, R) \hookrightarrow \mathbb{C}(\mu_1, \dots, \mu_n)$, при котором образами генераторов $e_i(L)$ являются элементарные симметрические многочлены

$$e_i(L) \mapsto e_i(\mu_1, \dots, \mu_n) := \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_i \leq n} \mu_{j_1} \mu_{j_2} \dots \mu_{j_i} \quad \forall i = 0, 1, \dots, n, \quad (3.10)$$

Это вложение задает структуру $\mathcal{C}(R, R)$ -модуля на $\mathbb{C}(\mu_1, \dots, \mu_n)$.

Определение 3.4. *Спектральным расширением алгебры уравнения отражений $\mathcal{M}(R, R)$ типа $GL(n)$ назовем алгебру*

$$\overline{\mathcal{M}(R, R)} := \mathcal{M}(R, R) \otimes_{\mathcal{C}(R, R)} \mathbb{C}(\mu_1, \dots, \mu_n).$$

Иными словами, алгебра $\overline{\mathcal{M}(R, R)}$ получается расширением алгебры $\mathcal{M}(R, R)$ набором рациональных функций от n взаимно коммутирующих переменных $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$, удовлетворяющих соотношениям

$$\begin{aligned} e_\alpha(L) &= e_\alpha(\mu_1, \dots, \mu_n), & L_j^i \mu_\alpha &= \mu_\alpha L_j^i \\ \forall i, j &= 1, \dots, N, & \forall \alpha &= 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Переменные μ_α мы будем называть спектральными переменными.

Фактор-алгебру алгебры $\overline{\mathcal{M}(R, R)}$ по соотношениям

$$e_n(L) = \prod_{\alpha=1}^n \mu_\alpha = q^{-1} 1 \quad (3.12)$$

будем называть спектральным расширением алгебры уравнения отражений типа $SL(n)$.

Как мы уже отмечали, число N строк (столбцов) матрицы L_j^i не обязано совпадать с числом n ее спектральных переменных. Однако, для КМ-алгебр, построенных с использованием R -матрицы Дринфельда-Джимбо (1.15), это действительно так.

В спектрально расширенной алгебре $\overline{\mathcal{M}(R, R)}$ характеристическое тождество (2.9) теоремы Гамильтона-Кэли принимает факторизованный вид:

$$\prod_{\alpha=1}^n (L - q\mu_\alpha I) = 0. \quad (3.13)$$

Подчеркнем, что в случае алгебры уравнения отражений операция $\star$ -умножения матриц (2.6) совпадает с обычным матричным умножением, и поэтому формула (3.13) подразумевает матричное умножение факторов.

Пользуясь (3.13), мы можем построить полный набор взаимно ортогональных матриц-проекторов

$$P^\alpha = \prod_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^n \frac{(L - q\mu_\beta I)}{q(\mu_\alpha - \mu_\beta)} : \quad P^\alpha P^\beta = \delta_{\alpha\beta} P^\alpha, \quad \sum_{\alpha=1}^n P^\alpha = I, \quad (3.14)$$

причем строки и столбцы проектора P^α являются собственными векторами матрицы генераторов L , отвечающими собственному значению $q\mu_\alpha$

$$L P^\alpha = P^\alpha L = q\mu_\alpha P^\alpha. \quad (3.15)$$

Нашей следующей целью является построение спектрального расширения гейзенбергова дубля $\mathcal{HD}_{SL(n)}(R)$.

Определение-теорема 3.5. [IP2]. Спектральным расширением гейзенбергова дубля типа $SL(n)$ назовем расширение алгебры $\mathcal{HD}_{SL(n)}(R)$ (см. определение 3.3) набором рациональных функций от n взаимно коммутрующих переменных $\mu_1, \dots, \mu_n$, удовлетворяющих соотношениям (3.11), (3.12), а также соотношениям

$$(P^\beta T) \mu_\alpha = q^{2(\delta_{\alpha\beta} - \frac{1}{n})} \mu_\alpha (P^\beta T) \quad \forall \alpha, \beta = 1, \dots, n, \quad (3.16)$$

где P^α — матрицы-проекторы (3.14).

Определение 3.5 требует проверки совместности соотношений (3.16) и (3.3) с выражением (3.11) генераторов характеристической подалгебры $e_\alpha(L)$ в виде элементарных симметрических многочленов от спектральных переменных μ_α . Доказательство совместности проведено в [IP2].

В работе [AF1] А.Алексеев и Л. Фаддеев наблюдали на классическом уровне и постулировали на квантовом уровне присутствие динамических R-матриц в перестановочных соотношениях определенных операторов гейзенбергова дубля, оказавшихся удобными в описывании динамики q-деформированного волчка. В заключительной части этого раздела мы приведем описание спектрально расширенного гейзенбергова дубля, в котором динамические R-матрицы возникают естественным образом.

Рассмотрим в спектральном расширении гейзенбергова дубля $\mathcal{HD}_{SL(n)}(R)$ набор матриц

$$W^\alpha = P^\alpha T, \quad \alpha = 1, \dots, n. \quad (3.17)$$

С учетом обратимости матрицы T , в терминах компонент этих матриц и спектральных переменных μ_α можно выразить все генераторы гейзенбергова дубля:

$$T = \sum_{\alpha=1}^n W^\alpha, \quad L = \sum_{\alpha=1}^n q\mu_\alpha W^\alpha T^{-1}.$$

Теорема 3.6. [IP2] Зададим покомпонентно две $n^2 \times n^2$ матрицы $R^S(q; \mu)_{\alpha\beta}^{\gamma\delta}$ и $R^A(q; \mu)_{\alpha\beta}^{\gamma\delta}$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, \dots, n$.

Ненулевые компоненты $R^S(q; \mu)$ имеют вид:

$$R^S_{\alpha\alpha}{}^{\alpha\alpha} = q, \quad R^S_{\alpha\beta}{}^{\alpha\beta} = -\frac{(q - q^{-1})\mu_\beta}{\mu_\alpha - \mu_\beta}, \quad R^S_{\beta\alpha}{}^{\alpha\beta} = \frac{q^{-1}\mu_\alpha - q\mu_\beta}{\mu_\alpha - \mu_\beta} \quad \forall \alpha \neq \beta, \quad (3.18)$$

а $R^A(q; \mu)$ имеет ненулевые компоненты

$$R^A_{\alpha\alpha}{}^{\alpha\alpha} = -q^{-1}, \quad R^A_{\alpha\beta}{}^{\alpha\beta} = -\frac{(q - q^{-1})\mu_\beta}{\mu_\alpha - \mu_\beta}, \quad R^A_{\beta\alpha}{}^{\alpha\beta} = \frac{q^{-1}\mu_\beta - q\mu_\alpha}{\mu_\alpha - \mu_\beta} \quad \forall \alpha \neq \beta, \\ R^A_{\alpha\alpha}{}^{\beta\alpha} = -R^A_{\alpha\alpha}{}^{\alpha\beta} = \frac{(q^4 - 1)\mu_\alpha \varphi_{\alpha\beta}}{q(\mu_\alpha - \mu_\beta)} \quad \forall \alpha \neq \beta, \quad (3.19)$$

$$\text{где} \quad \varphi_{\alpha\beta} := \prod_{\sigma \neq \alpha, \beta} \frac{\mu_\sigma - q^2 \mu_\alpha}{\mu_\sigma - \mu_\beta}$$

Обе эти матрицы являются решениями динамического уравнения Янга-Бакстера

$$R(\mu)_{12} R(\nabla_1(\mu))_{23} R(\mu)_{12} = R(\nabla_1(\mu))_{23} R(\mu)_{12} R(\nabla_1(\mu))_{23}. \quad (3.20)$$

здесь ∇^1 — диагональная матрица, составленная из операторов конечного сдвига спектральных переменных

$$\nabla_1 = \text{diag}\{\nabla_\alpha\}_{\alpha=1}^n : \quad \nabla_\alpha(\mu_\beta) = q^{2X_{\alpha\beta}} \mu_\beta, \\ \text{где} \quad X_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} - \frac{1}{n} \quad \forall \alpha, \beta = 1, \dots, n. \quad (3.21)$$

Спектральное расширение алгебры $\mathcal{HD}_{SL(n)}(R)$ можно задать в терминах матриц генераторов W^α , удовлетворяющих соотношениям

$$W^\alpha \mu_\beta - q^{2(\delta_{\alpha\beta} - \frac{1}{n})} \mu_\beta W^\alpha = 0 \quad \forall \alpha, \beta = 1, \dots, n, \\ S_1^{(2)}[W_1^\alpha W_2^\beta R_1 - \sum_{\alpha', \beta'=1}^n R^S(q; \mu)_{\alpha'\beta'}^{\alpha\beta} W_1^{\alpha'} W_2^{\beta'}] = 0, \quad (3.22) \\ A_1^{(2)}[W_1^\alpha W_2^\beta R_1 - \sum_{\alpha', \beta'=1}^n R^A(q; \mu)_{\alpha'\beta'}^{\alpha\beta} W_1^{\alpha'} W_2^{\beta'}] = 0,$$

где мы использовали компактные обозначения

$$A^{(2)} = \rho_R(a^{(2)}) = \frac{qI - R}{q + q^{-1}}, \quad S^{(2)} = \rho_R(1 - a^{(2)}) = \frac{q^{-1}I + R}{q + q^{-1}}. \quad (3.23)$$

Примечания.

- Динамическое уравнение Янга-Бакстера впервые встречается в работе Ж.-Л. Жерве и А. Неве [GN]. Затем, серии динамических R-матриц, включая и серию $R^S(q; \mu)$, строились с использованием различных методов в работах [F, AF1, Is, EV1, EV2]. Систематический подход к динамическим уравнениям Янга-Бакстера и динамическим R-матрицам был предложен Дж. Фельдером [Fe] и в дальнейшем развивался в работах П. Этингофа, А. Варченко и др. (см. обзор [ES]). Серия R-матриц $R^A(q; \mu)$, насколько нам известно, в рамки этой классификационной схемы не укладывается и ранее в литературе не встречалась.
- Отметим, что в доказательстве теоремы 3.6 динамические R-матрицы $R^{A/S}(q; \mu)$ вычисляются в результате решения систем (не более трех) линейных уравнений. При этом сами они оказываются решениями систем нелинейных конечно-разностных уравнений (3.20).
- Отметим также, что динамические R-матрицы $R^{A/S}(q; \mu)$ в соотношениях (3.22) задаются исключительно типом $SL(n)$ нединамической R-матрицы R и не зависят от ее конкретного вида.

4 Эволюция q-деформированного изотропного волчка

В этом разделе мы занимаемся исследованием динамики модели q -деформированного волчка Эйлера, Эта модель, физические наблюдаемые которой действуют в гейзенберговом дубле, была предложена А.Алексеевым и Л.Фаддеевым [AF1, AF2]. Мы определим естественные динамические переменные модели и построим ее оператор эволюции.

Рассмотрим цепочку отображений θ матриц генераторов гейзенбергова дубля

$$\begin{aligned} \{T, L\} &\xrightarrow{\theta^k} \{T(k), L(k)\} \quad \forall k \geq 0 : \\ T(0) &= T, \quad T(k+1) = LT(k) = L^{k+1}T, \quad L(k) = L. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Как нетрудно проверить, отображение θ согласуется с соотношениями (3.1)–(3.3) из определения 3.1 гейзенбергова дубля общего вида $\mathcal{HD}_\gamma(R)$. Более тонкой является проверка совместности этого отображения с соотношениями $SL(n)$ редукции (3.6). В этой проверке ключевую роль играет выбор нормировки матрицы генераторов L : $e_n(L) = q^{-1}1$.

