На правах рукописи

Напалков Валерий Валентинович

Задачи описания пространства, сопряженного к гильбертовым пространствам с воспроизводящим ядром, и некоторые приложения

01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

доктора физико-математических наук

Уфа – 2019

Работа выполнена в *Институте математики с вычислительным центром - обособленном структурном подразделении ФГБНУ Уфимского федерального исследовательского центра РАН, отдел теории функций и функционального анализа.*

Официальные оппоненты: **Прохоров Дмитрий Валентинович**
доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического анализа ФГБОУ ВО "СГУ имени Н.Г. Чернышевского", г. Саратов.

Гарифьянов Фархат Нургаязович
доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики ФГБОУ ВО Казанского государственного энергетического университета.

Мелихов Сергей Николаевич
доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры алгебры и дискретной математики института математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича Южного федерального университета.

Ведущая организация: Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук.

Защита состоится «____» _____________ 2019 г. в ____ часов на заседании диссертационного совета *Д 004.006.04* при *ФГБУН Институте математики и механики им. Н.И. Красовского УрО РАН* по адресу: *620990, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.*

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИММ УрО РАН и на сайте ИММ УрО РАН http://www.imm.uran.ru/rus/Dissertation councils/ D 004.006.04/.

Автореферат разослан «____» _____________ 2019 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 004.006.04,
доктор физико-математических наук, *Скарин В.Д.*

Общая характеристика работы

Актуальность работы. Для решения различных задач в пространствах аналитических функций (вопросы полноты систем аналитических функций, задача разложения функций в ряды экспонент и более общих систем функций, решения некоторых классов функциональных уравнений и др.) используется метод перехода в сопряженное пространство, где двойственная задача чаще решается проще. Чтобы использовать такой метод необходимо найти "удачное" описание пространства линейных непрерывных функционалов на данном пространстве аналитических функций. Например, задача о полноте, минимальности, и базисности системы экспонент в некотором пространстве функций H, требует решения интерполяционной задачи в некотором гильбертовом пространстве целых функций H^*. Для решения этой задачи необходимо найти описание пространства H^*. А именно:

1) нужно знать "запас" целых функций, входящих в H^*,

2) иметь явные выражения для нормы, задающей топологию H^*.

Вопросу описания сопряженных пространств к различным пространствам аналитических функций и применению этих описаний посвящены работы многих математиков. Этим занимались Б.Я. Левин, Ю.И. Любарский, Б.А. Державец, В.В. Напалков, О.В. Епифанов, Р.С.Юлмухаметов, G. Köthe, G. Polya ,A.P. Calderon, L. Branges, T.G. Gencev, S. Saitoh, B.A.Taylor и другие математики.

Одним из важных применений описания сопряженного пространства является задача представления аналитических функций рядами экспонент. Эта задача исследовалась А.Ф. Леонтьевым, Б.Я. Левиным, Ю.Ф. Коробейником, В.К Дзядыком, В.В. Напалковым, А.М. Седлецким, Ю.И. Любарским, Ю. И. Мельником, Р.С. Юлмухаметовым, А.С. Кривошеевым и другими математиками. Отметим, что с этой тематикой тесно связан вопрос о полноте, минимальности, и базисности систем экспонент и других систем функций в различных пространствах. Эти вопросами занимались Б.Я. Левин, А. М. Седлецкий, Н.К.

Никольский, Б.С. Павлов, С.В. Хрущев, В.П. Хавин, С.В. Кисляков, Н.А. Широков, K. Seip, Ю.И Любарский, Р.С. Юлмухаметов, Б. Н. Хабибуллин, Ю.С. Белов, А.Д. Баранов, А.А. Боричев и другие математики.

Анализ исследований по данной проблематике показывает, что указанные выше задачи наиболее сложно решаются в пространствах аналитических функций с "жесткой" топологией, например, в нормированных, или гильбертовых пространствах. По этой причине, в таких пространствах, указанные выше задачи не изучены так полно, как в пространствах аналитических функций, в которых топология задана счетным набором норм ("мягкая" топология), например, пространствах $H(G)$. Сформулируем задачу, изучаемую в диссертации, в общем виде.

Пусть X – функциональное топологическое пространство аналитических функций в области $G \subset \overline{\mathbb{C}}$. Термин "функциональное" означает, что функционал $\delta_z : f \to f(z)$, заданный на X, является линейным и непрерывным для любого $z \in G$. Через X^* обозначим совокупность линейных и непрерывных функционалов над X. Во многих задачах возникает необходимость иметь более полную информацию о X^*. Эту информацию можно получить, изучая различные представления X^*. Для представления X^* можно использовать любую полную систему $\mathcal{F} = \{f_\alpha\}_{\alpha \in A}$, где A – множество индексов. Обозначим через $L_\mathcal{F}$ следующий оператор: каждому $S \in X^*$ ставится в соответствие функция:

$$S(f_\alpha) : A \to \mathbb{C}.$$

Из полноты системы $\mathcal{F}$ и теоремы Банаха следует инъективность отображения $L_\mathcal{F} : X^* \to \mathbb{C}^A$, где $\mathbb{C}^A$ – множество комплекснозначных функций от переменного $\alpha \in A$. Для эффективного использования такого представления линейных и непрерывных функционалов на X необходимо решить две задачи:

1. Определить образ $\Im L_\mathcal{F}$.

2. Описать топологию в образе, наведенную сильной топологией сопряженного к X.

В качестве примеров можно рассмотреть:

1. В качестве $\mathfrak{F}$ возьмем $\left\{\frac{1}{z-\xi}, \quad \xi \in \mathbb{C}\backslash\overline{G}\right\}$. Как правило полнота этой системы имеет место. В этом случае $L_{\mathfrak{F}}$ – преобразование Коши. Очень просто выясняется, что $\Im L_{\mathfrak{F}}$ лежит в $H_0(\overline{\mathbb{C}}\backslash\overline{G})$. Более детальные результаты получены в [20], [21],[22],[23], [24].

2. G – выпуклая ограниченная область, система $\mathfrak{F} = \{\exp(\lambda z), \quad \lambda \in \mathbb{C}\}$ полна в X. $L_{\mathfrak{F}}$ в этом случае называется преобразованием Фурье-Лапласа функционала из X^*. В этом случае $\Im L_{\mathfrak{F}} \subset H(\mathbb{C})$. Для пространства $X = H(G)$ эта задача исследовалась Полиа (см., например, [25]). Для пространств аналитических в G функций, имеющих определенный рост вблизи границы см. работы [26],[27],[28].

3. $G = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, $\mathfrak{F} = \{z^n, n \in \mathbb{N}\}$. В этом случае $\Im L_{\mathfrak{F}}$ пространство последовательностей.

