Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
“Национальный исследовательский университет
“Высшая школа экономики”

Факультет математики

На правах рукописи

Лавров Алексей Николаевич

Геометрия пространств модулей полустабильных пучков ранга 2 на проективном пространстве

Резюме диссертации
на соискание ученой степени
кандидата математических наук

Научный руководитель:
д. ф.-м. н., профессор
Тихомиров Александр Сергеевич

Москва – 2021

Введение

После того, как М. Маруяма [12] в 1977 году доказал существование проективной схемы модулей, параметризующей классы S-эквивалентности полустабильных пучков на проективном многообразии, изучение геометрии таких схем модулей стало центральной темой исследований в алгебраической геометрии. Несмотря на то, что известно много для случая кривых и поверхностей, общие результаты для трёхмерных многообразий всё ещё отсутствуют. В действительности, пространства модулей пучков на 3-мерных многообразиях становятся очень сложными объектами для изучения (как иллюстрирует формулировка Р. Вакиля закона Мерфи [7]), в частности, с несколькими неприводимыми компонентами различных размерностей.

Цель диссертации состоит в дальнейшем продвижении изучения пространства модулей полустабильных пучков ранга 2 на $\mathbb{P}^3$ с фиксированными классами Черна $c_1 = 0,\ c_2 = k,\ c_3 = 0$, которое мы будем обозначать через $\mathcal{M}(k)$. Вопросы геометрии таких пространств, например, количество неприводимых компонент, менее исследованы по сравнению с изучением геометрии схем Гильберта кривых в проективном 3-мерном пространстве.

Резюме имеет следующую структуру. В первом разделе мы напоминаем различные определения стабильности пучков на проективных гладких многообразиях и приводим некоторые свойства полустабильных пучков. В разделе 2 мы напоминаем основы GIT-конструкции схемы модулей полустабильных пучков. Разделы 1 и 2 в основном следует содержанию книги [8]. В разделе 3 мы определяем рефлексивные пучки и описываем их свойства. В разделе 4 мы перечисляем все известные неприводимые компоненты схем модулей $\mathcal{M}(k),\ k \geq 1$. Наконец, раздел 5 содержит изложение основных результатов настоящей диссертации, а именно, в этом разделе описываются новые неприводимые компоненты схем $\mathcal{M}(k),\ k \geq 3$.

1 Стабильность пучков

Исторически понятие стабильности когерентного пучка впервые возникло в контексте векторных расслоений на алгебраических кривых [14]: пусть X – гладкая проективная кривая над алгебраически замкнутым полем k, и пусть E – локально свободный пучок ранга r и степени $\deg(E)$. Определим *наклон* расслоения E как $\mu(E) = \frac{\deg(E)}{r}$. Тогда E называется (полу)стабильным, если для всех подпучков $F \subset E$ с $0 < \mathrm{rk}(F) < \mathrm{rk}(E)$ имеет место неравенство $\mu(F)(\leq)\mu(E)$.

Если мы перейдём от пучков на кривых к многообразиям большей размерности, то понятие стабильности может быть обобщено следующим образом. Пусть $(X, \mathcal{O}(1))$ – поляризованное гладкое проективное многоообразие размерности d над алгебраически замкнутым полем k. Напомним, что эйлеровой характеристикой когерентного пучка E называется число $\chi(E) = \Sigma(-1)^i h^i(X,E)$, где $h^i(X,E) = \dim_k H^i(X,E)$. Тогда многочлен Гильберта $P(E)$ задаётся отображением $m \mapsto \chi(E \otimes \mathcal{O}(m))$.

Определение 1 *Носителем пучка E называется замкнутое множество* $\mathrm{Supp}(E) = \{x \in X \mid E_x \neq 0\}$. *Размерность пучка* $\dim(E)$ *– это размерность его носителя.*

Определение 2 *Пучок E называется чистым размерности d, если для всех нетривиальных когерентных подпучков $F \subset E$ имеет место равенство* $\dim(F) = d$.

Определение 3 *Для любого пучка E на X существует открытое плотное подмножество $U \subset X$, такое, что $E|_U$ – локально свободный пучок. Рангом* $\mathrm{rk}(E)$ *пучка E называется ранг векторного расслоения $E|_U$.*

Определение 4 *Приведенным многочленном Гильберта $p(E)$ когерентного пучка E размерности d называется многочлен*

$$p(E,m) := \frac{P(E,m)}{\mathrm{rk}(E)}.$$

Напомним, что существует естественный порядок на множестве многочленов, заданный лексикографическим порядком коэффициентов. Точнее, $f \leq g$ тогда и только тогда, когда $f(m) \leq g(m)$ при $m \gg 0$. Аналогично, $f < g$ тогда и только тогда, когда $f(m) < g(m)$ при $m \gg 0$. Теперь мы готовы определить понятие стабильности.

