

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи



Ищенко Роман Андреевич

О свойствах разложимых графов

01.01.09 – Дискретная математика и математическая кибернетика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2022

Работа выполнена на кафедре математической теории интеллектуальных систем механико-математического факультета ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова».

Научный руководитель: **Бабин Дмитрий Николаевич**
доктор физико-математических наук, профессор, кафедра МАТИС механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова, профессор

Официальные оппоненты: **Фролов Александр Борисович**
доктор технических наук, профессор, кафедра математического и компьютерного моделирования НИУ «МЭИ», профессор

Романов Дмитрий Сергеевич
доктор физико-математических наук, доцент, кафедра математической кибернетики ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова, доцент
Пархоменко Денис Владимирович
кандидат физико-математических наук, ООО «Техкомпания Хуавей», руководитель проектов по задачам, связанных с теорией алгоритмов и машинным обучением

Защита диссертации состоится 16 февраля 2022 в 16:45 час на заседании диссертационного совета МГУ.05.01 ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова» по адресу: 119234, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д.1, МГУ имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет, аудитория 14-08.

Email: vasenin@msu.ru

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М.В. Ломоносова по адресу: Москва, Ломоносовский проспект, д.27 и на сайте ИАС «ИСТИНА»: <https://istina.msu.ru/dissertations/425540691/>

Автореферат разослан 14 января 2022

Ученый секретарь
диссертационного совета МГУ.05.01,
к.ф.-м.н.



Кривчиков Максим Александрович

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. Традиционно задача расшифровки (восстановления) «чёрного ящика» решалась в постановке Мура: зная фрагмент поведения, определить диаграмму автомата. Однако есть и другие постановки, например, зная тип автомата, восстановить утраченную информацию его диаграммы¹. Автор решал последнюю задачу в её самой экстремальной постановке, когда в диаграмме автомата остались одни стрелки, а все их отметки утеряны. При этом, в отличие от традиционных подходов, в диссертации задача решается без экспериментов, которые не всегда возможны, могут быть дорогими и опасными. Рассмотренные случаи охватывают популярные диаграммы переходов и дают основание предполагать, что в общем случае потребуется экспоненциальный перебор и получится экспоненциальное число решений. Тем не менее, в ряде частных случаев (преимущественно в случае алфавита из двух элементов) получилось доказать однозначность восстановления автомата и разработать полиномиальный алгоритм для этого.

Указанную задачу восстановления диаграммы переходов автомата по его графу можно рассматривать как задачу декомпозиции графа в сумму m подграфов, где m — число символов в алфавите (каждый подграф состоит из ребер с заданной отметкой). Подобные задачи декомпозиции графов рассматривались в различных областях дискретной математики и математической кибернетики. Кроме изучения таких разложений для диаграмм Мура абстрактных автоматов (ориентированный случай), в диссертации также рассматривается декомпозиция графов заданной планарности и древесности (неориентированный случай). Далее подробнее опишем предпосылки и историю возникновения задачи.

Теория автоматов, как раздел дискретной математики, возник в середине 20 века, начиная с работы Э. Поста 1941 года². В ней была описана структура решетки замкнутых классов булевых функций. Булевы функции являются частным случаем автоматов — автоматами без памяти. Возникшие для булевых функций, а также для функций k -значной логики³, задачи о выразимости, полноте, базисах актуальны и для автоматных функций. Применим к ним и аппарат, используемый для решения этих задач. Под вырази-

¹ Montalbano R. Local automata and completion // Annual Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science. 1993. Vol. 10. P. 333–342.

² Post E. Two-Valued Iterative Systems of Mathematical Logic. // Annals of Mathematics studies, Princeton Univ. Press 1941. Vol. 5. P. 122.

³ Яблонский С. В. Функциональные построения в k -значной логике // Труды математического института им. В.А. Стеклова. 1958. Vol. 51. P. 5–142.

стью здесь понимается возможность получения одной автоматной функции через другие путём соединения их выходных и входных каналов. Частным случаем задачи выразимости является задача полноты, в которой проверяется возможность выразимости всех автоматных функций. Этот подход носит название структурной теории автоматов. Значительный вклад в развитие структурной теории автоматов внесли В.Б. Кудрявцев⁴, С.В. Алёшин⁵, Подколзин А.С.⁶, А.А. Летический⁷, М.И. Кратко⁸, Д.Н. Бабин⁹.

В работе рассматриваются автоматы без выходной функции. Автоматом называется тройка (A, Q, φ) , где A и Q — множество входных символов и множество состояний соответственно, а $\varphi : Q \times A \rightarrow Q$ — функция перехода. Одним из способов представления и хранения информации об автомате является диаграмма Мура — ориентированный граф $G = (Q, W, f)$ с множеством вершин Q и отметками $f : W \rightarrow A$ на множестве ребер W графа G , при этом для любого $\alpha \in A$ и ребра $e = (q, p) \in W$ выполнено $f(e) = \alpha \Leftrightarrow \varphi(q, \alpha) = p$, т.е. ребро из состояния q в состояние p размечено отметкой α , если и только если автомат переходит при подаче входного символа α из состояния q в состояние p . Граф автомата естественным образом декомпозируется в сумму основных подграфов, состоящих из ребер с заданной отметкой: $G = \bigcup_{\alpha \in A} G_f(\alpha)$, где $G_f(\alpha) = (Q, W(\alpha), f(\alpha))$, где $W(\alpha) = \{e \in W | f(e) = \alpha\}$ и $f(\alpha) = f|W(\alpha)$ (сужение функции f на множество $W(\alpha)$).