Утверждение 4.1. *Отображение θ (4.1) задает автоморфизм гейзенбергова дубля $\mathcal{HD}_{SL(n)}(R)$.*

В работах [AF1, AF2] серия автоморфизмов (4.1) была интерпретирована как эволюция q -деформированного квантового изотропного волчка в дискретном времени. Ключевую роль в такой интерпретации должно было сыграть представление в виде внутреннего автоморфизма алгебры

$$T(k+1) = LT(k) = \Theta T(k) \Theta^{-1}, \quad (4.2)$$

где оператор Θ , будучи элементом гейзенбергова дубля, играет роль оператора (дискретной) эволюции волчка. Однако, в рамках алгебры $\mathcal{HD}_{SL(n)}(R)$ такого элемента найти не удалось. Мы осуществим построение оператора Θ в рамках спектрального расширения алгебры $\mathcal{HD}_{SL(n)}(R)$. При этом также появится возможность определить эволюцию q -деформированного изотропного волчка и в непрерывном времени.

Учитывая инвариантность матрицы генераторов L при автоморфизме (4.1), а также алгебраическую зависимость спектральных переменных (3.12), будем искать Θ в виде

$$\Theta = \Theta(\mu_1, \dots, \mu_{n-1}). \quad (4.3)$$

Точнее, мы будем искать оператор эволюции Θ в виде формального ряда по переменным μ_α , $\alpha = 1, \dots, n-1$.

Утверждение 4.2. *Оператор эволюции Θ (4.2), (4.3) в спектральном расширении гейзенбергова дубля $\mathcal{HD}_{SL(n)}(R)$ является решением уравнений*

$$q\mu_\alpha \Theta(\nabla_\alpha(\mu_\beta)) = \Theta(\mu_\beta) \quad \forall \alpha = 1, \dots, n-1, \quad (4.4)$$

где ∇_α — операторы конечных сдвигов, введенные в (3.21).

Введем удобную с точки зрения физической интерпретации оператора Θ параметризацию коэффициента деформации q и спектральных переменных

$$q = \exp(2\pi i \tau), \quad q^{1/n} \mu_\alpha = \exp(2\pi i x_\alpha) : \quad \sum_{\alpha=1}^n x_\alpha = 0. \quad (4.5)$$

Теорема 4.3. *[IP2] Решениями уравнений (4.4) в классе формальных рядов по переменным x_α , $\alpha = 1, \dots, n-1$, являются функции $\Theta^{(a)}$, $a = 1, 2$:*

$$\Theta^{(1)}(x_\alpha) = \sum_{\vec{k} \in \mathbb{Z}^{n-1}} \exp \left\{ \pi i (\vec{k}, \Omega \vec{k}) + 2\pi i (\vec{k}, \vec{x}) \right\}, \quad \Omega_{\alpha\beta} = 2\tau(\delta_{\alpha\beta} - \frac{1}{n}), \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} \Theta^{(2)}(x_\alpha) &= \exp \left\{ -\frac{\pi i}{2\tau} \sum_{\beta=1}^n x_\beta^2 \right\} \\ &= \exp \{ -\pi i (\vec{x}, \Omega^{-1} \vec{x}) \}, \quad (\Omega^{-1})_{\alpha\beta} = \frac{1}{2\tau} (\delta_{\alpha\beta} + 1). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Здесь $\Theta^{(1)} = \theta(\vec{x}, \Omega)$ — тета-функция Римана, τ — ее модулярный параметр, Ω — $(n-1) \times (n-1)$ матрица периодов (см. [Мит, Ig]).

Ряд $\Theta^{(1)}$ сходится, если коэффициент деформации удовлетворяет условию $|q| < 1$. В случае, если q является рациональным корнем из 1, ряд $\Theta^{(1)}$ можно заменить конечной суммой.

Выражение $\Theta^{(2)}$ является хорошо определенной функцией параметра τ и переменных x_α . В отличие от случая $\Theta^{(1)}$, логарифмическая замена переменных $\mu_\alpha \mapsto x_\alpha$ (4.5) для $\Theta^{(2)}$ играет существенную роль.

Соотношение между решениями $\Theta^{(1)}$ и $\Theta^{(2)}$ дается частным случаем модулярного функционального соотношения (см. [Мит], глава 2, раздел 5).

$$\Theta^{(2)}(\vec{x}) = \left(\frac{(-2i\tau)^{n-1}}{n} \right)^{1/2} \frac{\theta(\vec{x}, \Omega)}{\theta(\Omega^{-1}\vec{x}, -\Omega^{-1})}. \quad (4.8)$$

В случае $|q| = 1$ решение $\Theta^{(2)}$ можно интерпретировать как унитарный оператор эволюции q -волчка за единичный промежуток времени. Гамильтониан модели имеет вид: $H = -\pi(\vec{x}, \Omega^{-1}\vec{x})$.

5 Квантование дифференциального исчисления на линейных группах

Исследования дифференциального исчисления на квантовых группах начались практически одновременно с открытием квантовых групп. Общие рамки для таких построений были заданы постулатами биковариантности С.Вороновича [W] и R-матричной идеологией [FRT]. Достаточно быстро удалось построить квантование внешней алгебры дифференциальных форм и определить внешний дифференциал для групп серии $GL(n)$ (см. работы [Ju, Mal1, Mal2, Su1, Su2, Tz, SWZ1, SWZ2, Zu] и обзоры [Is, KSch]). В то же время попытки квантования дифференциального исчисления для групп серии $SL(n)$ в рамках подхода Вороновича закончились безрезультатно. Оказалось, что процедура SL -редукции несовместима с классическим градуированным правилом Лейбница, применяемым при вычислении внешнего дифференциала произвольных функций и дифференциальных форм.

В этом разделе мы представим схему построения дифференциального исчисления на квантовых группах серии $SL(n)$ с использованием q -деформированной версии правила Лейбница. Эта схема была предложена в работах [FP1, FP2]. Отметим, что для квантовых групп серий $O(n)$, $Sp(2n)$ удовле-

творительной конструкции дифференциального исчисления до сих пор не известно (см., напр., [AIP]).

Мы рассмотрим алгебру дифференциального исчисления на линейной квантовой матричной группе, порождаемую компонентами четырех матриц-генераторов:

$\|T_j^i\|_{i,j=1}^N$ – координатные функции на квантовой матричной группе,

$\|\Omega_j^i\|_{i,j=1}^N$ – право-инвариантные 1-формы,

$\|L_j^i\|_{i,j=1}^N$ – право-инвариантные производные Ли,

$\|K_j^i\|_{i,j=1}^N$ – лево-инвариантные производные Ли.

С матрицами генераторов T и L мы уже встречались в предыдущих разделах, при этом в отсутствие дифференциальных форм производные Ли L отождествлялись с векторными полями.

Следующий результат определяет алгебры дифференциального исчисления типов $GL(n)$ и $SL(n)$.

Определение-теорема 5.1. *Всякой R -матрице R типа $GL(n)$ (см. определение 1.1) сопоставляется алгебра $\mathcal{DC}_{GL(n)}(R)$, порождаемая компонентами матриц-генераторов T, Ω^g, L, K , удовлетворяющих соотношениям*

$$R_1 T_1 T_2 = T_1 T_2 R_1, \quad (5.1)$$

$$R_1 L_1 R_1 L_1 = L_1 R_1 L_1 R_1, \quad (5.2)$$

$$R_1 L_1 R_1 T_1 = q^{2/n} T_1 L_2, \quad (5.3)$$

$$R_1 K_2 R_1 K_2 = K_2 R_1 K_2 R_1, \quad (5.4)$$

$$T_2 R_1 K_2 R_1 = q^{2/n} K_1 T_2, \quad (5.5)$$

$$R_1 \Omega_1^g R_1 \Omega_1^g = -\Omega_1^g R_1 \Omega_1^g R_1^{-1}, \quad (5.6)$$

$$R_1 \Omega_1^g R_1^{-1} T_1 = T_1 \Omega_2^g, \quad (5.7)$$

$$R_1 L_1 R_1 \Omega_1^g = \Omega_1^g R_1 L_1 R_1, \quad (5.8)$$

$$K_1 \Omega_2^g = \Omega_2^g K_1, \quad K_1 L_2 = L_2 K_1. \quad (5.9)$$

Предположим, R -матрица R имеет тип $GL(n)$ и отвечающая ей матрица O_R (2.11) скалярна. Такой R -матрице сопоставляется алгебра $\mathcal{DC}_{SL(n)}(R)$,

порождаемая компонентами матриц-генераторов T, Ω, L, K , удовлетворяющих тем же соотношениям, что и четверка T, Ω^g, L, K , за исключением соотношения (5.6), которое заменяется соотношением

$$R_1 \Omega_1 R_1 \Omega_1 + \Omega_1 R_1 \Omega_1 R_1^{-1} = \kappa_q (\Omega_1^2 + R_1 \Omega_1^2 R_1), \quad (5.10)$$

$$\kappa_q = \frac{q^n(q-q^{-1})}{n_q + q^n(q-q^{-1})}, \quad \text{при условии } n_q + q^n(q-q^{-1}) \neq 0.$$

На генераторы алгебры $\mathcal{DC}_{SL(n)}(R)$ дополнительно накладываются условия $SL(n)$ -редукции

$$\det_R T = q^{n^2} e_n(T) = 1, \quad e_n(L) = e_n(K) = q^{-1} 1, \quad \text{Tr}_R(\Omega) = 0. \quad (5.11)$$

Здесь выражение для элемента $e_n(K)$ дается теми же формулами, что и для $e_n(L)$ (см. (2.3)), с заменой R -матрицы $R = R_{12} \rightarrow R_{21} = PRP$.

Отображение

$$\{T, L, K\} \mapsto \{T, L, K\}. \quad \Omega \mapsto \Omega^g - \frac{q^n}{n_q} \text{Tr}_R(\Omega^g) I \quad (5.12)$$

задает гомоморфизм вложения $\mathcal{DC}_{SL(n)}(R) \hookrightarrow \mathcal{DC}_{GL(n)}(R)$.

Примечания.

- Квантование внешнего произведения дифференциальных 1-форм $GL(n)$ типа Ω^g — соотношения (5.6)-(5.8) — было впервые предложено в работах [SWZ1, Zu]. Формулы $SL(n)$ -редукции этой внешней алгебры — (5.10)–(5.12) — получены и проверены на совместность с соотношениями (5.1)–(5.9) в [IP2, FP1].
- Алгебры $\mathcal{DC}_{GL(n)}(R)$, $\mathcal{DC}_{SL(n)}(R)$ стандартным образом наделяются структурами биковариантного бимодуля над алгеброй Хопфа (5.1) (см., напр., [KSch]). Именно наличие такой дополнительной структуры позволяет рассматривать эти алгебры в качестве дифференциальных исчислений на квантовых группах.

Отображение внешнего дифференцирования на алгебрах $\mathcal{DC}_{GL(n)}(R)$, $\mathcal{DC}_{SL(n)}(R)$, совместное с процедурой $SL(n)$ -редукции, задается следующей процедурой.

Теорема 5.2. [FP1]. *С использованием перестановочных соотношений (5.1)–(5.10) преобразуем произвольный элемент алгебр $\mathcal{DC}_{GL(n)}(R)$, $\mathcal{DC}_{SL(n)}(R)$ так, чтобы в каждом из его слагаемых мономов матриц-генераторов были упорядочены слева-направо следующим образом:*

$$K - \Omega - T - L.$$

Действие линейного отображения внешнего дифференцирования d на каждом из упорядоченных мономов задается R -деформированным правилом Лейбница:

$$d(K \dots) = Kd(\dots), \quad d(\dots L) = d(\dots)L, \quad (5.13)$$

$$d(\Omega \dots) = (\Omega^2 - \Omega d)(\dots), \quad (5.14)$$

$$d(T_1 T_2 \dots T_k) = \left\{ I + \kappa_q(S_R^{(k)}(I) - I) \right\}^{-1} S_R^{(k)}(\Omega) T_1 T_2 \dots T_k, \quad (5.15)$$

где для любой $N \times N$ матрицы X

$$S_R^{(k)}(X_1) = X_1 + \sum_{i=1}^{k-1} R_i \dots R_2 R_1 X_1 R_1 R_2 \dots R_i. \quad (5.16)$$

Заданное таким образом отображение d обладает свойством $d^2 = 0$, и является гомоморфизмом алгебр $\mathcal{DC}_{GL(n)}(R)$, $\mathcal{DC}_{SL(n)}(R)$.