Определение 5 *Когерентный пучок E размерности d называется полустабильным, если E является чистым и для любого собственного подпучка $F \subset E$ имеет место $p(F) \leq p(E)$. Пучок E называется стабильным, если E полустабилен и неравенство строгое, т. е. $p(F) < p(E)$ для всех собственных подпучков $F \subset E$.*

Утверждение 1 (см. [8, Cor. 1. 2. 8]) *Любой стабильный пучок E на X является простым, т. е.* $\mathrm{End}(E) \simeq k$.

Другим способом определения стабильности пучка на многообразии большой размерности является непосредственное обобщение понятия наклона. А именно, пусть E – когерентный пучок размерности $d = \dim(X)$, и H – обильный дивизор, ассоциированный с $\mathcal{O}(1)$. Степень пучка E может быть определена следующим образом

$$\deg(E) := c_1(E).H^{n-1},$$

и наклон пучка E

$$\mu(E) := \frac{\deg(E)}{\mathrm{rk}(E)}.$$

Определение 6 *Когерентный пучок E размерности $d = \dim(X)$ называется μ-(полу)стабильным, если E является чистым и имеет место неравенство $\mu(F)(\leq)\mu(E)$ для всех подпучков $F \subset E$, таких, что $0 < \mathrm{rk}(F) < \mathrm{rk}(E)$.*

Утверждение 2 (см. [8, Lemma 1. 2. 13]) *Если E – чистый когерентный пучок размерности $d = \dim(X)$, тогда имеет место следующая* *цепочка импликаций*

$$\mu\text{-}\textit{стабильность} \Rightarrow \textit{стабильность} \Rightarrow \textit{полустабильность} \Rightarrow \mu\text{-}\textit{полустабильность}.$$

Всюду далее (μ-)полустабильный пучок, который не является (μ-)стабильным, мы будем называть *собственно (μ-)полустабильным пучком.*

Пусть E – нетривиальный, чистый пучок размерности d. Тогда *фильтрацией Хардера-Нарасимхана* для E мы называем фильтрацию

$$0 = \mathrm{NH}_0(E) \subset \mathrm{NH}_1(E) \subset ... \subset \mathrm{NH}_l(E) = E,$$

такую, что факторы $\mathrm{gr}_i^{\mathrm{NH}} = \mathrm{NH}_i(E)/\mathrm{NH}_{i+1}(E)$ при $i = 1, ..., l$, являются полустабильными пучками размерности d с приведенными многочленами Гильберта $p_i = p(\mathrm{gr}_i^{\mathrm{NH}})$, удовлетворяющими свойству

$$p_{\max}(E) := p_1 > ... > p_l =: p_{\min}(E).$$

Предположим теперь, что E является полустабильным. *Фильтрацией Жордана-Гёльдера* пучка E мы называем фильтрацию

$$0 = E_0 \subset E_1 \subset ... \subset E_l = E,$$

такую, что факторы $\mathrm{gr}_i(E) = E_i/E_{i-1}$ являются стабильными пучками с приведенным многочленом Гильберта $p(E)$.

Утверждение 3 (см. [8, Thm. 1.3.4]) *Любой чистый пучок E имеет единственную фильтрацию Хардера-Нарасимхана.*

Утверждение 4 (см. [8, Prop. 1.5.2]) *Каждый полустабильный пучок E имеет фильтрацию Жордана-Гёльдера. Более того, соответствующий градуированный пучок $\mathrm{gr}(E) = \bigoplus_i \mathrm{gr}_i(E)$ не зависит от выбора фильтрации Жордана-Гёльдера.*

Определение 7 *Два полустабильных пучка E_1 и E_2 с одинаковым при-*

веденным многочленом Гильберта называются S-эквивалентными, если $\mathrm{gr}(E_1) \simeq \mathrm{gr}(E_2)$.