Классическая теорема Пэли – Винера является примером решения задачи описания сопряженного пространства для пространства $L_2(-1, 1)$ в терминах преобразования Фурье–Лапласа. Эта теорема нашла применение во многих областях математики. Это как вопросы комплексного вещественного и функционального анализа, так и прикладные вопросы математики: теория передачи информации, анализ сигналов, вейвлет анализ. Как показывают исследования, для решения многих задач комлексного анализа (задачи интерполяции, проблемы уравнений свертки и др.), необходимо решить задачу об описании сопряженного пространства для других гильбертовых пространств аналитических функций.

Цель диссертационной работы. Найти метод решения задачи описания пространства, сопряженного к гильбертову пространству аналитических функций. Решить эту задачу для некоторых конкретных гильбертовых пространств аналитических функций. Найти применение полученных результатов.

Научная новизна. В первой главе диссертации приведены результаты из кандидатской диссертации автора “Ряды экспонент в пространстве Бергмана”, защищенной в 1995 году. А именно, разработан общий метод решения задачи об описании сильно сопряженного пространства к радиально весовому пространству Бергмана в терминах преобразования Фурье – Лапласа. Получен критерий, когда такое описание возможно, и построен пример радиально весового пространства Бергмана, для которого в пространстве преобразований Фурье – Лапласа нельзя ввести эквивалентную интегральную норму.

В первой главе докторской диссертации изложено более подробное доказательство этих результатов и приведены пояснительные рисунки. В этом состоит новизна материала первой главы. Включение в текст докторской диссертации результатов из кандидатской диссертации того же автора было необходимо для полноты изложения материала докторской диссертации. Например, результаты первой главы используются в главе 4 раздел 4.6 для построения примера весового пространства Бергмана, в котором не существует определенного класса ортоподобных систем разложения. Также, для полноты изложения материала, в тексте диссертации сделаны ссылки на более ранние работы автора.

Поэтому, следуя правилам, автор не выносит на защиту результаты первой главы. Основные результаты диссертации, приведенные в остальных главах, являются новыми, и опубликованы в рецензируемых печатных изданиях из списка ВАК после защиты кандидатской диссертации.

Практическая значимость. Результаты, изложенные в диссертации, могут быть использованы как для решения задач комплексного анализа: интерполяция целых функций, проблемы уравнений свертки, спектрального синтеза, теории квазиконформных отображений, так и в прикладных вопросах: теория передачи информации, анализ сигналов, “теория струн”.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на семинарах:

1. Санкт-Петербургский городской семинар по теории операторов и теории функций, ПОМИ РАН, город Санкт-Петербург, руководитель профессор В.П. Хавин и академик РАН С.В. Кисляков.

2. Семинар Отдела математической физики Математического Института РАН им. В.А. Стеклова, город Москва, руководитель академик РАН В.С. Владимиров.

3. Семинар кафедры математического анализа механико–математического факультета МГУ, город Москва, руководитель профессор Т.П. Лукашенко.

4. Семинар по теории функций и комплексному анализу, Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, город Уфа, руководитель член – корр. РАН В.В. Напалков.

5. Городской семинар по теории функций, Башкирский государственный университет, город Уфа, руководитель член – корр. РАН В.В. Напалков.

6. Объединенный семинар Отдела теории приближения функций и Отдела аппроксимации и приложений, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, город Екатеринбург, руководители член – корр. РАН Ю.Н. Субботин и профессор Н.И. Черных.

7. Семинар по геометрической теории функций комплексного переменного, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского, механико-математический факультет, город Саратов, руководитель профессор Д.В. Прохоров.

Основные результаты диссертации докладывались на следующих конференциях:

1. Международная конференция «Спектральная теория операторов и ее приложения», Уфа, 13-15 июня, 2011 г.

2. VI Уфимская международная конференция «Комплексный анализ и дифференциальные уравнения», Уфа, 03–07 октября, 2011 г.

3. Третья международная конференция «Математическая физика и её приложения», Самара, 27 августа–01 сентября, 2012 г.

4. Международная конференция «Динамика, бифуркации и странные аттракторы», Нижний Новгород, 01–05 июля, 2013 г.

5. Международная конференция «Комплексный анализ и смежные вопросы», Санкт-Петербург, 14–18 апреля , 2014 г.

6. Четвертая международная конференция «Математическая физика и ее приложения», Самара, 25 августа–01 сентября, 2014 г.

7. Уфимская международная математическая конференция, Уфа, 27 – 30 сентября, 2016 г.

8. Международная конференция по теории функций, Уфа, 24 – 27 мая, 2017 г.

9. XXVI St.Petersburg Summer Meeting in Mathematical Analysis June 25-30, 2017, St. Petersburg, Russia.

Публикации. Основные положения диссертации, выносимые на защиту, опубликованы в 10 рецензируемых печатных изданиях, входящих в Перечень рецензируемых научных изданий ВАК [1–10].

В дополнение к этому списку, по теме диссертации автором (некоторые работы с соавторами) опубликовано еще 9 печатных работ, из них 3 статьи в рецензируемых журналах, входящих в Перечень рецензируемых научных изданий ВАК [11, 13, 24], 1 статья в рецензируемом журнале, не входящем в Перечень рецензируемых научных изданий ВАК [14], 3 статьи в сборниках трудов конференций [15–17], и 2 тезиса докладов на конференциях [18, 19].

Личный вклад автора. Результаты диссертации, выносимые на защиту, получены лично автором. Часть результатов диссертации, выносимых на защиту ([1, 2, 6, 10]), опубликованы в совместных работах.

Работы [1, 2] являются продолжением совместной работы [24] автора этой диссертации и профессора Р. С. Юлмухаметова. В этих работах задача, поставленная в работе [24], окончательно решена. Следует отметить, что работы [1, 2] используют модифицированный метод работы [24]. Сформулированные в работах [1, 2] результаты доказаны лично автором диссертации. Ринаду Салаватовичу Юлмухаметову в этих работах принадлежат некоторые идеи, которые использовались еще в методе доказательства результатов статьи [24]. Это идея, что интегральный оператор A_G имеет аналитическую функцию в качестве ядра, и также то, что свойства оператора A_G связаны с неравенствами Грунского для конформного отображения единичного круга на область G.

В работе [6] автору диссертации принадлежат сформулированные утверждения и их доказательство. Напалкову Валентину Васильевичу в работе [6] принадлежит указание на связь рассматриваемой задачи с теорией операторов обобщенного дифференцирования Гельфонда–Леонтьева.

В работе [10] автору диссертации принадлежит формулировка и доказательство утверждений, а Напалкову Валентину Васильевичу принадлежит общая постановка задачи.

В диссертацию включены лишь те результаты, которые получены лично автором. Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, обзора литературы, 6 глав и библиографии. Общий объем диссертации 212 страниц, из них 200 страниц текста, включая 6 рисунков. Библиография включает 85 наименований на 8 страницах.