Примечания.

- При классическом предельном переходе (3.7), (3.8) алгебры $\mathcal{DC}_{GL(n)}(R)$ и $\mathcal{DC}_{SL(n)}(R)$ превращаются во внешние алгебры дифференциальных форм, снабженные действием производных Ли, на группах $GL(n)$ и $SL(n)$, соответственно. Генераторы Ω_k^j при этом превращаются в дифференциальные 1-формы $\sum_{p=1}^N (t^{-1})_p^j dt_k^p$, а соотношения (5.14)-(5.16) превращаются в правила действия внешней производной на функциях и на дифференциальных формах.
- Обратимость матриц $\{I + \kappa_q(S_R^{(k)}(I) - I)\} \forall k = 2, 3, \dots$, является необходимым и достаточным условием корректности формул (5.15), задающих действие внешней производной на квантованных функциях. Это условие накладывает ограничения на возможные значения параметра квантования q . Воспользовавшись техникой [FP2], для алгебр дифференциальных исчислений типов $GL(n)$ и $SL(n)$ можно получить эти ограничения в явном виде

$$q : \sum_{k=1}^n q^{m_k} \neq 0 \quad \forall m_k \in \mathbb{Z}. \quad (5.17)$$

Все запрещенные условиями (5.17) значения q лежат в кольце $1/2 < |q| < 2$. Предельными точками этого множества являются рациональные точки на единичной окружности $|q| = 1$. При выполнении условий (5.17) когомологии комплекса (5.14)-(5.16) совпадают с дерамовскими когомологиями групп Ли $GL(n)$, $SL(n)$ [FP2].

6 Спектральное расширение и антиинволюция для алгебр дифференциального исчисления

Здесь мы обсудим конструкцию анти-инволюции унитарного типа для алгебр дифференциальных исчислений на линейных квантовых группах, введенных в рассмотрение в предыдущем разделе. При этом нам потребуется ввести две дополнительные структуры на алгебрах $\mathcal{DC}_{GL(n)}(R)$, $\mathcal{DC}_{SL(n)}(R)$: разложение Гаусса для матриц L и K генераторов производных Ли, а также спектральное расширение этих алгебр, аналогичное обсуждавшемуся в разделе 3.

Займемся сначала спектральным расширением, которое мы осуществим с использованием наборов спектральных переменных матриц генераторов производных Ли L и K , а также матрицы

$$F_k^j = (L T K T^{-1})_k^j, \quad (6.1)$$

компоненты которой также удовлетворяют уравнению отражений. Условия $SL(n)$ -редукции (5.11) порождают следующее соотношение для F [P2]

$$e_n(F) = q^{-n^2} 1. \quad (6.2)$$

По аналогии со спектральным расширением алгебры право-инвариантных производных Ли L (см. определение 3.4) зададим спектральное расширение алгебр уравнения отражений, порождаемых матрицами K и F

$$\begin{aligned} e_\alpha(K) &= e_\alpha(\nu_1, \dots, \nu_n), & K_j^i \nu_\alpha &= \nu_\alpha K_j^i, \\ e_\alpha(F) &= e_\alpha(\rho_1, \dots, \rho_n), & F_j^i \rho_\alpha &= \rho_\alpha F_j^i \\ &\forall i, j = 1, \dots, N, & \forall \alpha = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Условия $SL(n)$ -редукции для наборов спектральных переменных $\{\nu_\alpha\}$ и $\{\rho_\alpha\}$ имеют вид

$$e_n(K) = \prod_{\alpha=1}^n \nu_\alpha = q^{-1} 1, \quad e_n(F) = \prod_{\alpha=1}^n \rho_\alpha = q^{-n^2} 1. \quad (6.4)$$

Воспользовавшись характеристическими тождествами теоремы 2.3, построим полные наборы взаимно ортогональных матриц-проекторов

$$Q^\alpha = \prod_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^n \frac{(K - q\nu_\beta I)}{q(\nu_\alpha - \nu_\beta)} : \quad Q^\alpha Q^\beta = \delta_{\alpha\beta} Q^\alpha, \quad \sum_{\alpha=1}^n Q^\alpha = I, \quad (6.5)$$

$$S^\alpha = \prod_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^n \frac{(F - q\rho_\beta I)}{q(\rho_\alpha - \rho_\beta)} : \quad S^\alpha S^\beta = \delta_{\alpha\beta} S^\alpha, \quad \sum_{\alpha=1}^n S^\alpha = I. \quad (6.6)$$

Определение-теорема 6.1. [P2].

Спектральным расширением алгебр $\mathcal{DC}_{GL(n)}(R)$, $\mathcal{DC}_{SL(n)}(R)$ назовем их расширение набором рациональных функций от $3n$ взаимно коммутирующих переменных $\mu_1, \dots, \mu_n$, $\nu_1, \dots, \nu_n$, $\rho_1, \dots, \rho_n$, удовлетворяющих соотношениям (3.11), (3.16), (6.3), а также соотношениям

$$\mu_\alpha K = K \mu_\alpha, \quad \nu_\alpha Y = Y \nu_\alpha \quad \forall Y = L, K, \Omega, \quad (6.7)$$

$$\rho_\alpha Z = Z \rho_\alpha \quad \forall Z = T, L, K, \quad (6.8)$$

$$\nu_\alpha (TQ^\beta) = q^{2(\delta_{\alpha\beta} - \frac{1}{n})} (TQ^\beta) \nu_\alpha, \quad (6.9)$$

$$q^{2\delta_{\alpha\sigma}} (P^\beta \Omega P^\sigma) \mu_\alpha = q^{2\delta_{\alpha\beta}} \mu_\alpha (P^\beta \Omega P^\sigma), \quad (6.10)$$

$$q^{2\delta_{\alpha\sigma}} (S^\beta \Omega S^\sigma) \rho_\alpha = q^{2\delta_{\alpha\beta}} \rho_\alpha (S^\beta \Omega S^\sigma) \quad \forall \alpha, \beta, \sigma = 1, \dots, n. \quad (6.11)$$

При спектральном расширении алгебры $\mathcal{DC}_{SL(n)}(R)$ эти соотношения дополняются набором условий $SL(n)$ -редукции (3.12), (6.4).³

В алгебрах дифференциального исчисления на линейных квантовых группах имеется серия отображений, аналогичных автоморфизму эволюции q -деформированного волчка (4.1). Следующий результат дает описание этих отображений и их представление в виде внутренних автоморфизмов спектрально расширенных алгебр.

Теорема 6.2. [P2]. Отображения θ_L , θ_K и θ_F задаваемые на генераторах формулами

$$\theta_L: T \mapsto LT, \quad \Omega \mapsto L\Omega L^{-1}, \quad L \mapsto L, \quad K \mapsto K; \quad (6.12)$$

$$\theta_K: T \mapsto TK, \quad Y \mapsto Y \quad \forall Y = L, K, \Omega; \quad (6.13)$$

$$\theta_F: T \mapsto T, \quad \Omega \mapsto F\Omega F^{-1}, \quad L \mapsto L, \quad K \mapsto K. \quad (6.14)$$

порождают автоморфизмы алгебр $\mathcal{DC}_{GL(n)}(R)$, $\mathcal{DC}_{SL(n)}(R)$. Эти автоморфизмы взаимно коммутативны.

Осуществив замену коэффициента деформации q и спектральных переменных $\{\mu_\alpha, \nu_\alpha, \rho_\alpha\}$

$$q = e^{2\pi i \tau}, \quad q^{1/n} \mu_\alpha = e^{2\pi i x_\alpha}, \quad q^{1/n} \nu_\alpha = e^{2\pi i y_\alpha}, \quad q^n \rho_\alpha = e^{2\pi i z_\alpha}: \quad (6.15)$$

$$\sum_{\alpha=1}^n x_\alpha = \sum_{\alpha=1}^n y_\alpha = \sum_{\alpha=1}^n z_\alpha = 0,$$

³В [P2] при определении спектрального расширения формулы (6.7)-(6.11) дополнены соотношением $[\rho_\alpha, \text{Tr}_R X] = 0$, где X — любой матричный многочлен от Ω и F . Пользуясь приемом из замечания 3.4 [P2], можно показать, что это соотношение является следствием формул (6.11).

будем рассматривать спектральное расширение алгебр дифференциального исчисления формальными рядами по переменным $x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha$. В расширенных таким образом алгебрах $\mathcal{DC}_{GL(n)}(R)$, $\mathcal{DC}_{SL(n)}(R)$ элемент

$$\Theta_{(t_1, t_2, t_3)} = \exp\left\{-\frac{i\pi}{2\tau} \sum_{\alpha=1}^n (t_1 x_\alpha^2 - t_2 y_\alpha^2 + t_3 z_\alpha^2)\right\} \quad (6.16)$$

задает 3-параметрическое семейство внутренних автоморфизмов,

$$\theta_{(t_1, t_2, t_3)} : u \mapsto \Theta_{(t_1, t_2, t_3)} u (\Theta_{(t_1, t_2, t_3)})^{-1} \quad \forall u \in \mathcal{DC}_{GL(n)}(R), \mathcal{DC}_{SL(n)}(R), \quad (6.17)$$

причем

$$\theta_L = \Theta_{(1,0,0)}, \quad \theta_K = \Theta_{(0,1,0)}, \quad \theta_F = \Theta_{(0,0,1)}. \quad (6.18)$$

Перейдем теперь к описанию гауссова разложения матриц генераторов производных Ли. При этом мы ограничимся рассмотрением алгебр $\mathcal{DC}_{GL(n)}(R_{(DJ)})$, $\mathcal{DC}_{SL(n)}(R_{(DJ)})$, конструируемыми с использованием R-матрицы Дринфельда-Джимбо (1.15). Дело в том, что процедура гауссова разложения матриц генераторов в настоящий момент разработана лишь для семейства алгебр уравнения отражений, связанных с этой R-матрицей. Далее во всех соотношениях этого раздела под R понимается $R_{(DJ)}$.

Следуя [FRT], введем две взаимно коммутативных пары RTT-алгебр, порождаемых компонентами верхне/нижне-треугольных матриц⁴

$$L^{(\pm)} = ||L^{(\pm)j}_i||_{i,j=1}^n, \quad K^{(\pm)} = ||K^{(\pm)j}_i||_{i,j=1}^n,$$

с соотношениями

$$\begin{aligned} R_1 L_2^{(\pm)} L_1^{(\pm)} &= L_2^{(\pm)} L_1^{(\pm)} R_1, & R_1 L_2^{(+)} L_1^{(-)} &= L_2^{(-)} L_1^{(+)} R_1, \\ R_1 K_2^{(\pm)} K_1^{(\pm)} &= K_2^{(\pm)} K_1^{(\pm)} R_1, & R_1 K_2^{(+)} K_1^{(-)} &= K_2^{(-)} K_1^{(+)} R_1, \\ (L^{(-)})^i_i (L^{(+)})^i_i &= (K^{(-)})^i_i (K^{(+)})^i_i = 1 \quad \forall i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (6.19)$$

В $SL(n)$ случае они дополняются условиями

$$\prod_{i=1}^n (L^{(\pm)})^i_i = 1, \quad \prod_{i=1}^n (K^{(\pm)})^i_i = 1. \quad (6.20)$$

Как известно, алгебра уравнения отражений может быть реализована в терминах пары таких верхне/нижне-треугольных RTT-алгебр (см. напр., [KSch],

⁴Напомним, что для R-матриц Дринфельда-Джимбо $n = \dim V = N$.