2 Конструкция схемы модулей

Для фиксированного многочлена $P \in \mathbb{Q}[z]$ определим функтор

$$\mathfrak{M}' : (Sch/k)^o \to (Sets)$$

следующим образом. Если $S \in \mathrm{Ob}(Sch/k)$, пусть $\mathfrak{M}'(S)$ – множество классов изоморфизма S-плоских семейств полустабильных пучков на X с многочленом Гильберта P. И если $f : S' \to S$ – морфизм в (Sch/k), пусть $\mathfrak{M}'(f)$ – отображение соответствующих множеств, полученное при помощи взятия обратного образа пучка через $f_X = f \times \mathrm{id}_X$:

$$\mathfrak{M}'(f) : \mathfrak{M}'(S) \longrightarrow \mathfrak{M}'(S'), \quad [E] \to [f_X^* E].$$

Если $E \in \mathfrak{M}'(S)$ – S-плоское семейство полустабильных пучков на X, и если L – произвольное линейное расслоение на S, тогда $E \otimes p^*(L)$ является также S-плоским семейством, где $p : X \times S \to S$ – каноническая проекция. Кроме того, слои E_s и $(E \otimes p^* L)_s = E_s \otimes_{k(s)} L(s)$ изоморфны для любой точки $s \in S$. Таким образом, имеет смысл рассмотреть фактор-функтор $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}' / \sim$, где $\sim$ является отношением эквивалентности:

$$E \sim E' \text{ для } E,\ E' \in \mathfrak{M}'(S) \iff E \simeq E' \otimes p^* L \text{ для некоторого } L \in \mathrm{Pic}(S).$$

Если мы к тому же будем рассматривать только стабильные пучки, мы получим открытый подфунктор $(\mathfrak{M}')^s \subset \mathfrak{M}'$ и $\mathfrak{M}^s \subset \mathfrak{M}$. Схема $\mathcal{M}$ называется *схемой модулей полустабильных пучков*, если она копредставляет функтор $\mathfrak{M}$.

Утверждение 5 (см. [8, Lemma 4.1.2]) *Предположим, что $\mathcal{M}$ копредставляет $\mathfrak{M}$. Тогда S-эквивалентные пучки соответствуют одной и* *той же замкнутой точке в $\mathcal{M}$. В частности, если существует неразложимый собственно полустабильный пучок E, тогда функтор $\mathfrak{M}$ не может быть представлен схемой.*

Семейство полустабильных пучков на X с многочленом Гильберта P является ограниченным (см. [8, Thm. 3.3.7]). В частности, это означает, что существует число m, такое, что $E(m)$ порождён глобальными сечениями, и $h^0(E(m)) = P(m)$. Таким образом, если мы положим $V := k^{\oplus P(m)}$ и $\mathcal{K} := V \otimes \mathcal{O}_X(-m)$, тогда существует сюрьекция $\rho : \mathcal{K} \twoheadrightarrow E$, полученная взятием композиции канонического отображения $\mathrm{H}^0(E(m)) \otimes \mathcal{O}_X(-m) \longrightarrow E$ с изоморфизмом $V \longrightarrow \mathrm{H}^0(E(m))$. Эта сюрьекция определяет замкнутую точку $[\rho : \mathcal{K} \twoheadrightarrow E] \in \mathrm{Quot}(\mathcal{K}, P)$ соответствующей Quot-схемы, параметризующей фактор-пучки пучка $\mathcal{K}$ с многочленом Гильберта P. На самом деле, эта точка содержится в открытом подмножестве $R \subset \mathrm{Quot}(\mathcal{K}, P)$ всех факторов $[\mathcal{K} \twoheadrightarrow E]$, таких, что пучок E полустабилен, а индуцированное отображение

$$V = \mathrm{H}^0(\mathcal{K}(m)) \longrightarrow \mathrm{H}^0(E(m))$$

является изморфизмом. Обозначим через $R^s \subset R$ открытую подсхему, параметризующую стабильные пучки E.

Теорема 1 (см. [8, Thm. 4.3.4]) *Существует проективная схема $\mathcal{M}_{\mathcal{O}(1)}(P)$, которая универсально копредставляет функтор $\mathfrak{M}_{\mathcal{O}(1)}(P)$. Замкнутые точки $\mathcal{M}_{\mathcal{O}(1)}(P)$ находятся во взаимно однозначном соответствии с классами S-эквивалентности полустабильных пучков с многочленом Гильберта P. Более того, существует открытое плотное подмножество $\mathcal{M}^s_{\mathcal{O}(1)}(P)$, которое универсально копредставляет функтор $\mathfrak{M}^s_{\mathcal{O}(1)}(P)$.*

Теорема 2 (см. [8, Cor. 4.3.5]) *Морфизм $\pi : R^s \longrightarrow \mathcal{M}^s$ является главным $PGL(V)$-расслоением.*

Также имеет смысл рассмотреть относительные пространства модулей, т. е. пространства модулей полустабильных пучков на слоях проективного морфизма $X \to S$. Рассмотрим для данного многочлена P

функтор $\mathfrak{M}_{X/S} : (Sch/S)^o \longrightarrow (Sets)$, который по определению ставит в соответствие S-схеме T конечного типа множество классов изоморфизма T-плоских семейств полустабильных пучков на слоях морфизма $X_T := T \times_S X \to T$ с многочленом Гильберта P. Если мы рассмотрим только семейства стабильных пучков, мы получим открытый подфунктор $\mathfrak{M}^s_{X/S}(P) \subset \mathfrak{M}_{X/S}(P)$.