Рядом ученых в различных формах рассматривался вопрос о поиске возможности восстановления информации об автомате, если информация частично потеряна или неизвестна. Восстановление автомата по его поведению исследовал Э. Мур¹⁰, также L. Roland¹¹ исследовал задачу об определении автомата по его входным и выходным последовательностям символов. R. Montalbano¹² рассмотрел вопрос о восстановлении автомата, если у его графа

⁴ Кудрявцев В. Б., Алёшин С. В., Подколзин А. С. Введение в теорию автоматов // Наука. 1985. С. 320.

⁵ Алёшин С. В. Об одном следствии теоремы Крона-Роудза // Дискрет. Матем.. 199. Т. 11. С. 101–109.

⁶ Подколзин А. С., Кудрявцев В. Б. Об основных направлениях в теории однородных структур // Дискретная математика. 1989. Т. 1. С. 19–38.

⁷ Летический А. А. Условия полноты для конечных автоматов // Вычислительная математика и математическая физика. 1961. Т. 4. С. 702–710.

⁸ Кратко М. И. Алгоритмическая неразрешимость проблемы распознавания полноты для конечных автоматов // ДАН СССР. 1964. Т. 155. С. 35–37.

⁹ Babin D. N. On completeness of the binary bounded determined functions with respect to superposition. // Discrete Mathematics and Applications. 1991. Vol. 1. P. 423–431.

¹⁰ Moore E. F. Gedanken-experiments on Sequential Machines // Automata Studies, Annals of Mathematical Studies. 1956. Vol. 34. P. 129–153.

¹¹ Roland L. R., Robert E. S. Inference of Finite Automata Using Homing Sequences // MIT Laboratory of Computer Science. 1993. Vol. 103. P. 299–347.

¹² Montalbano R. Local automata and completion // Annual Symposium on Theoretical Aspects of

отсутствует часть ребер. Тем не менее задача восстановления автомата в случае, если у него удалены все отметки на ребрах, оставалась открытой. Автор оценивает возможность, однозначность и сложность данного восстановления для трех традиционных классов автоматов без выходов: дефинитных, групповых и абелевых.

Автомат называется k -дефинитным, если его состояние определяется последними поданными k -символами, известно, что множество дефинитных автоматов с выходами совпадает с множеством автоматов, которых можно получить с помощью операций суперпозиции из булевых функций и задержек. Дефинитные автоматы впервые систематически изучены в работе М. Perles¹³, где был сформулирован критерий принадлежности автомата классу дефинитных. В работе М. Ito¹⁴ была исследована структура графа дефинитного автомата и показано, что граф дефинитного автомата декомпозируется в сумму из графа сильно-связного дефинитного автомата (ядра) и набора «слоев» (последовательных подграфов, что ребра из вышестоящего подграфа направлены в нижестоящие). В дальнейшем дефинитные автоматы изучались, например, в работах В. Imreh¹⁵, А. Ginzburg¹⁶ и Д. Жук¹⁷.

Групповым называется такой автомат, что для любого символа $a \in A$ функция на множестве состояний $\varphi_a(q) = \varphi(q, a)$ является перестановкой. Групповые автоматы тесно связаны с алгебраической структурой автомата, так как внутренняя полугруппа автомата $\{\varphi(q, a), a \in A^*\}$ в случае группового автомата является группой. Групповые автоматы изучались в работах С. Алешина¹⁸ и Д. Бабина¹⁹. Несложно показать, что граф группового автомата является регулярным и разметка ребер графа группового автомата эквивалентна классической задаче Ю. Петерсена²⁰ о декомпозиции регулярного графа на непересекающиеся 2-факторы, что в свою очередь эквивалентно разложению матрицы смежности графа на матрицы перестановок, что как показал С. Godsil²¹ всегда выполнимо для регулярного графа.

Computer Science. 1993. Vol. 10. P. 333–342.

¹³ Perles M., Rabin M., Shamir E. Theory of definite automata // IEEE Trans. Electronic Computers.. 1963. Vol. 12. P. 233–243.

¹⁴ Ito M., Duske J. On cofinal and definite automata // Acta Cybernetica. 1983. Vol. 6. P. 181–189.

¹⁵ Imreh V. On finite definite automata // Acta Cybernet.. 1984. Vol. 7. P. 61–65.

¹⁶ Ginzburg A. About Some Properties of Definite, Reverse-Definite and Related Automata // IEEE Trans. Electronic Computers.. 1966. Vol. 15. P. 806–810.

¹⁷ Жук Д. Н.. О классификации автоматных базисов Поста по разрешимости свойств A -полноты для дефинитных автоматов // Дискрет. Матем.. 2010. Т. 22. С. 80–95.

¹⁸ Алёшин С. Алгебраические системы автоматов // МАКС Пресс. 2016. С. 192.

¹⁹ Бабин Д. Н. Особенности схем автоматных функций с операцией суперпозиции // МАКС Пресс. 2019. С. 42

²⁰ Petersen J. Die Theory der regularen graphs. // Acta Math. 1891. Vol. 15. P. 193–220.

²¹ Godsil C. Eigenvalues of Graphs and Digraphs. // Linear Algebra and its Applications. 1982. Vol. 46.