стр.345-347). Такая реализация называется *гауссовым разложением*. Для матриц производных Ли она имеет вид

$$L = q^{n-1/n}(L^{(-)})^{-1}L^{(+)}, \quad K = q^{n-1/n}K^{(+)}(K^{(-)})^{-1}. \quad (6.21)$$

Гауссово разложение можно непротиворечивым образом продолжить на алгебры $\mathcal{DC}_{GL(n)}(R)$, $\mathcal{DC}_{SL(n)}(R)$, то есть, доопределить перестановочные соотношения компонент треугольных матриц $L^{(\pm)}$, $K^{(\pm)}$ с компонентами всех матриц T , L , K , Ω и со спектральными переменными μ_α , ν_α , ρ_α (см., напр., [P2], раздел 4).

Для алгебр (6.19) известно отображение анти-инволюции унитарного типа (см., напр., [AF2])

$$(L^{(\pm)})^\dagger = (L^{(\mp)})^{-1}, \quad (K^{(\pm)})^\dagger = (K^{(\mp)})^{-1}. \quad (6.22)$$

Здесь символом " $\dagger$ " обозначена операция эрмитова сопряжения матриц — композиция антилинейного отображения анти-инволюции и матричного транспонирования. Для того, чтобы эта операция была совместна с алгебраическими соотношениями (6.19), достаточно выполнения условия

$$R^\dagger = PR^{-1}P. \quad (6.23)$$

Это соотношение верно для R -матриц Дринфельда-Джимбо, если параметр квантования q принадлежит единичной окружности в комплексной плоскости: $|q| = 1$.

Основным результатом этого раздела является обобщение операции $\dagger$ для алгебр дифференциального исчисления на линейных квантовых группах.

Теорема 6.3. *Для спектрального расширения алгебры дифференциального исчисления $\mathcal{DC}_{GL(n)}(R)$, построенного по R -матрице Дринфельда-Джимбо (1.15) при значении параметра деформации $q = e^{2\pi i\tau}$, $\tau \in \mathbb{R}$, отображение $\dagger$ (6.22) доопределим формулами*

$$\mu_\alpha^\dagger = \mu_\alpha^{-1}, \quad \nu_\alpha^\dagger = \nu_\alpha^{-1}, \quad \rho_\alpha^\dagger = \rho_\alpha^{-1}, \quad (6.24)$$

$$L^\dagger = q^{1/n-n}L^{(-)}(L^{(+)})^{-1}, \quad (6.25)$$

$$K^\dagger = q^{1/n-n}(K^{(+)})^{-1}K^{(-)}, \quad (6.26)$$

$$T^\dagger = q^{n-1/n}(K^{(-)})^{-1}\Theta_{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})}(T^{-1})(L^{(-)})^{-1}, \quad (6.27)$$

$$(\Omega^g)^\dagger = -L^{(-)}\Theta_{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})}(F^{-1}\Omega^g)(L^{(-)})^{-1}, \quad (6.28)$$

$$F^\dagger = L^{(-)}\Theta_{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})}(F^{-1})(L^{(-)})^{-1}, \quad (6.29)$$

где автоморфизм $\Theta_{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})}$ задается в (6.16), (6.17).

Антилинейный анти-гомоморфизм алгебры $\dagger$, заданный на генераторах формулами (6.24)-(6.29), является анти-инволюцией: $\dagger^2 = id$.

Ограничение $\dagger$ на спектральное расширение подалгебры $\mathcal{DC}_{SL(n)}(R)$ является инволютивным антигомоморфизмом двух подалгебр, генераторами правоинвариантных 1-форм в которых являются, соответственно, Ω (5.12) и $\Omega^\dagger$:

$$\Omega^\dagger = (\Omega^g)^\dagger - \frac{q^n}{n_q} \text{Tr}_{R_{op}}(\Omega^g)^\dagger I, \quad \text{Tr}_{R_{op}}(\Omega^g)^\dagger = -\text{Tr}_R(F^{-1}\Omega^g), \quad (6.30)$$

где $R_{op} = PRP$.

7 Факторизованное представление для решений квантовых уравнений Книжника-Замолодчикова

В этом разделе мы обсудим еще одну область применения R-матричной техники — ее приложение в исследовании решений квантовых уравнений Книжника-Замолодчикова.

Квантовые (иначе называемые q-деформированными или разностными) уравнения Книжника-Замолодчикова (qKZ) впервые появились в литературе, как уравнения на форм-факторы и корреляционные функции интегрируемых квантовополевых и статфизических моделей [Sm, JM]. В математике эти уравнения возникают при изучении представлений аффинных квантовых групп [FR] и аффинных (двойных) алгебр Гекке [Ch2]. С момента открытия, пожалуй, основное внимание исследователей уделялось решениям уравнений qKZ, связанным с тензорными произведениями представлений аффинных квантовых групп и алгебр Гекке (см. обзор [EFK] и ссылки в нем).

Новая область приложения уравнений qKZ открылась в связи с обнаружением А.Разумовым и Ю.Строгановым замечательных проявлений комбинаторики знакопеременных матриц и плоских разбиений в свойствах основных состояний спиновой цепочки XXZ [RS1], правда, в ее неэрмитовом режиме. В дальнейшем гипотезы Разумова-Строганова получили полноценную физическую интерпретацию в приложении к $O(1)$ модели петель [BGN, RS2] и к модели стохастического процесса ‘Raise and Peel’ [dG-R, P-N]. Связь наблюдений Разумова-Строганова с уравнениями qKZ была установлена В.Паскье, Ф. Ди Франческо и П.Зинн-Жюстеном [Pa, DFZ1], что позволило обосновать некоторые из наблюдений Разумова-Строганова, а также получить новые ре-

зультаты о взвешенных перечислениях знакопеременных матриц и плоских разбиений (см., напр., [KP, DF2, DFZ2]).

В контексте гипотезы Разумова-Строганова рассматриваются решения уравнений qKZ, связанные с неприводимыми представлениями алгебр Темперли-Либа⁵ на путях Дика и их обобщениях. В настоящем разделе мы получим факторизованные выражения для таких решений. Мы рассмотрим случай уравнений qKZ на открытом сегменте с граничными условиями двух типов, обозначаемых ниже символами A и B. Для граничных условий типа A подобные выражения были получены ранее А. Кирилловым и А. Ласку при исследовании элементов Каждана-Люстига для грассманианов [KL]. Отметим, что применение факторизованных формул позволило сделать новые наблюдения о свойствах стационарных состояний модели ‘Raise and Peel’, и получить новые результаты по связи решений qKZ с перечислительной комбинаторикой плоских разбиений и знакопеременных матриц и с решениями дискретных уравнений Хироты (см. [P1, APR, dGPZ]).

При формулировке уравнений qKZ нам потребуются базовые сведения об алгебрах Темперли-Либа и их представлениях.

Определение 7.1. *Алгебра Темперли-Либа $\mathcal{T}_L^A(q)$ типа A — это фактор-алгебра алгебры Гекке $\mathcal{H}_L(q)$ по соотношению $a^{(3)} = 0$ (см. (1.12)). Нам будет удобно задавать ее в терминах новых генераторов e_i , связанных с артиновыми генераторами g_i соотношениями*

$$e_i = g_i - q1 \quad \forall i = 1, \dots, L-1.$$

В терминах нового набора генераторов правила умножения в $\mathcal{T}_L^A(q)$ задаются соотношениями

$$\begin{aligned} e_i^2 &= \tau e_i, \quad \tau = -[2]_q, \quad e_i e_{i \pm 1} e_i = e_i, \\ e_i e_j &= e_j e_i \quad \forall i, j = 1, \dots, L-1 : |i-j| > 1, \end{aligned} \quad (7.1)$$

Алгебра Темперли-Либа $\mathcal{T}_L^B(q, \omega)$ типа B получается расширением алгебры $\mathcal{T}_L^A(q)$ добавлением генератора e_0 , удовлетворяющего соотношениям

$$e_0^2 = -\frac{[\omega]_q}{[\omega+1]_q} e_0, \quad e_1 e_0 e_1 = e_1, \quad e_0 e_i = e_i e_0 \quad \forall i = 2, \dots, L-1. \quad (7.2)$$

Здесь $\omega \in \mathbb{Q}$ — параметр, такой что $[\omega+1]_q \neq 0$.

⁵ Алгебры Темперли-Либа — фактор-алгебры алгебр Гекке, чьи R-матричные представления связаны двойственностью Шура-Вейля с представлениями квантовой группы $U_q(sl_2)$.

Мы будем пользоваться графическим представлением этих алгебр, в котором генераторам e_i и e_0 сопоставляются, соответственно квадратики и треугольники,двигающиеся свободно вдоль вертикальных линий. Позиция этих линий на оси абсцисс задается индексом соответствующего генератора:

$$e_i = \begin{array}{c} \diamond \\ \vdots \\ i \end{array}, \quad e_0 = \begin{array}{c} \triangle \\ \vdots \\ 0 \end{array}. \quad (7.3)$$

Нетривиальные соотношения алгебр Темперли-Либа (7.1) и (7.2) в графическом представлении имеют вид, соответственно:

$$-\frac{1}{[2]_q} \begin{array}{c} \diamond \\ \diamond \\ \vdots \\ i \end{array} = \begin{array}{c} \diamond \quad \diamond \\ \vdots \quad \vdots \\ i-1 \quad i \end{array} = \begin{array}{c} \diamond \quad \diamond \\ \vdots \quad \vdots \\ i \quad i+1 \end{array} = \begin{array}{c} \diamond \\ \vdots \\ i \end{array}, \quad (7.4)$$

и

$$\begin{array}{c} \triangle \\ \triangle \\ \vdots \\ 0 \end{array} = -\frac{[\omega]_q}{[\omega+1]_q} \begin{array}{c} \triangle \\ \vdots \\ 0 \end{array}, \quad \begin{array}{c} \diamond \quad \diamond \\ \diamond \quad \diamond \\ \vdots \quad \vdots \\ 0 \quad 1 \end{array} = \begin{array}{c} \diamond \\ \vdots \\ 1 \end{array}. \quad (7.5)$$

Рассмотрим левые идеалы в алгебрах Темперли-Либа, порождаемые проекторами следующего вида

$$\mathcal{T}_L^A(q) : \quad I_L^A = e_1 e_3 \cdots e_{2[\frac{L}{2}]-1}, \quad (7.6)$$

$$\mathcal{T}_L^A(q) : \quad I_L^B = \begin{cases} e_1 e_3 \cdots e_{L-1}, & \text{если } L \text{ нечетно,} \\ e_0 e_2 \cdots e_L, & \text{если } L \text{ четно.} \end{cases} \quad (7.7)$$

Проекторы I_L^A, I_L^B примитивны, и в порождаемых ими идеалах реализуются неприводимые представления алгебр $\mathcal{T}_L^A(q), \mathcal{T}_L^B(q, \omega)$, соответственно. Графически базисные элементы этих представлений можно представлять в виде путей Дика (Dyck paths) и кривых голосования (ballot paths).

Определение 7.2. Путем Дика α длины L называется последовательность $L+1$ неотрицательных целых чисел $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_L)$ такая, что $\alpha_0 = 0$, $\alpha_{i+1} - \alpha_i = \pm 1$ и $\alpha_L = 0/1$ при L четном/нечетном.

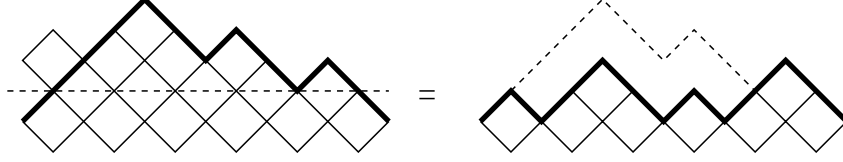


Рис. 1: Действие генератора e_1 на элементе $|\alpha\rangle = e_4(e_3e_5e_7)(e_2e_4e_6e_8e_{10})I_{12}^A$: $e_1|\alpha\rangle = e_4e_{10}I_{12}^A$.