Содержание работы

В Обзоре Литературы приводятся результаты, наиболее близкие к теме данной диссертации, которые были получены ранее. Тем самым, обосновывается актуальность данной темы.

В первой главе изучается радиально весовое пространство Бергмана в круге $B_2(D,\mu)$. Получен критерий, дающий ответ на вопрос, когда в пространстве преобразований Фурье – Лапласа функционалов над $B_2(D,\mu)$ можно ввести интегральную норму эквивалентную норме $B_2^*(D,\mu)$. На основании этого критерия построен пример пространства $B_2(D,\mu)$ такого, что в пространстве $B_2^*(D,\mu)$ нельзя ввести интегральную норму эквивалентную исходной.

Определение. 1.1. *Если $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ непрерывная функция, числа t_1, t, t_2 удовлетворяют условию $-\infty < t_1 \le t \le t_2 < +\infty$. Тогда*

$$D(\varphi, t_1, t_2, t) \overset{def}{=} \frac{t_2 - t}{t_2 - t_1}\varphi(t_1) + \frac{t - t_1}{t_2 - t_1}\varphi(t_2) - \varphi(t). \tag{1}$$

Доказана теорема.

Теорема. 1.1. *В пространстве $\widehat{B}_2(D,\mu)$ можно ввести эквивалентную норму $\|\cdot\|_\nu$ тогда и только тогда, когда для функции*

$$v(t) = \frac{1}{2}\ln\int\limits_0^1 r^{2t}\,d\mu(r), \quad t \in \mathbb{R},\, t \ge 1,$$

выполнено условие:

$$D(v, t_1, t_2, t) \le D((x + \tfrac{1}{2})\ln x, t_1, t_2, t) + C, \quad 1 \le t_1 \le t \le t_2. \tag{2}$$

На основании этой теоремы построен пример неотрицательной борелевской меры m на $\mathbb{R}$, $\operatorname{supp} m = [0,1]$, такой, что в пространстве $\widehat{B}_2(D,m)$ нельзя ввести эквивалентную норму вида $\|\cdot\|_\nu$.

Заметим, что, как отмечалось выше, эти результаты получены в кандидатской диссертации автора, но в первой главе докторской диссертации дано более подробное доказательство с рисунками. В этом состоит новизна материала первой главы. Автор не выносит на защиту основные результаты первой главы, поскольку, формулируемые здесь теоремы и леммы, имеются в кандидатской диссертации, защищенной автором ранее.

Во второй главе рассматривается пространство Бергмана $B_2(G)$, состоящее из функций голоморфных в односвязной области $G \subset \overline{\mathbb{C}}$. Изучена задача об описании пространства $B_2^*(G)$ в терминах преобразования Гильберта. Рассматривается система функций от переменной $z \in G$: $\{1/(z-\xi)^2\}_{\xi \in \mathbb{C}\setminus\overline{G}}$. Каждому линейному непрерывному функционалу над $B_2(G)$, порождаемому функцией $f \in B_2(G)$, поставим в соответствие функцию:

$$\widetilde{f}(\xi) \stackrel{def}{=} (1/(\,\cdot - \xi)^2, f)_{B_2(G)}, \quad \xi \in \mathbb{C}\setminus\overline{G}.$$

Совокупность $\widetilde{f}$, $f \in B_2(G)$ образует гильбертово пространство $\widetilde{B}_2(G)$ со скалярным произведением:

$$(\widetilde{f}, \widetilde{g})_{\widetilde{B}_2(G)} \stackrel{def}{=} (g, f)_{B_2(G)}.$$

Получено необходимое и достаточное условие на область G, при выполнении которого, пространство $\widetilde{B}_2(G)$ эквивалентно пространству $B_2(\mathbb{C}\setminus\overline{G})$. Доказана теорема.

Теорема. 2.2. *Для того, чтобы пространство $\widetilde{B}_2(G)$ было эквивалентно пространству $B_2(\mathbb{C}\setminus\overline{G})$(т.е. эти пространства состояли из одних и тех же функций, и нормы этих пространств были эквивалентны), необходимо и достаточно, чтобы область G была квазикругом.*

Заметим, что ранее С.А. Меренковым [29] доказано, что если область G ограниченный квазикруг, то пространство $\widetilde{B}_2(G)$ эквивалентно пространству

$B_2(\mathbb{C}\backslash\overline{G})$.

В третьей главе изучены ортоподобные системы разложения в гильбертовых пространствах с воспроизводящим ядром. Ранее, для произвольных гильбертовых пространств, системы разложения подобные ортогональным были введены и изучены Т.П. Лукашенко.

В третьей главе дано определение ортоподобной системы разложения для гильбертова пространства с воспроизводящим ядром. Это определение, как показано в диссертации, эквивалентно исходному определению.

Получена формула, по которой можно выписать воспроизводящее ядро гильбертова пространства, если известна ортоподобная система разложения. Последняя формула обобщает хорошо известную формулу, позволяющую выписать воспроизводящее ядро гильбертова пространства, если известен ортонормированный базис. Также доказано, что ортоподобная система разложения полностью определяет пространство с воспроизводящим ядром. Доказана теорема.

Теорема. 3.1. *Пусть в сепарабельном гильбертовом пространстве с воспроизводящим ядром H над полем $\mathbb{C}$ имеется система функций $\{e_\omega(z)\}_{\omega\in\Omega}$, пространство Ω со счетно аддитивной мерой μ счетно конечно. Пусть при любом $z \in M$ функция $e_\omega(z)$ измерима по переменной $\omega \in \Omega$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1. *Система $\{e_\omega(z)\}_{\omega\in\Omega} \subset H$ ортоподобная система разложения с мерой μ в пространстве H в том смысле, что любая функция f из H представляется в виде:*

$$f(z) = \int\limits_{\Omega}^{(H)} (f(\tau), e_\omega(\tau))_H e_\omega(z)\, d\mu(\omega). \tag{3}$$

Здесь интеграл понимается, как интеграл от функции со значениями в гильбертовом пространстве. Равенство понимается как равенство двух *элементов гильбертова пространства.*

2. *Система* $\{e_\omega(z)\}_{\omega\in\Omega} \subset H$ *ортоподобная система разложения с мерой* μ *в пространстве* H *в том смысле, что любая функция* f *из пространства* H *представляется в виде:*

$$f(z) = \int\limits_{\Omega} (f(\tau), e_\omega(\tau))_H e_\omega(z)\, d\mu(\omega), \quad z \in M. \tag{4}$$

Равенство (4) понимается "поточечно" при любом фиксированном $z \in M$*, интеграл понимается как обычный интеграл Лебега.*

3. *Система функций* $\{e_\omega(z)\}_{\omega\in\Omega}$ *принадлежит пространству* H*. Воспроизводящее ядро пространства* H *имеет вид:*

$$K_H(z,\xi) = \int\limits_{\Omega} e_\omega(z) \cdot \overline{e_\omega(\xi)}\, d\mu(\omega), \quad z, \xi \in M. \tag{5}$$

Интеграл здесь понимается как обычный интеграл Лебега. Равенство понимается "поточечно".