Автомат V называется *абелевым*, если для любых символов $\alpha, \beta \in A$ и состояния $q \in Q$ выполняется $\varphi(q, \alpha\beta) = \varphi(q, \beta\alpha)$. Абелевы автоматы изучались в работах А. Fleck²², А. Charles²³, S. Yukio²⁴ и В Малыгина²⁵ и наиболее интересны из-за структуры их группы автоморфизмов: порядок группы автоморфизмов²⁶ сильно-связного абелева автомата равен количеству состояний, при этом функция h является автоморфизмом тогда и только тогда, когда существует такое слово $a \in A^*$, что $h = \varphi_a$. Дополнительное ограничение на структуру графа сильно-связного абелева автомата накладывает тот факт, что если для некоторого состояния q и слов a, b выполнено $\varphi(q, a) = \varphi(q, b)$, то для любого состояния q' будет выполнено $\varphi(q', a) = \varphi(q', b)$.

Свойства графов автоматов и возможность восстановления разметки в данной работе рассматриваются отдельно для случая, когда алфавит состоит из двух символов $\{0, 1\}$, — такие автоматы обладают рядом интересных свойств. Например, в работе Д. Бабина²⁷ было показано, что они вместе с булевыми функциями образуют полную систему относительно суперпозиции. Интересно отметить, что графы рассмотренных классов автоматов раскладываются в сумму подграфов классического вида, например дефинитные автоматы разлагаются в сумму деревьев, групповые — в сумму циклов, абелевы — в сумму степеней одного цикла.

Открытым вопросом для дальнейшего изучения остается исследование возможности восстановления автомата «почти всегда» и частичное восстановление автомата (если потеряна информация только о части ребер). Это принципиально другие задачи, требующие отдельного рассмотрения.

В заключение работы рассматриваются свойства неориентированных графов, разложимых на планарные графы, деревья или аналогичные им структуры и особое внимание уделяется нахождению хроматического числа — одной из классических задач теории графов. Впервые эта задача была сформулирована Г. Френсисом как проблема четырех красок. Её суть в том, что любое разбиение плоскости на непрерывные сегменты может быть раскрашено при помощи не более, чем 4 цветов, так что никакие два соседних сегмента не

Р. 43–50.

²² Fleck A. C. Isomorphism Groups of Automata. // Journal of the ACM. 1962. Vol. 9. P. 469–476.

²³ Charles A. Group-Type Automata. // Journal of the ACM. 1966. Vol. 13. P. 170–175.

²⁴ Yukio S. On the structure of abelian automata. // Journal of Computer and System Sciences. 1976. Vol. 13. P. 143–152.

²⁵ Малыгин В. И. О некоторых пространствах, связанных с композициями автоматов // Вестн. Моск. ун-та Сер. 1, Математика, Механика. 1988. Т. 4. С. 88–90.

²⁶ имеется в виду группа перестановок состояний автомата, сохраняющих функцию переходов

²⁷ Babin D. N. On completeness of the binary bounded determined functions with respect to superposition. // Discrete Mathematics and Applications. 1991. Vol. 1. P. 423–431.

имеют одинаковый цвет. В современной формулировке²⁸ теорема утверждает, что хроматическое число $\chi(G)$ любого планарного графа G не превышает 4. G. Ringel²⁹ впервые поставил вопрос о хроматическом числе бипланарных графов (графов, разложимых в сумму двух планарных) и показал, что хроматическое число бипланарных графов не больше 12. Впоследствии Т. Sulanke³⁰ показал, что существует бипланарный граф с хроматическим числом 9. Однако вопрос связи хроматического числа бипланарного графа в зависимости от обхвата (длины наименьшего цикла графа) оставался открытым — в данной работе показывается, что максимальное хроматическое число бипланарных графов без треугольников лежит в диапазоне от 5 до 8.

Не менее интересна задача разложения графов в сумму деревьев. В 60-е годы прошлого столетия Уильям Тутте³¹ и Криспин Нэш-Уильямс³² разработали теории, касающиеся представления графов в виде объединения непересекающихся по ребрам остовных лесов. Одной из областей применения данных результатов является задача достижения наибольшего быстродействия сетей: если в качестве вершин графа рассматривать узлы коммуникационной сети (компьютеры), а в качестве ребер — соединения между ними, то наличие в графе нескольких непересекающихся остовов позволит информации распространяться по ним параллельно, что многократно увеличит пропускную способность по отношению к графу, содержащему всего одно остовное дерево. Эти работы побудили других ученых к исследованию разложения графов на другие, схожие по структуре, семейства, в частности, на псевдодеревья (связный граф, содержащий не более 1 цикла) и деревья-звезды (полный двудольный граф $K_{1,n}$). Псевдодеревья впервые встречаются в литературе в 1963 году в книге³³, посвященной линейному программированию, в которой псевдодеревья возникают в качестве решения определенной задачи транспортной сети. Звездочная топология компьютерной сети играет важную роль в распределенных вычислениях. Butler S. показал, что хроматическое число графов, разложимого в сумму n деревьев, равно $2n$. Однако вопрос максимального хроматического числа графов разложимых в сумму n псевдодеревьев и деревьев-звезд оставался открытым — в данной работе показывается что это

²⁸ Robertson N., Sanders D., Seymour P. Efficiently four-coloring planar graphs. // STOC '96: Proceedings of the twenty-eighth annual ACM symposium on Theory of Computing. 1996. P. 571–575.