Теорема 3 (см. [8, Thm. 4.3.7]) *Пусть $f : X \to S$ – проективный мофризм k-схем конечного типа с геометрически связными слоями, и пусть $\mathcal{O}(1)$ – линейное расслоение на X, очень обильное относительно S. Существует проективный морфизм $\mathcal{M}_{X/S}(P) \to S$, который универсально копредставляет функтор $\mathfrak{M}_{X/S}(P)$. В частности, для любой замкнутой точки $s \in S$ имеет место изоморфизм $\mathcal{M}_{X/S}(P)_s \simeq \mathcal{M}_{X_s}(P)$. Более того, существует открытая подсхема $\mathcal{M}^s_{X/S}(P) \subset \mathcal{M}_{X/S}(P)$, которая универсально копредставляет подфунктор $\mathfrak{M}^s_{X/S}(P) \subset \mathfrak{M}_{X/S}(P)$.*

Далее, мы будем сконцентрированны на схеме модулей Гиезекера-Маруямы полустабильных пучков ранга 2 с классами Черна $c_1 = 0$, $c_2 = k$, $c_3 = 2n$ на проективном пространстве $\mathbb{P}^3$, которую мы обозначим через $\mathcal{M}(0, k, 2n)$. Также введем обозначение $\mathcal{M}(k) = \mathcal{M}(0, k, 0)$. Кроме того, обозначим через $\mathcal{B}(k)$ открытое подмножество схемы $\mathcal{M}(k)$, состоящее из стабильных локально свободных пучков. Для простоты мы не будем делать различия между стабильным пучком E и соответствующим классом изоморфизма $[E]$, как точкой пространства модулей. Кроме того, под общей точкой неприводимой схемы мы будем понимать замкнутую точку, принадлежащую некоторому открытому плотному подмножеству схемы.

3 Рефлексивные пучки

Пучок F называется рефлексивным, если каноническое отображение пучков $F \to F^{\vee\vee}$ является изоморфизмом. Множество особенностей $\mathrm{Sing}(F)$

рефлексивного пучка F на X имеет коразмерность ≥ 3. В частности, рефлексивный пучок на $\mathbb{P}^3$ имеет 0-мерные особенности. Более того, любой рефлексивный пучок ранга 1 является обратимым.

Теорема 4 (см. [4, Thm. 4.1]) *Зафиксируем целое число c_1. Тогда существует взаимнооднозначное соответствие между*

(i) парами (F, s), где F – рефлексивный пучок ранга 2 на $\mathbb{P}^3$ с первым классом Черна $c_1(F) = c_1$, и $s \in \mathrm{H}^0(F)$ – глобальное сечение с множеством нулей коразмерности 2, и

(ii) парами (Y, ξ), где Y – кривая Коэна-Маколея в $\mathbb{P}^3$, являющаяся локально полным пересением в общей точке, и $\xi \in \mathrm{H}^0(\omega_Y(4 - c_1))$ – глобальное сечение, порождающее пучок $\omega_Y(4 - c_1)$ всюду, за исключением конечного числа точек.

Более того, при этом соответствии имеют место равенства

$$c_2 = d, \quad c_3 = 2p_a - 2 + d(4 - c_1),$$

где c_2, c_3 – классы Черна пучка F, и d, p_a – степень и арифметический род кривой Y.

Схема модулей $\mathcal{R}(0, m, 2n)$, параметризующая стабильные рефлексивные пучки ранга 2 на $\mathbb{P}^3$ с классами Черна $c_1 = 0,\ c_2 = m,\ c_3 = 2n$, может быть рассмотрена как открытое подмножество схемы модулей Гизекера-Маруямы $\mathcal{M}(0, m, 2n)$. В частности, схема $\mathcal{R}(0, m, 2n)$ является квазипроективной схемой (см. [4]). Известно, что для $(m, n) = (2, 1),\ (2, 2)$, $(3, 4)$ эта схема является гладкой, неприводимой и рациональной; при $(m, n) = (3, 2)$ она является неприводимой и приведенной в общей точке; при $(m, n) = (3, 1),\ (3, 3)$ соответствующая приведенная схема является неприводимой (см. [3]). Кроме того, схема $\mathcal{R}(0, m, m^2 - m + 2)$ является неприводимой и гладкой для каждого $m \geq 2$ (см. [22]).