4. *Пространство* H *совпадает с пространством* $\widehat{R}_2(\Omega,\mu)$*. Пространства* H *и* $\widehat{R}_2(\Omega,\mu)$ *состоят из одних и тех же элементов, и для любых функций* $h, r \in H$ *выполнено равенство:*

$$(h,r)_H = (h,r)_{\widehat{R}_2}.$$

В четвертой главе изучена задача об описании пространства сопряженного к весовому пространству Бергмана $B_2(G,\mu)$ в терминах преобразования Гильберта. Здесь G – односвязная область в $\mathbb{C}$, μ – неотрицательная борелевская мера на G и $B_2(G,\mu)$ пространство голоморфных в G функций, для кото-

рых
$$\|f\|^2_{B_2(G,\mu)} = \int\limits_G |f(z)|^2\, d\mu(z) < \infty.$$
Предполагается, что пространство $B_2(G,\mu)$ гильбертово, и в пространстве $B_2(G,\mu)$ полна система функций от переменной $z \in G$ $\{\frac{1}{(z-\xi)^2},\ \xi \in \mathbb{C}\backslash\overline{G}\}$. Каждому линейному непрерывному функционалу f^* на $B_2(G,\mu)$, порожденному функцией $f \in B_2(G,\mu)$, поставим в соответствие функцию:
$$\widetilde{f}(\xi) \stackrel{def}{=} f^*\left(\tfrac{1}{(z-\xi)^2}\right) = (\tfrac{1}{(z-\xi)^2}, f(z))_{B_2(G,\mu)} =$$
$$= \int\limits_G \overline{f(z)} \cdot \frac{1}{(z-\xi)^2}\, d\mu(z), \quad \xi \in \mathbb{C}\backslash\overline{G}.$$

Определение. *Функция $\widetilde{f}$ называется преобразованием Гильберта функционала, порожденного функцией $f \in B_2(G,\mu)$.*

В силу полноты системы функций $\{\frac{1}{(z-\xi)^2},\ \xi \in \mathbb{C}\backslash\overline{G}\}$ в пространстве $B_2(G,\mu)$ отображение $f^* \to \widetilde{f}$ инъективно. Совокупность функций $\widetilde{f}$ образует пространство
$$\{\widetilde{f}:\ \widetilde{f}(\xi) = (\tfrac{1}{(z-\xi)^2}, f(z))_{B_2(G,\mu)}\} \stackrel{\text{об}}{=} \widetilde{B}_2(G,\mu),$$
в котором мы рассматриваем наведенную структуру гильбертова пространства, то есть
$$(\widetilde{f},\widetilde{g})_{\widetilde{B}_2(G,\mu)} \stackrel{def}{=} (g,f)_{B_2(G,\mu)}$$
и
$$\|\widetilde{f}\|_{\widetilde{B}_2(G,\mu)} = \|f\|_{B_2(G,\mu)}.$$
Мы изучаем вопрос: когда в пространстве $\widetilde{B}_2(G,\mu)$ можно ввести норму вида:
$$\|\widetilde{f}\|_\nu = \sqrt{\int\limits_{\mathbb{C}\backslash G} |\widetilde{f}(\xi)|^2\, d\nu(\xi)},$$

где ν – неотрицательная мера на $\mathbb{C}\backslash\overline{G}$, эквивалентную наведенной норме $\|\widetilde{f}\|_{\widetilde{B}_2(G,\mu)}$?

Установлена связь задачи об описании с вопросом существования в пространстве $B_2(G,\mu)$ специальной ортоподобной системы разложения. В главе 4 доказаны теоремы.

Теорема. 4.1. *Пусть H – гильбертово пространство с вопроизводящим ядром, состоящее из функций, заданных в области $G \subset \mathbb{C}$. Норма в пространстве H будет иметь интегральный вид*

$$\|f\|_H = \sqrt{\int\limits_G |f(\xi)|^2\, d\nu(\xi)} \tag{6}$$

тогда и только тогда, когда система функций $\{K_H(\xi,t)\}_{t\in G}$ будет неотрицательной ортоподобной системой разложения с мерой ν в пространстве H.

Следствие. *Гильбертово пространство с воспроизводящим ядром H, состоящее из аналитических в области G функций, совпадает с пространством $B_2(G,\mu)$ для некоторой меры μ тогда и только тогда, когда семейство воспроизводящих ядер $\{K_H(\xi,t)\}_{t\in G}$ пространства H есть неотрицательная ортоподобная система разложения в H с мерой μ, т.е. любая функция $g \in H$ представляется в виде:*

$$g(\xi) = \int\limits_G (g(\tau), K_H(\tau,t))_H K_H(\xi,t)\, d\mu(t), \quad \xi \in G.$$

Теорема. 4.2. *Гильбертово пространство с воспроизводящим ядром H, состоящее из функций от переменной, $\xi \in \mathbb{C}\backslash\overline{G}$ совпадает с пространством $\widetilde{B}_2(G,\mu)$ тогда и только тогда, когда семейство функций $\{\frac{1}{(\xi-t)^2}\}_{t\in G}$ есть ортоподобная система разложения в H с мерой μ, т.е. любая функция $g \in H$*

представляется в виде:

$$g(\xi) = \int\limits_G (g(\tau), \tfrac{1}{(\tau-t)^2})_H \tfrac{1}{(\xi-t)^2}\, d\mu(t), \quad \xi \in \mathbb{C}\backslash\overline{G}. \tag{7}$$

Теорема. 4.3. *Для того, чтобы в пространстве $\widetilde{B}_2(G,\mu)$ можно было ввести эквивалентную исходной норму:*

$$\|\widetilde{f}\|_\nu = \sqrt{\int\limits_{\mathbb{C}\backslash G} |\widetilde{f}(\xi)|^2\, d\nu(\xi)},$$

где ν – неотрицательная борелевская мера на $\mathbb{C}\backslash G$, необходимо и достаточно, чтобы существовал линейный непрерывный оператор S, задающий автоморфизм банахова пространства $B_2(G,\mu)$, такой, что система $\{S\left(\frac{1}{(z-\xi)^2}\right)\}_{\xi\in\mathbb{C}\backslash\overline{G}}$ является ортоподобной системой разложения с мерой ν в пространстве $B_2(G,\mu)$, т.е. любой элемент $f \in B_2(G,\mu)$ можно представить в виде:

$$f(z) = \int\limits_{\mathbb{C}\backslash\overline{G}} (f(\tau), S_\tau \tfrac{1}{(\tau-\xi)^2})_{B_2(G,\mu)} S_z \tfrac{1}{(z-\xi)^2}\, d\nu(\xi), \quad z \in G.$$

Также приведены условия, при выполнении которых, решается задача об описании сопряженного пространства.