Кривой голосования α длины L называется последовательность $L + 1$ неотрицательных целых чисел $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_L)$ такая, что $\alpha_L = 0$ и $\alpha_{i+1} - \alpha_i = \pm 1$.

Множества путей Дика и кривых голосования длины L будем обозначать $\mathcal{D}_L^A$ и $\mathcal{D}_L^B$, соответственно.

Каждому пути Дика α (каждой кривой голосования β) длины L взаимнооднозначно сопоставляется элемент линейного базиса идеала $|\alpha\rangle$ ($|\beta\rangle$), порожденного проектором I_L^A (I_L^B), по правилу, которое иллюстрируется рисунками:

$\alpha\rangle =$ $\alpha = (0, 1, 2, 3, 4, 3, 2, 3, 2, 1, 2, 1),$ $\alpha\rangle = e_4(e_3e_5e_7)(e_2e_4e_6e_8e_{10})I_{11}^A,$	$\beta\rangle =$ $\beta = (3, 2, 1, 2, 3, 2, 3, 2, 1, 2, 1, 0),$ $\beta\rangle = (e_0e_4e_6)(e_1e_3e_5e_7e_9)I_{11}^B.$
--	---

Действие генераторов e_i , $i \geq 0$, на элементах w_α графически представляется как процесс осаждения квадратов или треугольников на профиль, задаваемый путем Дика, или кривой голосования. Он может привести к росту профиля (падение в точку локального минимума), отражению от поверхности профиля (падение в точку локального максимума), или к лавинообразному осыпанию профиля (падение на склон, см. Рис.1). Такое графическое представление позволяет интерпретировать действие алгебр Темперли-Либ в представлениях на путях Дика (кривых голосования) как стохастический процесс роста одномерной пленки на сегменте с различными видами граничных условий (см., напр., [P1]).

Рассмотрим пространства векторов $|\Psi\rangle^A$ и $|\Psi\rangle^B$, представляющих из себя линейные комбинации базисных элементов $|\alpha\rangle$ в представлении на путях Дика (тип A), или на кривых голосования (тип B) с коэффициентами

ψ_α , принимающими значения в кольце формальных рядов от L переменных $q^{\pm x_i}$, $i = 1, 2, \dots, L$:

$$|\Psi(x_1, \dots, x_L)\rangle^{A/B} = \sum_{\alpha \in \mathcal{D}_L^{A/B}} \psi_\alpha(x_1, \dots, x_L) |\alpha\rangle.$$

Уравнения qKZ на сегменте с граничными условиями типа A/B — это система разностных уравнений на коэффициенты вектора $|\Psi\rangle^{A/B}$:

$$R_i(x_i - x_{i+1})|\Psi\rangle^{A/B} = \pi_i|\Psi\rangle^{A/B} \quad \forall i = 1, \dots, L-1, \quad (7.8)$$

$$K_0^{A/B}(-x_1)|\Psi\rangle^{A/B} = \pi_0|\Psi\rangle^{A/B}, \quad (7.9)$$

$$|\Psi\rangle^{A/B} = \pi_L|\Psi\rangle^{A/B}. \quad (7.10)$$

В правых частях этих уравнений присутствуют операторы π_i , $0 \leq i \leq L$, действующие перестановками или отражениями на аргументах коэффициентных функций ψ_α :

$$\begin{aligned} \pi_i \psi_\alpha(\dots, x_i, x_{i+1}, \dots) &= \psi_\alpha(\dots, x_{i+1}, x_i, \dots), \\ \pi_0 \psi_\alpha(x_1, \dots) &= \psi_\alpha(-x_1, \dots), \quad \pi_N \psi_\alpha(\dots, x_L) = \psi_\alpha(\dots, -\lambda - x_L). \end{aligned}$$

Здесь $\lambda \in \mathbb{C}$ — параметр, связанный с характеристикой уравнений qKZ , называемой его уровнем (см. [EFK]).

В левых частях уравнений присутствуют операторы $R_i(u)$ и $K_0(u)$, являющиеся бакстеризациями генераторов алгебр Темперли-Либа e_i и e_0 , соответственно. $R_i(u)$ подобны элементам $g_i(x)$ (1.9), уже встречавшимся ранее при обсуждении квантовых матричных алгебр. Они удовлетворяют аддитивным версиям уравнений Янга-Бакстера (1.10) и соотношений унитарности (1.11). $K_0(u)$ также удовлетворяет аддитивному варианту уравнений отражения со спектральным параметром и соотношениям унитарности (см. [dGP]). Все упомянутые уравнения на $R_i(u)$ и $K_0(u)$ являются условиями совместности для уравнений qKZ .

Явные выражения для операторов $R_i(u)$ и $K_0(u)$ имеют вид

$$\begin{aligned} R_i(u) &= \frac{[1-u]_q - [u]_q e_i}{[1+u]_q}, \\ K_0^A(u) &= 1, \quad K_0^B(u) = \frac{k(u, \delta) + [2u]_q [\omega + 1]_q e_0}{k(-u, \delta)}, \\ k(u, \delta) &= [\frac{\omega+\delta}{2} + u]_q [\frac{\omega-\delta}{2} + u]_q. \end{aligned} \quad (7.11)$$

Здесь $\delta \in \mathbb{Q}$ — еще один параметр, влияющий на поведение вектора $|\Psi\rangle^B$ на левой границе сегмента.

Соотношения (7.8)-(7.10) являются представлением уравнений qKZ в виде удобном для физических приложений. При построении факторизованных формул для их решений полезным оказывается следующее алгебраическое представление.

Утверждение 7.3. *Соотношения (7.8) и (7.9) типа B эквивалентны образом можно переписать в виде*

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{D}_L^{A/B}} \psi_\alpha(x_1, \dots, x_L) (e_i | \alpha) = \sum_{\alpha \in \mathcal{D}_L^{A/B}} (T_i - q1) \psi_\alpha(x_1, \dots, x_L) | \alpha, \quad (7.12)$$

и

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{D}_L^B} \psi_\alpha(x_1, \dots, x_L) (e_0 | \alpha) = \sum_{\alpha \in \mathcal{D}_L^B} \left(\frac{T_0 + q^{-\omega} 1}{q^{\omega+1} - q^{-\omega-1}} \right) \psi_\alpha(x_1, \dots, x_L) | \alpha. \quad (7.13)$$

Здесь операторы T_i , T_0 , реализующие представление алгебр Гекке типов A и B на пространстве формальных рядов от переменных $q^{\pm x_i}$, $i = 1, 2, \dots, L$, даются формулами

$$T_i = q - \frac{1}{[x_i - x_{i+1}]_q} (\pi_i - 1) [x_{i+1} - x_i + 1]_q \quad (7.14)$$

$$T_0 = -q^{-\omega} + (\pi_0 + 1) \frac{(q - q^{-1}) k(-x_1, \delta)}{[2x_1]_q}. \quad (7.15)$$

Примечание. Приведенная алгебраическая формулировка уравнений qKZ рассматривалась в [Pa]. Операторы T_0 и T_i введены в рассмотрение в работе М. Ноуми [N]. T_i , $i > 0$, также известны как операторы Демазюра-Люстига [Ch2].

Мы рассмотрим, в первую очередь, условия, накладываемые уравнениями qKZ на коэффициенты при базисных элементах $|\Omega^A\rangle$ и $|\Omega^B\rangle$, соответствующих единственному пути Дика и кривой голосования, не имеющим локальных минимумов внутри сегмента:

$$\Omega^A = (0, 1, \dots, \lfloor \frac{L-1}{2} \rfloor, \lfloor \frac{L+1}{2} \rfloor, \lfloor \frac{L-1}{2} \rfloor, \dots, L \pmod{2}), \quad \Omega^B = (L, L-1, \dots, 1, 0).$$

Последующие результаты демонстрируют, что $|\Omega^A\rangle$ и $|\Omega^B\rangle$ играют роль старших векторов в представлениях на путях Дика и на кривых голосования, соответственно

Обозначим символами $\Delta_\mu^\pm$ следующие функции:

$$\Delta_\mu^\pm(x_k, \dots, x_m) := \prod_{k \leq i < j \leq m} [\mu + x_i \pm x_j]_q,$$

где $\mu \in \mathbb{Q}$ — параметр.

Утверждение 7.4. Коэффициенты ψ_Ω^A и ψ_Ω^B , стоящие при старших векторах $|\Omega^A\rangle$ и $|\Omega^B\rangle$ в решениях уравнений qKZ (7.8)-(7.10) $|\Psi\rangle^A$ и $|\Psi\rangle^B$, имеют вид

$$\begin{aligned} \psi_\Omega^A(x_1, \dots, x_L) &= \Delta_1^-(x_1, \dots, x_\ell) \Delta_{-1}^+(x_1, \dots, x_\ell) \Delta_1^-(x_{\ell+1}, \dots, x_L) \\ &\quad \Delta_{\lambda+1}^+(x_{\ell+1}, \dots, x_L) \xi^A(x_1, \dots, x_\ell | x_{\ell+1} + \frac{\lambda}{2}, \dots, x_L + \frac{\lambda}{2}), \end{aligned} \quad (7.16)$$

$$\begin{aligned} \psi_\Omega^B(x_1, \dots, x_L) &= \Delta_1^-(x_1, \dots, x_L) \Delta_{\lambda+1}^+(x_1, \dots, x_L) \\ &\quad \xi^B(x_1 + \frac{\lambda}{2}, \dots, x_L + \frac{\lambda}{2}). \end{aligned} \quad (7.17)$$

Здесь $\ell = \lfloor (L+1)/2 \rfloor$; $\xi^A(x_1, \dots, x_\ell | x_{\ell+1}, \dots, x_L)$ — четная симметрическая функция отдельно по каждому из наборов переменных x_i , $1 \leq i \leq \ell$ и x_j , $\ell+1 \leq j \leq L$; $\xi^B(x_1, \dots, x_L)$ — четная симметрическая функция по всем переменным x_i , $1 \leq i \leq L$.

Для каждого пути Дика (кривой голосования) α рассмотрим процедуру его дополнения до старшего пути Ω^A (старшей кривой Ω^B) с добавлением клеток — квадратиков или треугольников. В каждую добавляемую клетку будем помещать натуральное число $u_{i,j}$ — ее *контент*, где i и j — горизонтальная и вертикальная координаты клетки. Правило вычисления контента $u_{i,j}$ клетки таково:

- $u_{i,j} = 1$ если клетка попадает в локальный минимум пути Дика (кривой голосования) α ;
- иначе полагаем $u_{i,j} = \max\{u_{i+1,j-1}, u_{i-1,j-1}\} + 1$, где $u_{i\pm 1,j-1}$ — контенты ранее добавленных клеток, на которые опирается добавляемая клетка.

Примеры графического представления процедуры см. на Рис. 2, 3 внизу.