²⁹ Ringel G. Farbungsprobleme auf Flächen und Graphen. // Mathematische Monographien, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. 1959. Vol. 2.

³⁰ Gardner M. Mathematical games. // Scientific American. 1980. Vol. 242. P. 14–19.

³¹ Tutte W. On the problem of decomposing a graph into n connected factors. // Journal of the London Mathematical Society. 1961. Vol. 36. P. 221–230.

³² Nash-Williams J. Edge-disjoint spanning trees of finite graphs. // Journal of the London Mathematical Society. 1961. Vol. 36. P. 445–450.

³³ Dantzig G. Linear Programming and Extensions. // Princeton University Press. 1963.

число равно $2n + 1$ и $n + 1$ соответственно.

Объект и предмет исследования. Объектом диссертации являются графы переходов автоматов. Предметом исследования является сложность, возможность и число решений в задаче восстановления переходов автомата по его графу.

Цели и задачи диссертационной работы: Основной целью настоящей работы является исследование возможности восстановить разметку графа автомата, зная его принадлежность к заданному классу (дефинитных, абелевых или групповых автоматов). Достижение поставленной цели позволит восстановить автомат в случае потери информации об отметках на ребрах или же не хранить её изначально для экономии памяти. Кроме графов автоматов (ориентированных графов, разложимых в сумму подграфов, соответствующих символам алфавита), в диссертации также исследуются свойства графов, разложимых в сумму классических для теории графов структур (планарные графы, деревья и пр.), с целью демонстрации зависимости основных характеристик графа от разлагаемой структуры и в неориентированном случае.

Тема, объект и предмет диссертационной работы соответствуют следующим пунктам паспорта специальности 01.01.09 — дискретная математика и математическая кибернетика: теория автоматов, теория графов и комбинаторный анализ, синтез и сложность управляющих систем (в частности сложность алгоритмов и вычислений). Для достижения поставленных целей в работе сформулированы и решены следующие задачи.

- Нахождение критериев того, что ребра ориентированного графа могут быть размечены таким образом, чтобы получить граф соответственно дефинитного/группового/абелевого автомата;
- Поиск эффективного алгоритма для осуществления таких разметок и оценка его сложности;
- Определение максимального количества таких разметок и определение, когда такое восстановление единственно;
- Решение упомянутых выше трех задач для случая, когда количество символов в алфавите равно двум;
- Определение хроматического графа в зависимости от возможности разложить его на планарные графы и структуры, аналогичные деревьям.

Научная новизна. Автором найдены нетривиальные случаи, когда дефинитные, групповые и абелевы автоматы можно однозначно восстановить по графу, что позволит эффективно восстановить информацию об автомате в случае потери отметок на ребрах или изначально не хранить их для экономии памяти. При этом доказано, что в общем случае однозначное восстановление упомянутых выше классов автоматов невозможно и перебор всех случаев невозможен (экспонента по сложности). Также продемонстрирована зависимость основных характеристик графа от разлагаемой структуры в неориентированном случае. Все основные результаты диссертации являются новыми и получены автором самостоятельно.

Теоретическая и практическая значимость. Работа имеет теоретический характер. Результаты диссертации могут быть использованы в теории автоматов, теории графов и комбинаторного анализа. С другой стороны, некоторые из полученных результатов могут быть использованы на практике при решении задачи восстановления описания функционирования автомата в случае частичной потери информации о его диаграмме.

Методология и методы исследования. В работе использовались методы теории автоматов, теории графов, комбинаторного анализа, теории алгоритмов, теории алгебраических структур и теории групп.

Достоверность результатов исследования. Достоверность полученных результатов обеспечивается строгими математическими доказательствами утверждений, апробацией на конференциях и семинарах, а также публикациями в рецензируемых журналах. Работы, упомянутые в тексте диссертации, снабжены соответствующими ссылками.

Положения выносимые на защиту. На защиту выносятся: обоснование актуальности темы исследования, научная и практическая значимость работы, а также следующие положения.

1. Найдены нетривиальные случаи, когда дефинитные, групповые и абелевы автоматы можно однозначно восстановить по графу;
2. Для дефинитных автоматов и абелевых автоматов в алфавите из двух элементов найдены полиномиальные алгоритмы для осуществления такого восстановления или нахождения одного из возможных восстановлений, если восстановление неединственно;
3. Доказано, что в рассматриваемых классах в общем случае невозможен эффективный перебор всех восстановлений автомата (экспонента от количества вершин по сложности);

4. Получены оценки хроматического числа бипланарных графов без треугольников и найдено точное хроматическое число графов, разложимых в заданное количество псевдодеревьев и графов-звезд.

Апробация результатов. Основные результаты диссертации докладывались на семинарах и всероссийских и международных конференциях:

- научный семинар «Теория автоматов» под руководством профессора В.Б. Кудрявцева, механико-математический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова, 2021 г.;
- научный семинар «Теория дискретных функций и приложения» под руководством профессора Д.Н. Бабина, механико-математический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова, 2020 г.;
- научный семинар «Компьютерная безопасность» под руководством старшего научного сотрудника А. В. Галатенко, механико-математический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова, 2021 г.;
- научный семинар «Нейронные сети» под руководством доцента А.А. Часовских, научного сотрудника В.С. Половникова, механико-математический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова, 2014 г.;
- XIX Международная научная конференция «Проблемы теоретической кибернетики», 2021 г.;
- MSU AI Conference 2021 | Математика и компьютерные науки, 2021 г.;
- Научная конференция Ломоносовские чтения 2020. Секция математики, МГУ имени М.В. Ломоносова, 2020 г.;
- Научная конференция Ломоносовские чтения 2019. Секция математики, МГУ имени М.В. Ломоносова, 2019 г.;
- Научная конференция Ломоносовские чтения 2018. Секция математики, МГУ имени М.В. Ломоносова, 2018 г.;
- Научная конференция Ломоносовские чтения 2017. Секция математики, МГУ имени М.В. Ломоносова, 2017 г.