Теорема 5 (см. [10, Thm. 8]) *Для каждой тройки (a,b,c) положительных целых чисел, таких, что $3a+2b+c$ не равно нулю и четно, рефлексивные пучки ранга 2, заданные точной последовательностью*

$$0 \longrightarrow G_{(a,b,c)} \xrightarrow{\alpha} (a+b+c+2)\cdot\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \longrightarrow F(k) \longrightarrow 0,$$

$$G_{(a,b,c)} := a\cdot\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-3)\oplus b\cdot\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-2)\oplus c\cdot\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1),$$

составляют неприводимую, гладкую компоненту $\mathcal{S}(a,b,c)$ of $\mathcal{R}(0,m,2n)$ ожидаемой размерности $8m-3$, где m и n выражаются следующим образом

$$m = \frac{1}{4}(3a+2b+c)^2+\frac{3}{2}(3a+2b+c)-(b+c),$$

$$2n = 27\binom{a+2}{3}+8\binom{b+2}{3}+\binom{c+2}{3}+3(3a+2b+5)ab+$$

$$+\frac{3}{2}(3a+c+4)ac+(2b+3c+3)bc+6abc.$$

Пусть $\widetilde{\mathcal{S}}(a,b,c)\subset \mathrm{Hom}(G_{(a,b,c)},(a+b+c+2)\cdot\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3})$ – открытое подмножетсво, состоящее из мономорфизмов с 0-мерными локусами вырождений; тогда имеет место

$$\mathcal{S}(a,b,c) = \widetilde{\mathcal{S}}(a,b,c)/\left(\left(\mathrm{Aut}(G_{(a,b,c)})\times GL(a+b+c+2)\right)/\mathbb{C}^*\right).$$

Также мы можем построить схему $\mathcal{V}(0,m,2n)$, параметризующую некоторое множетсво рефлексивных собственно μ-полустабильных пучков ранга 2 с соответствующими классами Черна, следующим образом. Рассмотрим схему Гильберта $\mathrm{Hilb}_{m,g}(\mathbb{P}^3)$ гладких пространственных кривых степени m и рода g; пусть $n=g+2m-1$. Теперь обозначим через $\mathcal{Z}\hookrightarrow \mathrm{Hilb}_{m,g}(\mathbb{P}^3)\times\mathbb{P}^3$ соответствующую универсальную кривую, а через $\mathrm{pr}:\mathrm{Hilb}_{m,g}(\mathbb{P}^3)\times\mathbb{P}^3\longrightarrow \mathrm{Hilb}_{m,g}(\mathbb{P}^3)$ проекцию на первый множитель. Мы определим схему $\mathcal{V}(0,m,2n)$ как открытое подмножество схемы $\mathbf{P}((\mathrm{pr}_*\omega_{\mathcal{Z}}(4))^\vee)$, состоящее из точек $(Y,\ \mathbb{P}\xi)\in\mathbf{P}((\mathrm{pr}_*\omega_{\mathcal{Z}}(4))^\vee)$, которые удовлетворяют условию: $\xi\in \mathrm{H}^0(\omega_Y(4))$ порождает пучок $\omega_Y(4)$

всюду за исключением конечного числа точек.

Согласно конструкции, мы имеем формулу для вычисления размерности этой схемы

$$\dim \mathcal{V}(0,m,2n) = \dim \mathrm{Hilb}_{m,g}(\mathbb{P}^3) + \dim \mathbb{P}(\mathrm{H}^0(\omega_Y(4))) = \tag{1}$$

$$= h^0(N_{Y/\mathbb{P}^3}) + h^0(\omega_Y(4)) - 1,$$

где Y – произвольная кривая из $\mathrm{Hilb}_{m,g}(\mathbb{P}^3)$. Далее, заметим, что в силу изоморфизма $\mathrm{H}^0(\omega_Y(4)) \simeq \mathrm{Ext}^1(I_Y, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3})$, любая точка $(Y, \mathbb{P}\xi) \in \mathcal{V}(0,m,2n)$ определяет единственным образом пучок F, удовлетворяющий следующей точной тройке

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \longrightarrow F \longrightarrow I_Y \longrightarrow 0. \tag{2}$$

Можно показать, что F – рефлексивный собственно μ-полустабильный пучок ранга 2 с классами Черна $c_1 = 0,\ c_2 = m,\ c_3 = 2n$. Таким образом, существует взаимнооднозначное соответствие между точками схемы $\mathcal{V}(0,m,2n)$ и некоторым семейством собственно μ-полустабильных рефлексивных пучков ранга 2 с классами Черна $c_1 = 0,\ c_2 = m,\ c_3 = 2n$ (подробности см. [4, Thm. 4.1, Prop. 4.2]).