С помощью этой процедуры сопоставим каждому пути Дика (кривой голосования) α оператор H_α

$$H_\alpha = \prod_{i,j}^{\nearrow u} T_i(u_{ij}). \quad (7.18)$$

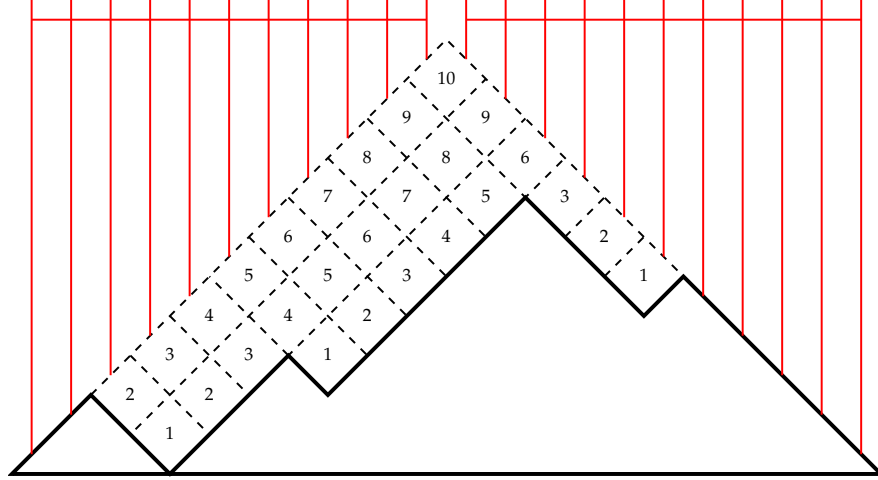


Рис. 2: Для пути Дика $(0, 1, 2, 1, 0, 1, 2, 3, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 6, 5, 4, 5, 4, 3, 2, 1, 0)$ добавленные клетки нарисованы прерывистыми линиями. Контенты клеток размещены в них.

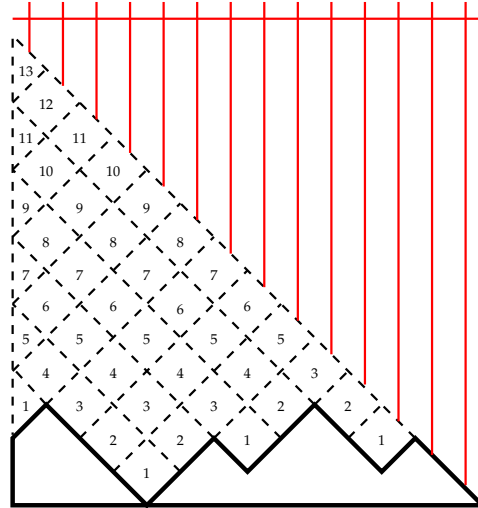


Рис. 3: Для кривой голосования $(2, 3, 2, 1, 0, 1, 2, 1, 2, 3, 2, 1, 2, 1, 0)$ добавленные клетки нарисованы прерывистыми линиями. Контенты клеток размещены в них.

Здесь $T_i(u)$ — бакстеризованные версии операторов T_i (7.19), (7.20)⁶

$$T_i(u) = \frac{q^{-u}}{[u]_q} + T_i = \frac{[x_i - x_{i+1} + u]_q}{[u]_q [x_i - x_{i+1}]_q} - \frac{[x_i - x_{i+1} + 1]_q}{[x_i - x_{i+1}]_q} \pi_i, \quad (7.19)$$

$$T_0(u) = \frac{1}{(q^{\omega+1} - q^{-\omega-1})} \left(T_0 + q^{\omega} - \frac{(q - q^{-1})[u/2]_q [\omega + \lfloor (u+1)/2 \rfloor]_q}{[u]_q} \right). \quad (7.20)$$

а произведение берется по всем добавленным к пути Дика (кривой голосования) α клеткам, причем сомножители упорядочиваются так, чтобы их аргументы $u_{i,j}$ не убывали при чтении слева-направо.⁷

⁶ $T_i(u)$, $i > 0$, — это перемасштабированные версии бакстеризованных элементов $g_i(q^{2u})$ (1.9).

⁷Отметим, что множители с совпадающими аргументами коммутативны.

Теперь мы готовы представить основной результат настоящего раздела — факторизованные выражения для решений уравнений qKZ.

Теорема 7.5. *[KL, dGP] Для коэффициентов ψ_α решений уравнений qKZ (7.8)-(7.10) справедливо представление*

$$\psi_\alpha = H_\alpha \psi_\Omega^{A/B}. \quad (7.21)$$

Здесь $\psi_\Omega^{A/B}$ — коэффициенты, стоящие при старших векторах $|\Omega^{A/B}\rangle$ (7.16), (7.17), а факторизованные операторы H_α для путей Дика (гран. условия типа A) и для кривых голосования (гран. условия типа B) вычисляются с использованием правила (7.18) (см. иллюстрации на Рис.2,3).

В задаче с граничными условиями типа A, обозначим $\beta(k)$, $k = 1, \dots, \lfloor \frac{L}{2} \rfloor$, путь длины L , имеющий единственный минимум в точке с абсциссой $2k-1$ и ординатой -1 (см. иллюстрацию на Рис.4). Аналогично, в задаче с граничными условиями типа B, обозначим $\beta(k)$, $k = 1, \dots, \lfloor \frac{L+1}{2} \rfloor$, кривую длины L , имеющую единственный минимум в точке с абсциссой $2k - \epsilon_L - 1$, $\epsilon_L = L \pmod{2}$, и ординатой -1 (см. иллюстрацию на Рис.5). Обозначим символом $H_{\beta(k)}$ факторизованный оператор, сопоставляемый пути (кривой) $\beta(k)$ согласно правилу (7.18).

Коэффициенты $\psi_\Omega^{A/B}$, стоящие при старших векторах $|\Omega^{A/B}\rangle$ в решениях уравнений qKZ, удовлетворяют следующим условиям

$$H_{\beta(k)} \psi_\Omega^{A/B} = 0 \quad \forall k. \quad (7.22)$$

Условия (7.22) вместе с формулами (7.16), (7.17), (7.21), эквивалентны системе уравнений qKZ (7.8)-(7.10).

Примечание. При специальных значениях параметров λ и ω известны простые решения уравнений qKZ:

- при $\lambda = -3$ задача с граничными условиями типа A имеет решение $\xi^A = 1$ (см. (7.16)) [DF1];
- при $\lambda = -3/2$ и $\omega = -1/2$ задача с граничными условиями типа B имеет решение $\xi^B = 1$ (см. (7.17)) [ZJ].

Эти решения используются при анализе характеристик стационарных состояний модели стохастического процесса "Raise and Peel" (см. [DF1, ZJ, dGP, dGPZ] и ссылки в них).

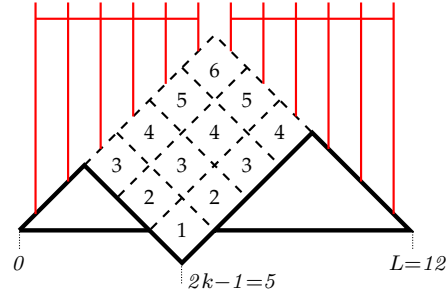


Рис. 4: Путь $\beta(3)$ длины $L = 12$ выделен жирной линией. Он не является путем Дика. Клетки, дополняющие его до старшего пути Дика нарисованы пунктирными линиями. В клетках проставлены их контенты. Соответствующий факторизованный оператор $H_{\beta(3)}$ строится по правилу (7.18).

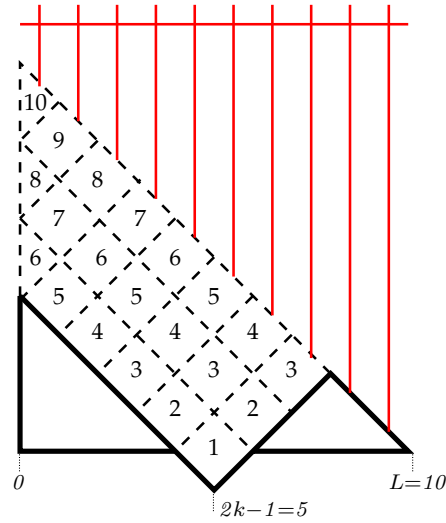


Рис. 5: Кривая $\beta(3)$ длины $L = 10$ выделена жирной линией. Она не является кривой голосования. Клетки, дополняющие ее до старшей кривой голосования нарисованы пунктирными линиями вместе с проставленными в них контентами. Соответствующий факторизованный оператор $H_{\beta(3)}$ строится по правилу (7.18).

8 Основные результаты диссертации

На защиту выносятся следующие результаты.

- Определение семейства квантовых матричных алгебр типа $GL(n)$ и доказательство структурных результатов для этих алгебр. Определение 1.2 дано в статье [4] из приводимого ниже списка. Q-обобщения соотношений Ньютона между двумя наборами генераторов характеристических подалгебр КМ-алгебр – степенных сумм и элементарных симметрических многочленов – в различной степени общности выводятся в статьях [1,3,4] (см. Утверждение 2.2). Q-обобщение теоремы Гамильтона-Кэли

доказывается в работах [3,4] (см. Теорему 2.3).

- Определение спектрального расширения для алгебр гейзенбергова дубля типа $SL(n)$ (см. Определение-теорему 3.5); представление спектрально расширенного гейзенбергова дубля в терминах матриц-генераторов W^α и спектральных переменных μ_α , и построение двух семейств динамических R-матриц типа $SL(n)$ (см. Теорему 3.6). Эти результаты получены в работе [7].
- Построение оператора эволюции для квантовой модели q-деформированного волчка Эйлера (модель Алексеева-Фаддеева) проведено в [7] (см. Теорему 4.3).
- Определение алгебр дифференциального исчисления на квантовых группах типов $GL(n)$ и $SL(n)$ (см. Определение-теорему 5.1) и построение отображения внешнего дифференцирования на этих алгебрах (см. Теорему 5.2) дается в работах [2,10].
- Построение спектральных расширений для квантованных алгебр дифференциального исчисления типов $GL(n)$, $SL(n)$ (см. Определение-теорему 6.1) и построение отображения антиинволюции унитарного типа на квантованных алгебрах дифференциального исчисления типа $GL(n)$ (см. Теоремы 6.2, 6.3) проводится в [10].
- Факторизованные выражения для решения квантовых уравнений Книжника-Замолотчикова, связанных с представлениями алгебр Темперли-Либа на путях Дика и на кривых голосования (см. Теорему 7.5) получены в работе [9].

9 Список публикаций

Список представляемых к защите статей.

1. P. Pyatov, P. Saponov,
'Characteristic relations for quantum matrices'.
Journ. Phys. A: Math.Gen. **28** (1995) 4415–4421.
2. P. Pyatov, L. Faddeev,
'The differential calculus on quantum linear groups'.
In *'Contemporary Mathematical Physics'*. Eds. R.L.Dobrushin, A.Minlos,

- M.A.Shubin and A.M.Vershik, Amer. Math. Soc. Transl. - Ser.2, **175** (1996) 35–47.
3. D. I. Gurevich, P.N. Pyatov and P. A. Saponov,
‘Hecke Symmetries and Characteristic Relations on Reflection Equation Algebras’.
 Letters in Mathematical Physics **41** (1997) 255–264.
 4. A. Isaev, O. Ogievetsky, P. Pyatov,
‘On quantum matrix algebras satisfying the Cayley-Hamilton-Newton identities’.
 J. Phys. A: Math. Gen. **32** (1999) L115–L121.
 5. P. Pyatov,
‘Raise and Peel Models of fluctuating interfaces and combinatorics of Pascal’s hexagon’.
 J. Stat. Mech.: Theor. Exp. **09** (2004) P003.
 6. F.C.Alcaraz, P.Pyatov, V.Rittenberg,
‘Density profiles in the raise and peel model with and without a wall. Physics and combinatorics’.
 J. Stat. Mech.: Theor. Exp., (2008) P01006.
 7. A. Isaev, P. Pyatov,
‘Spectral extension of the quantum group cotangent bundle’.
 Commun. Math. Phys. **288** (2009) no.3, 1137–1179.
 8. J. de Gier, P. Pyatov, P. Zinn-Justin,
‘Punctured plane partitions and the q -deformed Knizhnik–Zamolodchikov and Hirota equations’.
 J.Comb. Theory Ser. A **116** (2009) 772–794.
 9. J. de Gier, P. Pyatov,
‘Factorised solutions of Temperley-Lieb q KZ equations on a segment’.
 Adv. Theor. Math. Phys. **14** (2010) 795–877.
 10. P.Pyatov,
‘On the construction of unitary quantum group differential calculus’.
 J. Phys. A: Math. Theor. **49** (2016) 415202 (25pp).