Личный вклад автора. Результаты, представленные теоремами в диссертационной работе и автореферате, помимо имеющих ссылки на работы

других авторов, положения, выносимые на защиту, получены автором самостоятельно. Подготовка к публикации полученных результатов проводилась без соавторов.

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в 8 печатных работах, из них 4 статьи в научных журналах [1–3, 5] из списка, рекомендованного ВАК РФ, 1 статья из перечня SCOPUS [4], 3 статьи в сборниках трудов конференций [6–8].

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы из 46 наименований. Общий объем диссертации составляет 100 страниц.

Краткое содержание диссертации. Во **введении** описаны структура диссертации и история рассматриваемых в ней вопросов, показана актуальность рассматриваемых задач. Сформулированы цель работы и основные результаты.

В **главах 1–3** исследуется задача восстановления разметки графа автомата, зная его принадлежность к заданному классу автоматов: дефинитных, групповых и абелевых соответственно для глав 1, 2 и 3. Каждая из глав имеет схожую структуру: сначала приводятся свойства и критерий того, что граф может быть размечен до автомата заданного класса, затем приводится алгоритм такой разметки и оценивается количество таких разметок. При этом во всех трех классах найдены нетривиальные случаи, когда автоматы можно однозначно восстановить по его графу — за полиномиальное время, однако в общем случае однозначное восстановление невозможно и перебор всех случаев невозможен (экспонента по сложности). Рассмотрим детальнее каждую из упомянутых выше глав.

Глава 1 посвящена исследованию упомянутых выше вопросов для дефинитных графов. Введем основные понятия для формальной формулировки результатов.

Пусть $V = (A, Q, \varphi)$ — конечный автомат без выходов. Автомат V называется *дефинитным*, если существует натуральное число k , что для любого входного слова a длины k существует состояние $q_a \in Q$, что для любого состояния $q \in Q$ выполняется $\varphi(q, a) = q_a$, при этом минимальное такое k называется *глубиной* дефинитного автомата. *Графом автомата* $V = (A, Q, \varphi)$ называется размеченный ориентированный граф $G = (Q, W, f)$, вершины которого соответствуют состояниям автомата, при этом $e = (q, p) \in W$, $f(e) = \alpha \Leftrightarrow \varphi(q, \alpha) = p$, где $f : W \rightarrow A, \alpha \in A$. Ориентированный граф $G = (Q, W)$ называется *автоматным*, если существует такая функция $f : W \rightarrow A$, что размеченный граф (Q, W, f) является графом некоторого автомата, в таком случае функция f называется *разметкой* автоматного графа G в алфавите

A , а количество символов в алфавите (исходящая степень вершин) называется *степенью графа* G . Автоматный граф $G = (Q, W)$, у которого существует разметка f , что $G = (Q, W, f)$ — граф некоторого дефинитного автомата $V_f = (A, Q, \varphi_f)$, называется *дефинитным графом*, а разметка f — *d-разметкой*.

Граф G с разметкой f раскладывается в сумму подграфов $G = \bigcup_{\alpha \in A} G_f(\alpha)$, где $G_f(\alpha) = (Q, W(\alpha), f(\alpha))$, где $W(\alpha) = \{e \in W | f(e) = \alpha\}$ и $f(\alpha) = f|W(\alpha)$ (сужение функции f на множество $W(\alpha)$). Будем различать разметки с точностью до замены букв и/или кратных ребер: разметки f_1 и f_2 графа G в алфавите A называются *различными*, если множество $\{G_{f_1}(\alpha) | \alpha \in A\} \neq \{G_{f_2}(\alpha) | \alpha \in A\}$. Так как очевидно, что в случае входного алфавита из одного символа разметка всегда единственна, то далее везде считаем, что $|A| > 1$. Граф называется *сильно-связным*, если существует ориентированный путь из любой вершины в любую другую.

Два различных состояния s, t автомата $V = (A, Q, \varphi)$ называются *1-эквивалентными*, если для любого символа $\alpha \in A$ выполняется $\varphi(s, \alpha) = \varphi(t, \alpha)$. Если (s, t) — пара 1-эквивалентных вершин в автомате V , то *сжатым автоматом* $V(s, t) = (A, Q \setminus s, \varphi_{s,t})$ будем называть автомат, полученный из автомата V следующим образом:

$$\varphi_{s,t}(q, \alpha) = \begin{cases} \varphi(q, \alpha), & \text{если } \varphi(q, \alpha) \neq s; \\ t, & \text{если } \varphi(q, \alpha) = s. \end{cases}$$

Определим *множество смежности* $\Gamma(q)$ вершины q графа $G = (Q, W)$ как $\Gamma(q) = \{p \in Q | (q, p) \in W\}$ и назовем вершины s, t ориентированного графа $G = (Q, W)$ *псевдоэквивалентными*, если $\Gamma(s) = \Gamma(t)$. Определим *сжатый граф* $G(s, t) = (Q \setminus s, W_{(s,t)})$, образованный из графа $G = (Q, W)$ следующим образом: $W_{(s,t)} = W \setminus \{(s, q) | q \in Q\} \cup \{(q, t) | (q, s) \in W\}$. В работе Perles³⁴ было показано, что у дефинитного автомата V с количеством состояний больше 1 всегда существует пара 1-эквивалентных вершин (s, t) и что сжатый автомат $V(s, t)$ дефинитный тогда и только тогда, когда автомат V дефинитный. Из следующей теоремы видно, что для дефинитных графов справедливо аналогичное утверждение.