Теорема. 4.4. *Пусть существует оператор S, осуществляющий автоморфизм пространства $B_2(G,\mu)$, который переводит семейство воспроизводящих ядер $\{K_H(z,t)\}_{t\in G}$ на семейство ядер Гильберта $\{\frac{1}{(z-\tau)^2}\}_{\tau\in\mathbb{C}\backslash\overline{G}}$. Тогда в пространстве $\widetilde{B}_2(G,\mu)$ можно ввести эквивалентную интегральную норму вида:*

$$\|\widetilde{f}\|_\nu = \sqrt{\int\limits_{\mathbb{C}\backslash\overline{G}} |\widetilde{f}(\xi)|^2\, d\nu(\xi)},$$

где мера ν определяется следующим образом: оператор S определяет отобра-

жение

$$\tau = \rho(t);\ \rho : G \to \mathbb{C}\backslash\overline{G}$$

из равенства:

$$SK_H(z,t) = \tfrac{1}{(z-\rho(t))^2}, \quad t \in G.$$

Пусть P – множество в G. Тогда $Q \stackrel{def}{=} \rho(P)$ есть множество в $\mathbb{C}\backslash\overline{G}$, и мера $\nu(Q) \stackrel{def}{=} \mu(P)$.

Также в четвертой главе приведены различные примеры ортоподобных систем разложения. Изучается задача об описании пространства сопряженного к весовому пространству целых функций в $\mathbb{C}^n$ в терминах специальной системы функций. Обозначим через H_μ пространство всех целых функций g из $\mathbb{C}^n$ для которых

$$\|g\|^2_{H_\mu} \stackrel{def}{=} \int\limits_{\mathbb{C}^n} |g(\xi)|^2\, d\mu(\xi) < \infty,$$

где μ есть неотрицательная борелевская мера на $\mathbb{C}^n$.

Пространство H_μ есть гильбертово пространство со скалярным произведением:

$$(f,g)_{H_\mu} = \int\limits_{\mathbb{C}^n} f(\xi)\overline{g(\xi)}\, d\mu(\xi).$$

Мы также предполагаем, что для любой точки $\xi \in \mathbb{C}^n$ функционал $f \longrightarrow f(\xi)$ является линейным непрерывным функционалом над H_μ. В этом случае пространство H_μ является гильбертовым пространством с воспроизводящим ядром. Пусть $K_{H_\mu}(z,\xi), z, \xi \in \mathbb{C}^n$ – воспроизводящее ядро пространства H_μ. Каждому линейному непрерывному функционалу над H_μ, порождаемому функцией $f \in H_\mu$, поставим в соответствие функцию:

$$\widetilde{f}(\xi) \stackrel{def}{=} (K_{H_\mu}(\cdot,\overline{\xi}), f)_{H_\mu}, \quad \xi \in \mathbb{C}^n.$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема. 4.5. *Совокупность функций*

$$\widetilde{H}_\mu \stackrel{def}{=} \{\widetilde{f} | \widetilde{f}(w) = (K_{H_\mu}(z, \overline{w}), f(z))_{H_\mu}, \quad \forall f \in H_\mu, \, w \in \mathbb{C}^n\}$$

есть гильбертово пространство целых функций из $\mathbb{C}^n$ *со скалярным произведением* $(\widetilde{f}, \widetilde{g})_{\widetilde{H}_\mu} \stackrel{def}{=} (g, f)_{H_\mu}$*; и*

$$\|\widetilde{f}\|^2_{\widetilde{H}_\mu} = \int\limits_{\mathbb{C}^n} |\widetilde{f}(w)|^2 \, d\mu(\overline{w}), \quad \widetilde{f} \in \widetilde{H}_\mu. \tag{8}$$

Если $g(w), w \in \mathbb{C}^n$ *– целая функция, для которой*

$$\int\limits_{\mathbb{C}^n} |g(w)|^2 \, d\mu(\overline{w}) < \infty,$$

то $g \in \widetilde{H}_\mu$.

Последний результат обобщает известную теорему Баргмана [30], сформулированную ранее для пространства Баргмана – Фока.

В пятой главе изучены нормированные ортоподобные системы разложения в пространствах $B_2(G, \mu)$. Для краткости вместо $B_2(G, \mu)$, $\widetilde{B}_2(G, \mu)$ мы будем писать соответственно B_2 и $\widetilde{B}_2$.

Предположим, что существует оператор $\mathcal{A} : B_2 \to B_2$, который переводит семейство функций

$$\left\{ \frac{1/(z-\xi)^2}{\|1/(z-\xi)^2\|_{B_2}} \right\}_{\xi \in \mathbb{C} \setminus \overline{G}}$$

на семейство функций

$$\left\{ \frac{K_{B_2}(z, t)}{\sqrt{K_{B_2}(t, t)}} \right\}_{t \in G}.$$

Тогда $\mathcal{A}$ определяет отображение ρ: $\mathbb{C} \setminus \overline{G} \to G$, $\xi \to \rho(\xi)$ по правилу:

$$\mathcal{A}\left(\frac{1/(z-\xi)^2}{\|1/(z-\xi)^2\|_{B_2}} \right) = \frac{K_{B_2}(z, \rho(\xi))}{\sqrt{K_{B_2}(\rho(\xi), \rho(\xi))}} \tag{9}$$

Предположим, что $\rho : G \mapsto \mathbb{C}\backslash\overline{G}$ – некоторый гомеоморфизм области G на область $\mathbb{C}\backslash\overline{G}$. Для элементов $f \in B_2$ рассмотрим следующие преобразования:

$$\widehat{f}^{\rho}(\xi) \stackrel{def}{=} \left(\tfrac{K_{B_2}(\cdot,\rho(\xi))}{\|K_{B_2}(\cdot,\rho(\xi))\|_{B^2}}, f\right)_{B_2}, \quad \xi \in \mathbb{C}\backslash\overline{G},$$

$$\widetilde{f}^{N}(\xi) \stackrel{def}{=} \left(\frac{1/(z-\xi)^2}{\|1/(z-\xi)^2\|_{B_2}}, f\right)_{B_2}, \quad \xi \in \mathbb{C}\backslash\overline{G}.$$

И пусть

$$\begin{aligned} \widehat{B}_2^{\rho} &\stackrel{def}{=} \{\widehat{f}^{\rho} \colon\ f \in B_2\},\ (\widehat{f}^{\rho}, \widehat{g}^{\rho})_{\widehat{B}_2^{\rho}} \stackrel{def}{=} (g, f)_{B_2}, \\ \widetilde{B}_2^{N} &\stackrel{def}{=} \{\widetilde{f}^{N} \colon\ f \in B_2\},\ (\widetilde{f}^{N}, \widetilde{g}^{N})_{\widetilde{B}_2^{N}} \stackrel{def}{=} (g, f)_{B_2}. \end{aligned} \tag{10}$$

Доказана теорема.