Если кривые Y из описанной конструкции являются рациональными, тогда мы имеем $n = 2m-1$. Обозначим соответствующую схему модулей $\mathcal{V}(0,m,4m-2)$ через $\mathcal{V}_m$.

4 Разложение на неприводимые компоненты схемы $\mathcal{M}(k)$

Не сложно доказать, что схема $\mathcal{M}(1)$ является неприводимой. Ключевое место доказательства – проверить, что любой полустабильный пучок E ранга 2 на $\mathbb{P}^3$ с классами Черна $c_1(E) = 0,\ c_2(E) = 1$ и $c_3(E) = 0$ является нулькорреляционным пучком в смысле [1], то есть удовлетворяет точной тройке следующего вида

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \longrightarrow \Omega^1_{\mathbb{P}^3}(1) \longrightarrow E \longrightarrow 0.$$

Следовательно, пучок E определяется единственным образом сечением $\sigma \in \mathrm{H}^0(\Omega^1_{\mathbb{P}^3}(2))$ с точностью до умножения на число, поэтому $\mathcal{M}(1) \simeq \mathbb{P}\mathrm{H}^0(\Omega^1_{\mathbb{P}^3}(2)) \simeq \mathbb{P}^5$.

При $k \geq 2$ схема модулей $\mathcal{M}(k)$ становится уже приводимой. Однако, были построены некоторые бесконечные серии неприводимых компонент схем $\mathcal{M}(k)$. Мы опишем эти серии в данном разделе.

Во-первых, для любого $k \geq 1$ существует пространство модулей инстантонных расслоений $\mathcal{I}(k)$, которое может быть рассмотренно как подсхема схемы модулей стабильных расслоений $\mathcal{B}(k) \subset \mathcal{M}(k)$. Инстантонным расслоением заряда k называется расслоение E ранга 2, удовлетворяющее следующим свойствам

$$c_1(E) = 0, \quad c_2(E) = k, \quad h^0(E(-1)) = h^1(E(-2)) = 0.$$

Известно, что пространство модулей $\mathcal{I}(k)$ является неприводимым (см. [19, 20]), гладким (см. [21]) и аффинным (см. [18]). Замыкание $\overline{\mathcal{I}(k)}$ в $\mathcal{M}(k)$ является неприводимой компонентой схемы $\mathcal{M}(k)$ размерности $8k-3$. В частности, $\mathcal{M}(1) \simeq \overline{\mathcal{I}(1)}$, $\mathcal{M}(1) \setminus \mathcal{I}(1) \simeq \mathrm{Gr}(2,4) \subset \mathbb{P}^3$, и $\mathcal{I}(1)$ параметризует нулькорреляционные расслоения.

При $k = 1, 2$ мы имеем $\mathcal{B}(k) = \mathcal{I}(k)$. Однако, при $k \geq 3$ это уже не так, схема $\mathcal{B}(k)$ также становится приводимой. Далее мы опишем серию компонент схем $\mathcal{B}(k)$, которые не совпадают с $\mathcal{I}(k)$. А именно, для любых трех целых чисел $c > b \geq a \geq 0$ рассмотрим монаду

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-c) \xrightarrow{\alpha} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-b) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-a) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(a) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(b) \xrightarrow{\beta} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(c) \longrightarrow 0, \tag{3}$$

с морфизмами следующего вида

$$\alpha = \begin{pmatrix} \sigma_4 \\ \sigma_3 \\ -\sigma_2 \\ -\sigma_1 \end{pmatrix}$$

и $\beta = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)$, где

$$\sigma_1 \in \mathrm{H}^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(c+b)), \quad \sigma_2 \in \mathrm{H}^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(c+a)),$$

$$\sigma_3 \in \mathrm{H}^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(c-a)), \quad \sigma_4 \in \mathrm{H}^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(c-b))$$

не зануляются одновременно.