10 Дальнейшее развитие и приложения

В заключение мы кратко перечислим недавние продвижения в направлении исследований диссертационной работы и обсудим перспективы дальнейших исследований.

Исследования структуры характеристической подалгебры и доказательство q -аналога теоремы Гамильтона-Кэли для квантовых матричных алгебр типа $GL(m|n)$ проведено в работах [GPS2, GPS3]. Этот тип КМ-алгебр вместе с алгебрами $GL(n)$ типа исчерпывает все известные серии КМ-алгебр, связанные с геккевскими R -матрицами. Полученные результаты обобщают и объединяют исследования Кантора и Тришина по характеристическим тождествам для матричных супералгебр [KT1, KT2] и Джарвиса, Грина, Гулда с соавторами по характеристическим тождествам в универсальных обертывающих супералгебрах Ли [JG, GJ, Gou2].

Исследования характеристических тождеств КМ-алгебр типа Бирман-Мураками-Венцля (BMW), связанных с квантовыми ортогональными и симплектическими группами, предприняты в [OP]. В классическом пределе эти результаты переходят в характеристические тождества для генераторов ортогональных и симплектических алгебр Ли (см. [Gou1, Mol]). Для случая квантовых универсальных обертывающих алгебр Дринфельда-Джимбо характеристические тождества рассматривались в работе [MRS], а их образы в представлениях старшего веса изучались в [Mudr]. В настоящее время неизвестен аналог теоремы Гамильтона-Кэли для серии орто-симплектических КМ-алгебр. Предварительная работа в этом направлении, связанная с изучением структуры характеристических подалгебр КМ-алгебр типа BMW проделана в [OP].

В работах [GS1, DM1, DM2, GS2] тождества Гамильтона-Кэли в факторизованном виде применялись для явного квантования полупростых орбит коприсоединенного действия $GL(n)$ и линейных расслоений над ними.

Еще одно направление приложений q -версий соотношений Ньютона и теоремы Гамильтона-Кэли — построение явных PBW-упорядоченных выражений для генераторов центра алгебр уравнения отражений (см. [JW, Fl]).

В исследованиях гейзенбергова дубля над квантовыми группами процедура спектрального расширения алгебры, позволяющая строить семейства динамических R -матриц, а также изучать и применять для построения динамических моделей серии автоморфизмов этих алгебр, в настоящее время реализована лишь для алгебр типов $GL(n)$ и $SL(n)$. Интересно было бы ре-

ализовать эту процедуру для алгебр типов $GL(m|n)$, $O(n)$, $Sp(2n)$, а также построить $SL(m|n)$ и $SO(n)$ редукции таких гейзенберговских дублей.

Еще одним перспективным направлением применения техники спектрального расширения гейзенбергова дубля могло бы стать ее приложение в реализации квантовой версии пуассоновой редукции и изучении получаемых с ее помощью квантовых интегрируемых моделей (см. [АКО]).

Что касается исследований факторизованных выражений для решений уравнений qKZ, их естественной областью приложений стали исследования комбинаторных свойств стационарных свойств модели стохастического процесса Raise and Peel (смю [P1, M-B, dGP, dGPZ, APR]). На наш взгляд, интересным было бы также выяснить отношение связанных со стохастической моделью ASEP (Asymmetric Simple Exclusion Process) полиномиальных решений уравнений qKZ с факторизованными формулами. Эти решения для соответствующих граничных условий на сегменте, а также их связь с несимметричными многочленами Коорнвиндера обсуждались в работах [C-W, FV].

Список литературы

- [AF1] Alekseev, A.Yu. and Faddeev, L.D., ‘ $(T^*G)_t$: A Toy Model For Conformal Field Theory’. Commun. Math. Phys. **141** (1991) no.2, 413–422.
- [AF2] Alekseev, A.Yu. and Faddeev, L.D., ‘An involution and dynamics for the q deformed quantum top’. J. Math. Sci. **77** (1995) 3137–3145.
- [AIP] Arutyunov, G.E., Isaev, A.P., Popowicz, Z.: ‘Poincare-Birkhoff-Witt property for bicovariant differential algebras on simple quantum groups’. J. Phys. A: Math. Gen. **28** (1995) no.15, 4349–4359.
- [АКО] Arutyunov, G., Klabbers, R., Olivucci, E., ‘Quantum Trace Formulae for the Integrals of the Hyperbolic Ruijsenaars-Schneider model’. J. High Energ. Phys. 2019, **69** (2019). [https://doi.org/10.1007/JHEP05\(2019\)069](https://doi.org/10.1007/JHEP05(2019)069)
- [APR] Alcaraz, F.C., Pyatov, P. and Rittenberg, V., ‘Density profiles in the raise and peel model with and without a wall. Physics and combinatorics’. J. Stat. Mech.: Theor. Exp., (2008) P01006.

- [BGN] Batchelor, M.T., de Gier, J., Nienhuis, B., ‘*The quantum symmetric XXZ chain at $\Delta = -1/2$, alternating sign matrices and plane partitions*’. J. Phys. A: Math. Gen. **34** (2001) L265–L270.
- [CG] Cremmer, E. and Gervais, J.-L., ‘*The quantum group structure associated with non-linearly extended Virasoro algebras*’. Comm. Math. Phys. **134** (1990) 619–632.
- [Ch1] Cherednik, I.V., ‘*Factorizing particles on a half line and root systems*’. Theor. Math. Phys. **61**, no.1 (1984) 977–983.
- [Ch2] Cherednik, I., ‘*Double affine Hecke algebras*’. London Mathematical Society Lecture Notes Series **319**, Cambridge University Press, Cambridge, 2005.
- [C-W] Cantini, L., Garbali, A., de Gier, J., Wheeler, M., ‘*Koornwinder polynomials and the stationary multi-species asymmetric exclusion process with open boundaries*’. J. Phys. A: Math. Theor. **49** (2016) 444002 (32pp).
- [D1] Drinfeld, V.G., ‘*Quantum Groups*’. In Proceedings of the Intern. Congress of Mathematics, Vol. 1 (Berkeley, 1986), pp. 798–820, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987. For the expanded version see Journ. of Math. Sciences **41**, no.2 (1988) 898–915.
- [D2] Drinfeld, V.G., ‘*On almost cocommutative Hopf algebras*’. Leningrad Math. J. **1**, no.2 (1990) 321–342.
- [DF1] Di Francesco, P., ‘*Boundary q KZ equation and generalized Razumov-Stroganov sum rules for open IRF models*’. J. Stat. Mech.: Theor. Exp. (2005) P09004.
- [DF2] Di Francesco, P., ‘*Totally Symmetric Self Complementary Plane Partitions and the quantum Knizhnik-Zamolodchikov equation: a conjecture*’. J. Stat. Mech.: Theor. Exp. (2006) P09008.
- [DFZ1] Di Francesco, P., Zinn-Justin, P., ‘*Quantum Knizhnik-Zamolodchikov equation, generalized Razumov-Stroganov sum rules and extended Joseph polynomials*’. J. Phys. A: Math. Gen. **38** (2005) L815–L822.
- [DFZ2] Di Francesco, P., Zinn-Justin, P., ‘*Quantum Knizhnik-Zamolodchikov equation: reflecting boundary conditions and combinatorics*’. J. Stat. Mech.: Theor. Exp. (2007) P12009.

- [dG-R] de Gier, J., Nienhuis, B., Pearce, P.A., Rittenberg, V., ‘*The raise and peel model of a fluctuating interface*’. J. Stat. Phys. **114** (2004) 1–35.
- [dGP] de Gier, J., Pyatov, P., ‘*Factorised solutions of Temperley-Lieb q KZ equations on a segment*’. Adv. Theor. Math. Phys. **14** (2010) 795–877.
- [dGPZ] de Gier, J., Pyatov, P. and Zinn-Justin, P., ‘*Punctured plane partitions and the q -deformed Knizhnik–Zamolodchikov and Hirota equations*’. J. Comb. Theory Ser. A **116** (2009) 772–794.
- [DM1] Donin, J. and Mudrov, A., ‘ *$U_q(\mathfrak{sl}(n))$ -covariant quantization of symmetric coadjoint orbits via reflection equation algebra*’. Contemp. Math. **315** (2002) 61–79.
- [DM2] Donin, J. and Mudrov, A., ‘*Explicit equivariant quantization on coadjoint orbits of $GL(n, \mathbb{C})$* ’. Lett. Math. Phys. **62**, no.1 (2002) 17–32.
- [EFK] Etingof, P.I., Frenkel, I.B., Kirillov, A.A., Jr., ‘*Lectures on representation theory and Knizhnik-Zamolodchikov equations*’. Mathematical Surveys and Monographs **58**, AMS, Providence, 1998.
- [EOW] Ewen, H., Ogievetsky, O. and Wess, J., ‘*Quantum matrices in two dimensions*’. Lett. Math. Phys. **22** (1991) no. 4, pp. 297–305.
- [ES] Etingof, P. and Schiffmann, O., ‘*Lectures on the dynamical Yang-Baxter equations*’. In: Quantum groups and Lie theory (Durham 1999), London Math. Soc. LN series **290**, Cambridge Univ. Press 2001.
- [EV1] Etingof, P., Varchenko, A., ‘*Solutions of the quantum dynamical Yang-Baxter equation and dynamical quantum groups*’. Comm. Math. Phys. **196** (1998) 591–640.
- [EV2] Etingof, P., Varchenko, A., ‘*Exchange dynamical quantum groups*’. Comm. Math. Phys. **205** (1999) no. 1, 19–52.
- [F] Faddeev, L.D., ‘*On the exchange matrix for WZNW model*’. Comm. Math. Phys. **132** no.1 (1990) 131–138.
- [Fe] Felder, G., ‘*Conformal field theory and integrable systems associated to elliptic curves*’. In Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vols. 1, 2 (Zürich, 1994), Birkhäuser, Basel, 1995, 1247–1255; hep-th/9407154.

- [Fl] Floré, M., ‘*Multiparameter quantum Cauchy-Binet formulas*’. arXiv:1807.08542 [math.QA].
- [FP1] Faddeev, L.D. and Pyatov, P.N., ‘*The differential calculus on quantum linear groups*’. In: Dobrushin, R.L., Minlos, A., Shubin, M.A. and Vershik, A.M. (eds.), Contemporary Methematical Physics, AMS Translations – Series 2, ISSN 0065-9290, vol.175 pp.35–47 (1996).
- [FP2] Faddeev, L.D. and Pyatov, P.N., ‘*Quantization of differential calculus on linear groups*’. In: Isaev, A.P., (ed.), Problems in Modern Theoretical Physics, JINR Publishing Dept. 96-212, Dubna, pp.19–43 (1996) (in Russian).
- [FR] Frenkel, I.B., Reshetikhin, N., ‘*Quantum affine algebras and holonomic difference equations*’. Commun. Math. Phys. **146** (1992) 1–60.
- [FRT] Faddeev, L.D., Reshetikhin, N.Yu. and Takhtajan, L.A., ‘*Quantization of Lie groups and Lie algebras*’. Leningrad Math. J. **1** no.1 (1990) 193–225.
- [FV] Finn, C., Vanicat, M., ‘*Matrix product construction for Koornwinder polynomials and fluctuations of the current in the open ASEP*’. J. Stat. Mech.: Theor. Exp. (2017) 023102 .
- [GJ] Green, H.S., Jarvis, P.D., ‘*Casimir invariants, characteristic identities, and Young diagrams for color algebras and superalgebras*’. J. Math. Phys. **24** (1983) 1681–1687.
- [GN] Gervais, J.-L., Neveu, A., ‘*Novel triangle relation and absense of tachyons in Liouville string field theory*’. Nucl. Phys. **B 238** (1984) 125–141.
- [Gou1] Gould, M.D., ‘*Characteristic identities for semi-simple Lie algebras*’. J. Austral. Math. Soc. (Series B) **26** (1985) 257–283.
- [Gou2] Gould, M.D., ‘*Polynomial-Identities for Simple Lie-Superalgebras*’. J. Austral. Math. Soc. (Series B) **28** (1987) 310–327.
- [GPS1] Gurevich, D.I., Pyatov, P.N. and Saponov, P.A., ‘*Hecke symmetries and characteristic relations on reflection equation algebras*’. Lett. Math. Phys. **41** (1997) 255–264.