Теорема 1.1. *Пусть вершины s, t графа G являются псевдоэквивалентными, тогда граф G является дефинитным тогда и только тогда, когда сжатый граф $G(s, t)$ является дефинитным.*

Это свойство использовалось для нахождения алгоритма, который вос-

³⁴ Perles M., Rabin M., Shamir E. Theory of definite automata // IEEE Trans. Electronic Computers.. 1963. Vol. 12. P. 233–243.

становливают разметку дефинитного графа. Согласно теореме ниже, этот алгоритм существует, и может быть выполнен за полиномиальное время.

Теорема 1.2. *Существует алгоритм временной сложности $O(n^3)$, который осуществляет d -разметку ориентированного графа $G = (Q, W)$, $|Q| = n$, или определяет, что такой разметки не существует.*

При этом, как видно из следующей теоремы, в случае двух входных символов разметка сильно-связного дефинитного графа всегда единственна, что с учетом Теоремы 1.2. позволит эффективно восстановить информацию об автомате в случае потери отметок на ребрах или изначально не хранить их для экономии памяти.

Теорема 1.3. *Сильно-связный дефинитный граф G степени 2 имеет единственную d -разметку.*

Однако в случае большего числа символов максимальное число разметок экспоненциально зависит от количества вершин, как видно из Теоремы 1.4.

Теорема 1.4. *Для любых натуральных чисел m , k и n , что $2 \leq m \leq k \leq n$ существует дефинитный граф G степени m с n вершинами и компонентой сильной связности из k вершин, у которого не менее $(m-1)!^{k-m+1} * m!^{n-k}$ различных d -разметок.*

По результатам Главы 1 доказано, что в случае двух входных символов разметка сильно-связного дефинитного графа всегда единственна, однако в случае большего числа символов максимальное число разметок экспоненциально зависит от количества вершин.

В главе 2 исследуются упомянутые выше вопросы для групповых графов. Автомат называется *групповым*, если для любого $\alpha \in A^*$ отображение $\varphi_\alpha(q) = \varphi(q, \alpha)$ есть перестановка на множестве Q . *Групповым графом* называется ориентированный граф, ребра которого могут быть размечены таким образом, что образованный граф является графом некоторого группового автомата и такая разметка называется g -разметкой. В тексте данной диссертации доказывается, что групповой граф является регулярным (входящие и исходящие степени для любой вершины равны количеству символов в алфавите). При этом очевидно, что разметка графа группового автомата эквивалентна разложению графа на подграфы, где каждая вершина имеет входящую и исходящую степень, равную 1. Эквивалентной постановкой задачи будет разложение матрицы смежности A графа G в сумму матриц перестановок — бинарных матриц, в каждой строке и столбце которых находится ровно 1 единичный элемент (каждой матрице перестановок будет соответствовать один из символов алфавита). В работе Godsil³⁵ было показано, что для мат-

³⁵ Godsil C. Eigenvalues of Graphs and Digraphs. // Linear Algebra and its Applications. 1982. Vol. 46.

рицы смежности регулярного графа это разложение всегда возможно. Таким образом, с учетом вышеуказанных комментариев, можно получить критерий того, что граф является групповым, сформулированный в теореме ниже.

Теорема 2.1. *Граф $G = (Q, W)$ — групповой тогда и только тогда, когда существует такое число m , что для любой вершины $q \in Q$ входящая и исходящая степени вершины равны m .*

Несложно показать, что разметка группового графа также эквивалентна задаче разложения графа на совершенные паросочетания, для которой как известно существует полиномиальный алгоритм³⁶. При этом в диссертации доказано, что существует класс групповых графов, для которых разметка единственна, поэтому может быть однозначно восстановлена за полиномиальное время по графу. Для формулировки этого результата введем несколько дополнительных понятий. *Подматрицей перестановки P* группового графа G назовем любую подматрицу матрицы смежности A графа G , являющейся матрицей перестановки. Натуральное число k будем называть *кратностью подматрицы перестановки P* , если $P^k \subseteq A$, где $P^k = \underbrace{P * \dots * P}_k$, а $P^{k+1} \not\subseteq A$.

Количество g -разметок графа G будем обозначать $g(G)$. Символ E означает единичную матрицу. Мы готовы сформулировать теорему о единственности восстановления разметки группового автомата.

Теорема 2.2. *Пусть G — групповой граф степени m с матрицей смежности A , $P(A) = \{P_1, \dots, P_s\}$ — множество подматриц перестановок, при этом для любого $i \in \{1, \dots, s\}$ кратность подматрицы P_i равна k_i , тогда граф G имеет единственную g -разметку тогда и только тогда, когда $\sum_{i=1}^s k_i = m$.*

Тем не менее из Теоремы 2.3. и Теоремы 2.4. видно, что в общем случае количество g -разметок экспоненциально зависит от числа вершин.