Теорема 6 (см. [2, Prop. 1.2(a)]) *При $c > a+b$ существует неприводимая компонента $\mathcal{N}(a,b,c)$ схемы модулей $\mathcal{B}(c^2-b^2-a^2)$, точки которой соответствуют локально свободным пучкам, являющимся когомологиями монад вида (3). Замыкание $\overline{\mathcal{N}(a,b,c)}$ является неприводимой компонентой схемы модулей $\mathcal{M}(c^2-b^2-a^2)$. Эти компоненты называются компонентами Эйна.*

Следующая теорема описывает серию компонент схем $\mathcal{M}(k)$, общие пучки которых имеют 0-мерные особенности. Эти компоненты строятся при помощи компонент схем модулей, параметризующих стабильные рефлексивные пучки. Например, мы можем использовать серию $\mathcal{S}(a,b,c)$ из теоремы 5.

Теорема 7 (см. [10, Thm. 7]) *Для каждой гладкой неприводимой компоненты $\mathcal{F}$ схемы модулей $\mathcal{R}(0,k,2s)$ ожидаемой размерности $8k-3$, существует неприводимая компонента $\overline{\mathcal{T}(k,s)}$ размерности $8k-3+4s$ схемы $\mathcal{M}(k)$, общая точка которой $[E]$ удовлетворяет точной тройке*

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow F \longrightarrow Q \longrightarrow 0,$$

где $[F] \in \mathcal{F}$, *и* Q *– нуль-мерный пучок длины* s.

В следующей теореме представлена серия компонент схем $\mathcal{M}(k)$, параметризующих стабильные пучки с одномерными особенностями.

Теорема 8 (см. [10, Thm. 17]) *Для любых положительных целых чисел* $0 < d_1 \le d_2$ *и неотрицательного целого числа* $c \ge 0$ *существует неприводимая компонента* $\overline{\mathcal{C}(d_1, d_2, c)}$ *схемы модулей* $\mathcal{M}(d_1 d_2 + c)$, *общая точка* $[E]$ *которой удовлетворяет следующей точной тройке*

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow F \longrightarrow L(2) \longrightarrow 0,$$

где $[F] \in \mathcal{I}(c)$, *и* L *– линейное расслоение на кривой* C, *являющейся гладким полным пересечением бистепени* (d_1, d_2) *и рода* $g = 1 + \frac{1}{2} d_1 d_2 (d_1 + d_2 - 4)$, *такое, что*

$$\deg L = g - 1, \quad h^0(L) = h^1(L) = 0, \quad L^{\otimes 2} \not\simeq \omega_C.$$

Далее, мы напомним описание разложения на неприводмые компоненты схемы $\mathcal{M}(2)$, данное в работах [5, 6]. Во-первых, схема модулей $\mathcal{M}(2)$ имеет инстантонную компоненту $\overline{\mathcal{I}(2)}$. Более того, все локально свободные пучки из $\mathcal{M}(2)$ являются инстантонными расслоениями. Далее, согласно [6, Thm. 7.12], $\mathcal{M}(2)$ содержит ещё две дополнительные компоненты, которые являются замыканиями в $\mathcal{M}(2)$ следующих подсхем

$$\mathcal{P}(2)_s = \{[E] \in \mathcal{M}(2) \mid \dim \operatorname{Ext}^2(E, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}) = s\}, \; s = 1, 2.$$

Имеет место равенство $\dim \overline{\mathcal{P}(2)_s} = 13 + 4s$. Эти компоненты называются компонентами Траутмана.

На самом деле, компоненты $\overline{\mathcal{P}(2)_s}$ совпадают с компонентами $\overline{\mathcal{T}(2, s)}$, описанными выше. Действительно, заметим, что если $[E] \in \mathcal{T}(2, s)$, то

$$\dim \operatorname{Ext}^2(E, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}) = h^0(\mathcal{E}xt^2(E, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3})) = h^0(\mathcal{E}xt^3(Q_E, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3})) = h^0(Q_E).$$

С другой стороны, длина пучка Q_E равна половине $c_3(E^{\vee\vee})$, из чего следует $[E] \in \mathcal{P}(2)_s$, а значит $\mathcal{T}(2,s) \subset \mathcal{P}(2)_s$.

Из предыдущего раздела мы знаем, что схема $\mathcal{R}(0,2,2s)$ является неприводимой, гладкой схемой размерности 13 для каждого значения $s = 1,2$. Из теоремы 7 следует, что, для каждого значени $s = 1,2$, схема $\overline{\mathcal{T}(2,s)}$ является неприводмой компонентой схемы $\mathcal{M}(2)$ размерности $13 + 4s$; таким образом, имеет место $\overline{\mathcal{T}(2,s)} = \overline{\mathcal{P}(2)_s}$.