Теорема. 5.1. *Следующие условия эквивалентны:*

1. *Существует оператор $\mathcal{A}$, осуществляющий изометрию пространства B_2 на себя, который отображает систему функций*

$$\left\{\frac{1/(z-\xi)^2}{\|1/(z-\xi)^2\|_{B_2}}\right\}_{\xi\in\mathbb{C}\backslash\overline{G}}$$

на систему

$$\left\{\frac{K_{B_2}(z,t)}{\sqrt{K_{B_2}(t,t)}}\right\}_{t\in G}.$$

2. *Существует гомеоморфное отображение ρ области $\mathbb{C}\backslash\overline{G}$ на область G такое, что норма в пространстве $\widetilde{B}_2$ имеет вид:*

$$\|g\|_{\widetilde{B}_2} = \sqrt{\int\limits_{\mathbb{C}\backslash\overline{G}} |g(\xi)|^2 \tfrac{K_{B_2}(\rho(\xi),\rho(\xi))}{\|1/(z-\xi)^2\|_{B_2}^2}\, d\mu(\rho(\xi))}, \quad g \in \widetilde{B}_2. \tag{11}$$

При этом пространства $\widetilde{B}_2^N$ и $\widehat{B}_2^{\rho}$ совпадают.

В шестой главе найдены необходимые и достаточные условия, при выполнении которых, два гильбертовых пространства с воспроизводящим ядром, имеющих одну и ту же область определения, совпадают или эквивалентны. Пусть H_1 – гильбертово пространство с воспроизводящим ядром, состоящее из функций заданных на множестве точек M. Элементами пространства H_1 являются функции от переменной $t \in M$. Пусть Ω_1 – некоторое пространство с мерой μ_1. В качестве Ω_1 можно взять, например, область в комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Также в качестве Ω_1 может выступать счетное множество точек, при этом μ_1, например, считающая мера.

Пусть $\{e_1(\cdot,\xi)\}_{\xi\in\Omega_1}$ – ортоподобная система разложения с мерой μ_1 в пространстве H_1, т.е. система $\{e_1(\cdot,\xi)\}_{\xi\in\Omega_1}$ принадлежит пространству H_1 и любая функция $f \in H_1$ может быть записана в виде:

$$f(t) = \int\limits_{\Omega_1} (f(\cdot), e_1(\cdot,\eta))_{H_1} e_1(t,\eta)\, d\mu_1(\eta), \quad \forall t \in M. \tag{12}$$

Система функций $\{e_1(\cdot,\xi)\}_{\xi\in\Omega_1}$, очевидно, полна в пространстве H_1. Каждому линейному непрерывному функционалу над H_1, порождаемому функцией $f \in H_1$, поставим в соответствие функцию:

$$\widetilde{f}(\xi) \stackrel{def}{=} (e_1(\cdot,\xi), f)_{H_1}, \quad \xi \in \Omega_1.$$

Совокупность $\widetilde{f}$, $f \in H_1$ образует гильбертово пространство

$$\widetilde{H}_1 = \{\widetilde{f},\ f \in H_1\}$$

со скалярным произведением

$$(\widetilde{f}, \widetilde{g})_{\widetilde{H}_1} \stackrel{def}{=} (g, f)_{H_1}$$

и нормой

$$\|\widetilde{f}\|_{\widetilde{H}_1} \stackrel{def}{=} \|f\|_{H_1}.$$

При любом фиксированном значении $\tau \in M$ функция $e_1(\tau,\eta)$, $\eta \in \Omega_1$ обладает свойством:

$$\int\limits_{\Omega_1} |e_1(\tau,\eta)|^2 \, d\mu_1(\eta) < \infty. \tag{13}$$

Обозначим через $R_1(\Omega_1,\mu_1)$ замыкание линейной оболочки системы функций $\{e_1(\tau,\cdot)\}_{\tau\in M}$ относительно нормы:

$$\|\cdot\|_I \stackrel{def}{=} \sqrt{\int\limits_{\Omega} |\cdot|^2 \, d\mu_1}.$$

Система функций $\{e_1(\tau,\cdot)\}_{\tau\in M}$ принадлежит пространству $\widetilde{H}_1$. Справедлива

Лемма. 6.1. *Пространство $\widetilde{H}_1$ совпадает с пространством $R_1(\Omega_1,\mu_1)$, т.е. пространства $\widetilde{H}_1$ и $R_1(\Omega_1,\mu_1)$ состоят из одних и тех же функций и скалярные произведения пространств $\widetilde{H}_1$, $R_1(\Omega_1,\mu_1)$ совпадают, т.е.*

$$(h,q)_{\widetilde{H}_1} = (h,g)_{R_1(\Omega_1,\mu_1)}, \quad \forall h,g \in \widetilde{H}_1 = R_1(\Omega_1,\mu_1).$$

Далее, пусть H_2 – гильбертово пространство с воспроизводящим ядром, состоящее из функций заданных на множестве точек M. Пусть $\{e_2(\cdot,\xi)\}_{\xi\in\Omega_2}$ ортоподобная система разложения с мерой μ_2 в пространстве H_2, т.е. система $\{e_2(\cdot,\xi)\}_{\xi\in\Omega_2}$ принадлежит пространству H_2, и любая функция $f \in H_2$ может быть представлена в виде:

$$f(t) = \int\limits_{\Omega_2} (f(\cdot), e_2(\cdot,\eta))_{H_2} e_2(\cdot,\eta) \, d\mu_2(\eta), \quad t \in M.$$

Система функций $\{e_2(\cdot,\xi)\}_{\xi\in\Omega_2}$ полна в пространстве H_2. Каждому линейному непрерывному функционалу над H_2, порождаемому функцией $f \in H_2$, поставим в соответствие функцию:

$$\widehat{f}(\xi) \stackrel{def}{=} (e_2(\cdot,\xi), f)_{H_2}, \quad \xi \in \Omega_2.$$

Совокупность $\widehat{f}$, $f \in H_2$ образует гильбертово пространство

$$\widehat{H}_2 = \{\widehat{f},\, f \in H_2\}$$

со скалярным произведением

$$(\widehat{f},\widehat{g})_{\widehat{H}_2} \stackrel{def}{=} (g, f)_{H_2}, \quad f, g \in H_2 \tag{14}$$

и нормой

$$\|\widehat{f}\|_{\widehat{H}_2} \stackrel{def}{=} \|f\|_{H_2}, \quad f \in H_2.$$