Теорема 2.3. *Для любых натуральных m и n таких, что $n \leq m$, существует такой групповой граф G степени m с количеством вершин n , что количество разметок $g(G) \geq \frac{1}{m!} \left(\frac{m \prod_{k=0}^{m-1} k!}{3} \right)^{n/m}$.*

Теорема 2.4. *Для любого группового графа G выполнено:*

$$g(A) \leq \prod_{i=1}^m (i!)^{n/i} \leq \left(\frac{(m+1)!}{2^m} \right)^n.$$

При этом для случая, когда количество символов в алфавите равно двум, найдена формула для расчета точного количества разметок, как видно

P. 43–50.

³⁶ Hopcroft K. An $n^{5/2}$ algorithm for maximum matchings in bipartite graphs. // SIAM Journal on Computing. 1973. Vol. 2. P. 225–231.

из теоремы ниже.

Теорема 2.5. Пусть G — групповой граф степени 2 с количеством вершин n и матрицей смежности $A = (a_{i,j})$. Рассмотрим бинарную матрицу $A' = (a'_{i,j})$ порядка n , в которой

$$a'_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{если } a_{i,j} \neq 0, \\ 0, & \text{если } a_{i,j} = 0, \end{cases}$$

где $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Тогда количество разметок графа G равно:

$$g(G) = \begin{cases} \frac{\text{Per}(A')}{2}, & \text{если } A \neq 2E, \\ 1, & \text{если } A = 2E. \end{cases}$$

По результатам Главы 2 доказано, что для групповых, как и для дефинитных автоматов, количество разметок в общем случае может экспоненциально зависеть от числа вершин. Тем не менее существует подкласс групповых графов, для которых разметка единственна. В случае, когда количество элементов в алфавите равно двум, доказана формула для расчета точного числа возможных g -разметок.

В главе 3 изучаются свойства графов абелевых автоматов в рамках обозначенной выше цели диссертации. Автомат V называется *абелевым*, если для любых символов $\alpha, \beta \in A$ и состояния $q \in Q$ выполняется $\varphi(q, \alpha\beta) = \varphi(q, \beta\alpha)$. Автоматный граф $G = (Q, W)$, у которого существует разметка f , что $G = (Q, W, f)$ — граф некоторого абелевого автомата $V_f = (A, Q, \varphi_f)$, называется *абелевым графом*, а разметка f — *a -разметкой*. Определим граф $G(n, m) = (V, W)$ как

- $V = V_1 \cup \dots \cup V_k$, где $k = n/m$ и $|V_i| = m$ для любого $i \in \{1, \dots, k\}$;
- $W = \{(v, u) | v \in V_i \text{ и } u \in V_{i'}, \text{ где } i' = i + 1, \text{ если } i < k \text{ и } i' = 1, \text{ если } i = k\}$.

Следующие две теоремы на примере графа $G(n, m)$ показывают, что максимальное количество a -разметок экспоненциально зависит от количества вершин.

Теорема 3.1. Абелевый граф $G(n, m)$ имеет не менее $(m!)^{n/m-1}$ различных a -разметок.

Теорема 3.2. Любой сильно-связный абелевый граф имеет различных a -разметок не более чем $\frac{1}{m!} \left(\frac{(m+1)!}{2^m} \right)^n$.

Однако как видно из Теоремы 3.3 и Теоремы 3.4, в случае двух входных символов, за исключением крайнего случая $G(n, 2)$, все абелевы графы

имеют единственную a -разметку и существует линейный алгоритм разметки графа до абелевого автомата

Теорема 3.3. Пусть G — сильно-связный абелевый граф G с n вершинами степени 2, не равный $G(n, 2)$, тогда G имеет единственную a -разметку.

Теорема 3.4. Пусть G — сильно-связный автоматный граф степени 2, тогда существует алгоритм, который находит a -разметку или определяет, что такой разметки не существует, за время $O(n)$.

По результатам Главы 3 доказано, что как и в других рассматриваемых случаях в диссертации, для абелевых графов максимальное количество a -разметок экспоненциально зависит от количества вершин, однако существует нетривиальный подкласс с однозначным восстановлением за линейное время.

В главе 4 исследуются свойства графов, разложимых в сумму классических для теории графов структур, с целью демонстрации зависимости основных характеристик графа от разлагаемой структуры и в неориентированном случае, а именно приводятся оценки хроматического числа графа в зависимости от его разложимости на планарные графы, деревья и пр. Граф G называется *бипланарным*, если существуют два планарных подграфа G_1 и G_2 , $G = G_1 \cup G_2$. Из работы³⁷ и работы³⁸ следует, что хроматическое число любого бипланарного графа не превышает 12 и что существует бипланарный граф с хроматическим числом 9. Теорема 4.1 показывает взаимосвязь хроматического числа и охвата (длиной наименьшего цикла) бипланарного графа. Графом без треугольников называется граф с охватом не менее 4.

Теорема 4.1. Хроматическое число любого бипланарного графа без треугольников не более 8. При этом существует бипланарный граф без треугольников с хроматическим числом 5.