- [GPS2] Gurevich, D.I., Pyatov, P.N. and Saponov, P.A., ‘*The Cayley-Hamilton theorem for quantum matrix algebras of $GL(m|n)$ type*’. St. Petersburg Math. J. **17** (2006) 119–135.
- [GPS3] Gurevich, D.I., Pyatov, P.N. and Saponov, P.A., ‘*Quantum matrix algebras of the $GL(m|n)$ type: the structure and spectral parameterization of the characteristic subalgebra*’. Theor. Math. Phys. **147** (2006) no.1, 460–485.
- [GS1] Gurevich, D. and Saponov, P., ‘*Quantum line bundles via Cayley-Hamilton identity*’. J. Phys. A: Math. Gen. **34** (2001) 4553–4569.
- [GS2] Gurevich, D. and Saponov, P., ‘*Geometry of non-commutative orbits related to Hecke symmetries*’. Contemporary Mathematics, ISSN 0271-4132, vol. 433. In Proc. of a conference in memory of Joseph Donin, pp.209–250 (2007).
- [G-T] Gelfand, I.M., Krob, D., Lascoux, A., Leclerc, B., Retakh, V.S. and Thibon, J., ‘*Noncommutative symmetric functions*’. Adv. Math. **112** (1995) no. 2, pp. 218–348.
- [Gu] Gurevich, D.I., ‘*Algebraic aspects of the quantum Yang-Baxter equation*’. Leningrad Math. J. **2** (1991) no. 4, pp. 801–828.
- [Gy] Gyoja, A., ‘*A q -analogue of Young symmetrizer*’. Osaka J. Math. **23** (1986) 841–852.
- [H] Hlavaty, L., ‘*Quantized braided groups*’. J. Math. Phys. **35** (1994) 2560–2569.
- [Ig] Igusa, J., ‘*Theta Functions*’. Grund. Math. Wiss. **194**, Springer-Verlag, 1972.
- [IO] Isaev, A., Ogievetsky, O., ‘*On quantization of r matrices for Belavin-Drinfeld triples*’. Physics of Atomic Nuclei **64** (2000) 2126–2130.
- [IOP1] Isaev, A.P., Ogievetsky, O.V. and Pyatov, P.N.: ‘*On quantum matrix algebras satisfying the Cayley-Hamilton-Newton identities*’. J. Phys. A: Math. Gen. **32** (1999), pp. L115–L121.
- [IOP2] Isaev, A., Ogievetsky, O. and Pyatov, P., ‘*Cayley-Hamilton-Newton identities and quasitriangular Hopf algebras*’. In Proc. of JINR Workshop

‘Supersymmetries and Quntum Symmetries’, July 27-31, 1999. Eds. E.Ivanov, S.Krivonos and A.Pashnev, JINR, Dubna E2-2000-82, pp. 397–405.

- [IP1] Isaev, A.P., Pyatov, P.N., *‘Covariant Differential Complexes on Quantum Linear Groups’*. J. Phys. A: Math. Gen. **28** (1995) 2227–2246.
- [IP2] Isaev, A., Pyatov, P., *‘Spectral extension of the quantum group cotangent bundle’*. Comm. Math. Phys. **288** (2009) no.3, 1137–1179.
- [Is] Isaev, A.P., *‘Twisted Yang-Baxter equations for linear quantum (super)groups’*. J. Phys. A: Math. Gen. **29** (1996) 6903–6910.
- [J] Jimbo, M., *‘A q -analog of $U(gl(N + 1))$ Hecke algebra and the Yang-Baxter equation’*. Lett. Math. Phys. **11** (1986) 247–252.
- [JG] Jarvis, P.D., Green, H.S., *‘Casimir invariants and characteristic identities for generators of the general linear, special linear and orthosymplectic graded Lie algebras’*. J. Math. Phys. **20** (1979) 2115–2122.
- [JM] Jimbo, M., Miwa, T., *‘Algebraic analysis of solvable lattice models’*. AMS, Providence, 1995.
- [Ju] Jurčo, B., *‘Differential calculus on quantized simple Lie groups’*. Lett. Math. Phys. **22** (1991) 177–186.
- [JW] Jordan, D., White, N., *‘The center of the reflection equation algebra via quantum minors’*. J. Algebra **542** (2020) 308–342.
- [KL] Kirillov, A., Jr., Lascoux, A., *‘Factorization of Kazhdan-Lusztig elements for Grassmanians’*. Adv. Stud. in Pure Math. **28** (2000) 143–154.
- [KP] Kasatani, M., Pasquier, V., *On polynomials interpolating between the stationary state of a $O(n)$ model and a Q.H.E. ground state*. Comm. Math. Phys. **276** (2007) 397–435.
- [KS] Kulish, P.P., Sklyanin, E.K., *‘Algebraic structures related to reflection equations’*. J. Phys. A: Math. Gen. **25**, no.22 (1992) 5963–5975.
- [KSch] Klimyk, A. and Schmüdgen, K., *‘Quantum groups and their representations’*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1997.

- [KT1] Kantor, I., Trishin, I., ‘*On a concept of determinant in the supercase*’. Comm. in Algebra **22** (1994) 3679–3739.
- [KT2] Kantor, I., Trishin, I., ‘*On the Cayley-Hamilton equation in the supercase*’. Comm in Algebra **27** (1999) 233–259.
- [Mac] Macdonald, I.G., ‘*Symmetric Functions and Hall Polynomials (Oxford Mathematical Monographs)*’, Oxford University Press, 1998.
- [Mai] Maillet J.M., ‘*Lax equations and quantum groups*’. Phys. Lett. B **245** (1990) 480–486.
- [Mal1] Maltsiniotis, G., ‘*Groupes quantiques et structures differentielles*’. C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math. **331** (1990) 831–834.
- [Mal2] Maltsiniotis, G., ‘*Le langage des espaces et des groupes quantiques*’. Commun. Math. Phys. **151** (1993) no.2, 275–302.
- [M-B] Mitra, S., Nienhuis, B., de Gier, J., Batchelor, M.T., ‘*Exact expressions for correlations in the ground state of the dense $O(1)$ loop model*’. J. Stat. Mech.: Theor. Exp. P09010 (2004).
- [Mol] Molev, A., ‘*Sklyanin determinant, Laplace operators, and characteristic identities for classical Lie algebras*’. J. Math. Phys. **36** (1995) no.2, 923–943.
- [Mon] Montgomery, S., ‘*Hopf algebras and their actions on rings*’. CBMS Lecture Notes vol. 82, American Math. Society, Providence, RI, 1993.
- [MRS] Molev, A.I., Ragoucy, E., Sorba, P., ‘*Coideal subalgebras in quantum affine algebras*’. Rev. Math. Phys. **15** (2003) no.8, 789–822.
- [Mudr] Mudrov, A.I., ‘*Quantum conjugacy classes of simple matrix groups*’. Comm. Math. Phys. **272** (2007) no.3, 635–660.
- [Mum] Mumford, D., ‘*Tata lectures on theta. I*’. Progress in Mathematics, Vol. 28, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1983.
- [N] Noumi, M., ‘*Macdonald-Koornwinder polynomials and affine Hecke rings*’. Surikaiseikikenkyusho kokyuroku **919** (1995) 44–55 (in Japanese).
- [NT] Nazarov, M., Tarasov, V., ‘*Yangians and Gelfand-Zetlin bases*’. Publ. RIMS **30** (1994) 459.

- [OP] Ogievetsky, O. and Pyatov, P.: ‘*Orthogonal and Symplectic Quantum Matrix Algebras and Cayley-Hamilton Theorem for them*’. arXiv:math/0511618.
- [Pa] Pasquier, V., ‘*Quantum incompressibility and Razumov Stroganov type conjectures*’. Ann. Henri Poincaré **7** (2006) 397–421.
- [P1] Pyatov, P., ‘*Raise and Peel Models of fluctuating interfaces and combinatorics of Pascal’s hexagon*’. J. Stat. Mech.: Theor. Exp. **09** (2004) P003.
- [P2] Pyatov, P., ‘*On the construction of unitary quantum group differential calculus*’. J. Phys. A: Math. Theor. **49** (2016) 415202 (25pp).
- [P-N] Pearce, P.A., Rittenberg, V., de Gier, J., Nienhuis, B., Temperley-Lieb stochastic processes. J. Phys. A: Math. Gen. **35** (2002) L661-L668.
- [PS] Pyatov, P., Saponov, P., ‘*Characteristic relations for quantum matrices*’. J. Phys. A: Math. Gen. **28** (1995) 4415–4421.
- [R1] Reshetikhin, N.Yu., ‘*Multiparameter quantum groups and twisted quasitriangular Hopf algebras*’. Lett. Math. Phys. **20** (1990) 331–335.
- [R2] Reshetikhin, N.Yu., ‘*Quasitriangular Hopf algebras and invariants of tangles*’. Leningrad Math. J. **1**, no.2 (1990) 491–513.
- [RS1] Razumov, A.V., Stroganov, Yu.G., ‘*Spin chains and combinatorics*’. J. Phys. A: Math. Gen. **34** (2001) 3185–3190.
- [RS2] Razumov, A.V., Stroganov, Yu.G., ‘*Combinatorial nature of ground state vector of $O(1)$ loop model*’. Theor. Math. Phys. **138** (2004) 333–337.
- [S] Semenov-Tyan-Shanskii, M.A., ‘*Poisson-Lie groups. The quantum duality principle and the twisted quantum double*’. Theor. Math. Phys. **93** (1992) no.2, 1292–1307.
- [Sm] Smirnov, F.A., ‘*Form factors in completely integrable models of Quantum Field Theory*’. World Scientific, Singapore, 1992.
- [Su1] Sudbery, A., ‘*Canonical differential calculus on quantum general linear groups and super-groups*’. Phys. Lett. **B284** (1992) 61–65.
- [Su2] Sudbery, A., ‘*The algebra of differential forms on a full matrix bialgebra*’. Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **114** (1993) 111–130.

- [SWZ1] Schupp, P., Watts, P., Zumino B., ‘*Differential geometry on linear quantum groups*’. Lett. Math. Phys. **25** (1992) no.2, 139–147.
- [SWZ2] Schupp, P., Watts, P., Zumino B., ‘*Bicovariant quantum algebras and quantum Lie algebras*’. Commun. Math. Phys. **157** (1993) no.2, 305–329.
- [Tz] Tzygan, B.L., ‘*Notes on differential forms on quantum groups*’. Selecta Math. Sov. **12** (1993) no.1, 75.
- [W] Woronowicz, S.L., ‘*Differential calculus on compact matrix pseudogroups (quantum groups)*’. Commun. Math. Phys. **122** (1989) no.1 125–170.
- [Zh] Zhang, J.J., ‘*The quantum Cayley-Hamilton theorem*’. J. Pure Appl. Algebra **129** (1998) no. 1, pp. 101–109.
- [ZJ] Zinn-Justin, P., ‘*Loop model with mixed boundary conditions, qKZ equation and Alternating Sign Matrices*’. J. Stat. Mech.: Theor. Exp. (2007) P01007.
- [Zu] Zumino, B., ‘*Differential calculus on quantum spaces and quantum groups*’. Preprint LBL-33249 and UCB-PTH-92/41 (1992); hep-th/9212093.