Система функций $\{e_2(\tau,\cdot)\}_{\tau\in M}$ принадлежит пространству $\widehat{H}_2$, и для любого фиксированного значения $\tau \in M$ функция $e_2(\tau,\eta)$, $\eta \in \Omega_2$ обладает свойством:

$$\int\limits_{\Omega_2} |e_2(\tau,\eta)|^2\, d\mu_2(\eta) < \infty.$$

Обозначим через $R_2(\Omega_2,\mu_2)$ замыкание линейной оболочки системы функций $\{e_2(\tau,\cdot)\}_{\tau\in M}$ относительно нормы:

$$\|\cdot\|_I = \sqrt{\int\limits_{\Omega_2} |\cdot|^2\, d\mu_2}.$$

Также справедлива следующая

Лемма. 6.2. *Пространство $\widehat{H}_2$ совпадает с пространством $R_2(\Omega_2,\mu_2)$, т.е. пространства $\widehat{H}_2$ и $R_2(\Omega_2,\mu_2)$ состоят из одних и тех же функций, и скалярные произведения пространств $\widehat{H}_2$, $R_2(\Omega_2,\mu_2)$ совпадают.*

Доказаны теоремы.

Теорема. 6.1. *Для того, чтобы пространства H_1 и H_2 совпадали, т.е. состояли из одних из тех же функций и было выполнено соотношение*

$$(f,g)_{H_1} = (f,g)_{H_2}, \quad \forall f,g \in H_1 = H_2,$$

необходимо и достаточно, чтобы существовал линейный непрерывный взаимно-однозначный унитарный оператор B, действующий из пространства $\widetilde{H}_1$ на $\widehat{H}_2$, такой, что выполнено соотношение:

$$B\colon e_1(\tau,\cdot) \longrightarrow e_2(\tau,\cdot), \quad \forall \tau \in M. \tag{15}$$

Теорема. 6.2. *Для того чтобы пространства H_1 и H_2 были эквивалентны, т.е. состояли из одних и тех же функций, и, при этом, было выполнено соотношение*

$$C_1\|f\|_{H_1} \leq \|f\|_{H_2} \leq C_2\|f\|_{H_1}, \quad \forall f \in H_1 = H_2, \tag{16}$$

где $C_1, C_2 > 0$ – некоторые постоянные, необходимо и достаточно, чтобы существовал линейный непрерывный взаимно-однозначный самосопряженный оператор B, действующий из пространства $\widetilde{H}_1$ на $\widehat{H}_2$, такой, что

$$B\colon e_1(\tau,\cdot) \longrightarrow e_2(\tau,\cdot), \quad \forall \tau \in M. \tag{17}$$

Далее мы изучаем гильбертовы пространства с воспроизводящим ядром H_1 и H_2 состоящие из функций, заданных на множестве точек M_1 и M_2 соответственно, в которых есть ортоподобные системы разложения $\{e_1(\cdot,\xi)\}_{\xi\in\Omega_1}$ и $\{e_2(\cdot,\xi)\}_{\xi\in\Omega_2}$. Предполагается, что что $\Omega_1 = \Omega_2 \overset{\text{об}}{=} \Omega$.

В главе 6 получены необходимые и достаточные условия, при которых пространства $R_1(\Omega,\mu_1)$ и $R_2(\Omega,\mu_2)$ или, что тоже самое, пространства $\widetilde{H}_1$ и $\widehat{H}_2$ совпадают. Для введенных пространств H_1 и H_2 доказана следующая

Теорема. 6.3. *Предположим, что пространства H_1 и H_2 таковы, что пространство $R_1(\Omega, \mu_1)$ совпадает с пространством $R_2(\Omega, \mu_2)$. Тогда существует линейный непрерывный взаимно-однозначный унитарный оператор A, действующий из H_1 на пространство H_2 такой, что*

$$A : e_1(\cdot, \xi) \longrightarrow e_2(\cdot, \xi), \quad \forall \xi \in \Omega. \tag{18}$$

Основные результаты диссертации

1. Решена задача об образе пространства Бергмана $B_2(G)$ в плоской области $G \subset \mathbb{C}$ при двумерном преобразовании Гильберта. Дан критерий, когда этот образ совпадает с пространством Бергмана $B_2(\mathbb{C} \backslash \overline{G})$. Для решения этой задачи применены результаты из теории квазиконформных отображений.Тем самым, дано еще одно определение квазикруга.

2. Для решения задачи об описании пространства, сопряженного к гильбертову пространству аналитических функций, применена теория систем разложения подобных ортогональным, разработанная Т.П. Лукашенко. Задача об описании сопряженного пространства, сведена к вопросу существования в данном пространстве специальной ортоподобной системы разложения. Метод проиллюстрирован на примере весового пространства Бергмана и преобразования Гильберта.

3. Изучены ортоподобные системы разложения для гильбертова пространства с воспроизводящим ядром. Получена формула, по которой можно выписать воспроизводящее ядро пространства, зная ортоподобную систему разложения. Приведено эквивалентное исходному определение ортоподобной системы для гильбертова пространства с воспроизводящим ядром.

4. Изучена задача об описании пространства, сопряженного к гильбертову пространству с воспроизводящим ядром, в терминах преобразования от-

носительно некоторой специальной системы функций. Получен результат, связывающий эту задачу с теорией ортоподобных систем разложения.

5. Получен критерий, когда в данном гильбертовом пространстве с воспроизводящим ядром, норма имеет интегральный вид.

6. Изучены нормированные ортоподобные системы в весовых пространствах Бергмана. При определенных условиях найден явный вид интегральной нормы в образе весового пространства Бергмана при двумерном преобразовании Гильберта.

7. Построены примеры ортоподобных систем разложения в различных гильбертовых пространствах аналитических функций.

8. Для определенного класса весовых гильбертовых пространств целых функций изучен вопрос, когда пространство преобразований линейных непрерывных функционалов совпадает с исходным пространством. Тем самым, для весового пространства целых функций, получен аналог известной теоремы Баргмана. Изучены операторы умножения на независимые переменные в весовом гильбертовом пространстве целых функций, заданных на $\mathbb{C}^n$, и найден явный вид сопряженных операторов.

9. Получен критерий, когда два гильбертовых пространства с воспроизводящим ядром, состоящие из функций, с одной и той же областью определения, совпадают или эквивалентны[1].

[1] Термин “гильбертовы пространства с воспроизводящим ядром эквивалентны” означает, что эти пространства состоят из одних и тех же функций, и нормы этих пространств эквивалентны.