Далее исследуется зависимость хроматического числа от возможности разложения графа на древовидные структуры. *Древесностью* графа G называют наименьшее число непересекающихся по ребрам остовных лесов, на которые можно разложить граф G . *Псевдодревесностью* графа G называют наименьшее число непересекающихся по ребрам остовных псевдолесов (графов, в которых каждая связная компонента имеет максимум один цикл), на которые можно разложить граф G . *Звездной древесностью* графа G называют минимальное число *лесов-звезд* (графов, в которых каждая связная компонента является *звездой*, т.е. графом, в котором все ребра исходят из одной

³⁷ Ringel G. Farbungsprobleme auf Flächen und Graphen. // Mathematische Monographien, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. 1959. Vol. 2.

³⁸ Gardner M. Mathematical games. // Scientific American. 1980. Vol. 242. P. 14–19.

вершины), на которые можно разложить граф G . Butler S. показал, что хроматическое число графов древесности n равно $2n$. Теорема 4.2. и Теорема 4.3. ниже показывают взаимосвязь хроматического числа от псевдодревесности и звездной древесности.

Теорема 4.2. *Максимальное хроматическое число графов псевдодревесности n равно $2n + 1$.*

Теорема 4.3. *Максимальное хроматическое число графов со звёздной древесностью n равно $n + 1$.*

По результатам Главы 4 доказана зависимость основных характеристик графа от разлагаемой структуры не только для автоматных графов, но и для классических в теории графов структур.

Заключение. В рамках диссертации было проведено исследование возможности восстановить разметку графа автомата, зная его принадлежность к заданному классу автоматов (дефинитных, абелевых, групповых). Результаты исследований в ряде случаев позволят восстановить автомат в случае потери информации об отметках на ребрах или же не хранить её изначально для экономии памяти. Кроме графов автоматов (ориентированных графов, разложимых в сумму подграфов, соответствующих символам алфавита), в диссертации также исследованы свойства графов, разложимых в сумму классических для теории графов структур (планарные графы, деревья и пр.), с целью демонстрации зависимости основных характеристик графа от разлагаемой структуры в неориентированном случае.

Для достижения поставленных целей в работе получены следующие результаты.

1. Найдены нетривиальные случаи, когда дефинитные, групповые и абелевые автоматы можно однозначно восстановить по графу;
2. Для дефинитных автоматов и абелевых автоматов в алфавите из двух элементов найдены полиномиальные алгоритмы для осуществления такого восстановления или нахождения одного из возможных восстановлений, если восстановление неединственно;
3. Доказано, что в рассматриваемых классах в общем случае невозможен эффективный перебор всех восстановлений автомата (экспонента от количества вершин по сложности);
4. Получены оценки хроматического числа бипланарных графов без треугольников и найдено точное хроматическое число графов, разложимых в заданное количество псевдодеревьев и графов-звезд.

Результаты диссертации могут быть использованы в теории автоматов, теории графов и комбинаторного анализа. Некоторые из полученных результатов могут быть использованы на практике при решении задачи восстановления описания функционирования автомата в случае частичной потери информации о его диаграмме.

Благодарности. Автор выражает благодарность своему научному руководителю, доктору физико-математических наук, профессору Бабину Дмитрию Николаевичу за постановку задачи, полезную конструктивную критику и постоянное внимание к работе.

Автор благодарен сотрудникам кафедры Математической теории интеллектуальных систем механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова за создание творческой и комфортной обстановки для учебной и научной деятельности.

Публикации автора по теме диссертации

Научные статьи, опубликованные в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности 01.01.09 — «Дискретная математика и математическая кибернетика»

1. Ищенко Р. А. Хроматическое число бипланарных графов без треугольников // Интеллектуальные системы. — 2014. — Т. 18. — С. 223–226. (РИНЦ: 0.164)
2. Ищенко Р. А. О разложении графов на подграфы специального вида // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. — 2016. — Т. 20. — С. 184–192. (РИНЦ: 0.712)
3. Ищенко Р. А. Графы групповых автоматов // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. — 2017. — Т. 21. — С. 111–116. (РИНЦ: 0.474)
4. Ishchenko R. The labeling graphs of definite automata. // Moscow University Mathematics Bulletin. — 2019. — Vol. 74. — P. 198–201. (Scopus, SJR 0.200)
5. Ищенко Р. А. Оценка количества разметок графов групповых автоматов // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. — 2020. — Т. 24. — С. 75–86. (РИНЦ: 0,192)

Прочие (по теме диссертации)

6. Ищенко Р. А. Оценка числа групповых автоматов с одним и тем же графом переходов // Проблемы теоретической кибернетики. Материалы заочного семинара XIX международной конференции. Под редакцией Ю. И. Журавлева.. — 2020. — С. 53–56.
7. Ищенко Р. А. Количество разметок графов дефинитных автоматов // Проблемы теоретической кибернетики. Материалы XIX международной конференции. Под редакцией Ю. И. Журавлева.. — 2021 — С. 56–58.
8. Ищенко Р. А. О разметках графов абелевых автоматов // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. Материалы XII Международной конференции «Интеллектуальные системы и компьютерные науки». — 2021 — Т. 25. — С. 125–128. (РИНЦ 2020: 0,192)

Научное издание

Ищенко Роман Андреевич

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук на тему:
О свойствах разложимых графов

Подписано в печать 12.01.2022. Формат 60×90 1/16. Тираж 100 экз. Заказ 256.

Отдел полиграфии Научной библиотеки МГУ имени М.В. Ломоносова 119192,
Москва, Ломоносовский проспект, 27.