Список публикаций автора из списка ВАК, в которых опубликованы основные положения, выносимые на защиту

1. V. V. Napalkov Jr., R.S. Yulmukhametov. Criterion of surjectivity of the Cauchy transform operator on a Bergman space // Lyubich, Yu. (ed.) et al., Entire functions in modern analysis. Boris Levin memorial conference. Proceedings of the conference, Tel-Aviv, Israel, December 14-19, 1997. Ramat-Gan: Bar-Ilan University, Gelbart Research Institute for Mathematical Sciences, Isr. Math. Conf. Proc. — Vol. 15. — 2001. — P. 261–267.

2. В. В. Напалков (мл.), Р. С Юлмухаметов. О преобразовании Гильберта в пространстве Бергмана // Матем. заметки. — 2001. — Т. 70, № 1. — С. 68–78.

3. В. В. Напалков (мл.). Различные представления пространства аналитических функций и задача описания сопряженного пространства // Доклады Академии наук. — 2002. — Т. 387, № 2. — С. 164–167.

4. В. В. Напалков (мл.). Интегральные преобразования весовых пространств Бергмана // Доклады Академии наук. — 2004. — Т. 397, № 1. — С. 23–26.

5. V. V. Napalkov Jr. Analogue of the Fock space // J. Integral transforms and special function. — 2007. — Vol. 18, no. 2. — P. 133–138.

6. В. В. Напалков, В. В. Напалков (мл.). Сопряженные операторы в пространствах типа Фока // Доклады Академии наук. — 2007. — Т. 414, № 5. — С. 591–593.

7. В. В. Напалков (мл.). Об ортоподобных системах разложения в пространстве аналитических функций и задаче описания сопряженного пространства // Уфимский матем. журнал. — 2011. — Т. 3, № 1. — С. 31–42.

8. В. В. Напалков (мл.). Об эквивалентной интегральной норме в сопряженном пространстве // Уфимский матем. журнал. — 2011. — Т. 3, № 4. — С. 122–132.

9. В. В. Напалков (мл.). Ортоподобные системы разложения в пространствах с воспроизводящим ядром // Уфимский матем. журн. — 2013. — Т. 5, № 4. — С. 91–104.

10. В. В. Напалков, В. В. Напалков (мл.). Об изоморфизме гильбертовых пространств с воспроизводящим ядром // Доклады Академии наук. — 2017. — Т. 474, № 6. — С. 665–667.

Список прочих публикаций автора по теме диссертации

11. В. В. Напалков (мл.), Р. С. Юлмухаметов. Весовые преобразования Фурье–Лапласа аналитических функционалов в круге // Матем. сб. — 1992. — Т. 183, № 11. — С. 139–144.

12. В. В. Напалков (мл.), Р.С. Юлмухаметов. О преобразовании Коши функционалов на пространстве Бергмана // Матем. сб. — 1994. — Т. 185, № 7. — С. 77–86.

13. В. В. Напалков (мл.). О преобразовании Бореля на пространстве Дирихле // Матем. заметки. — 1996. — Т. 60, № 1. — С. 58–65.

14. В. В. Напалков (мл.). Изоморфизм гильбертовых пространств с воспроизводящим ядром и пространство состояний квантовомеханической системы // Известия Уфимского научного центра РАН. — 2017. — № 1. — С. 5–8.

15. В. В. Напалков (мл.). Сопряженные пространства к весовому пространству целых функций // Труды института математики с ВЦ УНЦ РАН, Выпуск 1. — Уфа : БашГУ, 2008. — С. 185–191.

16. В. В. Напалков (мл.). О преобразовании Фурье - Лапласа аналитических функционалов // Актуальные проблемы математики. Математические методы в естествознании: межвуз. науч. сб., ISBN 5-86911-259-1. — Уфа : Уфимский гос. авиационный технический университет, 1999.

17. В. В. Напалков (мл.). Преобразование Гильберта и ортоподобные системы разложения // Вестник Уфимского государственного авиационного технического университета, Сер.: Фундаментальная и прикладная математика, 9:3, (Теория функций) ISSN 1992-6502. — 2007. — Т. 387, № 2. — С. 36–39.

18. В. В. Напалков (мл.). Необходимое условие сюръективности оператора преобразования Коши // Международная конференция по комплексному анализу и смежным вопросам, посвященная памяти чл.-корр. АН СССР А.Ф. Леонтьева, Тезисы докладов. — Н.Новгород : Нижегородский госуниверситет, 1997. — С. 51–52.

19. В. В. Напалков (мл.). Об аналоге пространства Фока // Международная конференция Функциональные пространства, теория приближений, нелинейный анализ, посвященная столетию Сергея Михайловича Никольского (Москва, 23–29 мая 2005 г.),Сборник тезисов. — Москва : МИАН, 2005. — С. 100.

Цитированная литература

20. В.И. Луценко, Р.С. Юлмухаметов. Обобщение теоремы Винера–Пэли на функционалы в пространствах Смирнова // Труды Математического института АН СССР им. Стеклова. — Т. 200. — 1991. — С. 245–254.

21. Ю. И. Любарский. Теорема Винера-Пэли для выпуклых множеств // Изв. АН Арм. ССР. Математика. — 1988. — Т. 23, № 2. — С. 162–172.

22. G. Köthe G. Dualität in der funktionen theorie // J. Reine und angew. Math. — 1953. — Vol. 191, no. 1/2. — P. 30–49.

23. Б. А. Державец. Пространства функций, аналитических в выпуклых областях $\mathbb{C}^n$ и имеющих заданное поведение вблизи границы // Доклады АН СССР. — 1984. — Т. 276, № 6. — С. 1297–1300.

24. В. В. Напалков (мл.), Р.С. Юлмухаметов. О преобразовании Коши функционалов на пространстве Бергмана // Матем. сб. — 1994. — Т. 185, № 7. — С. 77–86.

25. Хёрмандер Л. Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных. — Москва : Мир, 1968. — С. 279.

26. Р. С. Юлмухаметов. Пространство аналитических функций, имеющих заданный рост вблизи границы // Матем. заметки. — 1982. — Т. 32, № 1. — С. 41–57.

27. В. В. Напалков. Пространства аналитических функций заданного роста вблизи границы // Изв. АН СССР, сер.матем. — 1987. — Т. 51, № 2. — С. 287–305.

28. О. В. Епифанов. Двойственность одной пары пространств аналитических функций ограниченного роста // Доклады АН СССР. — 1991. — Т. 319, № 6. — С. 1297–1300.

29. S. A. Merenkov. On the Cauchy transform of the Bergman space // Математическая физика, анализ, геометрия. — 2000. — Т. 7, № 1. — С. 119–127.

30. D. J. Newman, H. S. Shapiro. Certain Hilbert spaces of entire functions // Bull. Amer. Math. Soc. — 1966. — Vol. 72, no. 6. — P. 971–977.

Научное издание

Напалков Валерий Валентинович

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

доктора физико-математических наук на тему:

Задачи описания пространства, сопряженного к гильбертовым пространствам

с воспроизводящим ядром, и некоторые приложения