Следовательно, результат [6, Thm. 7.12] может быть переформулирован следующим образом

$$\mathcal{M}(2) = \overline{\mathcal{I}(2)} \cup \overline{\mathcal{T}(2,1)} \cup \overline{\mathcal{T}(2,2)}.$$

В работе [13] было показано, что $\mathcal{B}(3)$ имеет ровно две компоненты. Эти компоненты являются гладкими и рациональными, а также имеют ожидаемую размерность 21. Они могут быть описаны следующим образом:

- инстантонная компонента $\mathcal{I}(3)$, чьи точки являются когомологиями монад вида

$$0 \longrightarrow 3\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \longrightarrow 8\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \longrightarrow 3\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \longrightarrow 0;$$

- компонента Эйна $\mathcal{N}(0,1,2)$, точки которой являются когомологиями монад вида

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-2) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \oplus 2\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(2) \longrightarrow 0.$$

Как это было замечено в предыдущем разделе, схема $\mathcal{R}(0,3,2s)$ является, для всех $s = 1, ..., 4$, неприводимой и имеет ожидаемую размерность 21. Таким образом, мы можем применить теорему 7, чтобы показать, что существуют четыре неприводимых компоненты $\overline{\mathcal{T}(3,s)}$ размерности $21 + 4s$, $s = 1, ..., 4$, в $\mathcal{M}(3)$.

Более того, теорема 8 даёт ещё одну неприводимую компоненту $\overline{\mathcal{C}(1,3,0)}$, общая точка которой соответствует пучку с 1-мерными особенностями.

Таким образом, схема модулей $\mathcal{M}(3)$ имеет не менее семи неприводимых компонент, которые можно разделить на три типа следующим образом:

1. $\overline{\mathcal{I}(3)}$ и $\overline{\mathcal{N}(0,1,2)}$, обе размерности 21, общие пучки являются локально свободными;
2. $\overline{\mathcal{C}(1,3,0)}$, размерности 21; общий пучок имеет особенности вдоль гладкой плоской кубики;
3. $\overline{\mathcal{T}(3,s)}$ для $s = 1,2,3,4$, размерности $21+4s$; общий пучок имеет особеннсоти вдоль $3s$ различных точек.

5 Новые компоненты схем $\mathcal{M}(k), k \geq 3$

В серии работ [15, 16, 17] были описаны новые неприводимые компоненты схем модулей $\mathcal{M}(k)$, $k \geq 3$, начиная с конструкции одной компоненты схемы $\mathcal{M}(3)$, и затем последовательно обобщая эту конструкцию до построения бесконечной серии компонент. Новым свойством этих компонент является то, что их общие пучки имеют особенности смешанной размерности, а именно, вдоль объединения кривой и набора точек в $\mathbb{P}^3$.

Первая компонента этой серии была описана в работе [15]. Общий пучок этой компоненты имеет особенности вдоль дизъюнктного объединения проективной прямой и двух точек. Аналогично конструкции компонент $\overline{\mathcal{T}(k,l)}$ и $\overline{\mathcal{C}(d_1,d_2,c)}$ из теорем 7 и 8, конструкция этой компоненты основана на технике так называемых элементарных преобразований. Более подробно, мы рассматриваем все пучки E, удовлетворяющие следующей точной тройке

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow F \longrightarrow \mathcal{O}_l(2) \longrightarrow 0, \tag{4}$$

где F – рефлексивный пучок из $\mathcal{R}(0,2,2)$, и l – проективная прямая, такая, что $l \cap \mathrm{Sing}(F) = \emptyset$. Можно показать, что пучок E является стабильным с классами Черна $c_1 = 0,\ c_2 = 3,\ c_3 = 0$. Более того, оказывается, что размерность касательного пространства $T_{[E]}\mathcal{M}(3)$ схемы модулей $\mathcal{M}(3)$ в точке $[E]$ совпадает с размерностью семейства пучков, полученных при помощи точной тройки (4). Мы обозначим это семейство через $\mathcal{X}(1,0)$. Таким образом, мы имеем следующую теорему

Теорема 9 (см. [15, Thm.]) *Замыкание семейства $\mathcal{X}(1,0)$ в $\mathcal{M}(3)$ является неприводимой компонентой схемы $\mathcal{M}(3)$ размерности 22.*

Нетрудно показать, что общий пучок этой компоненты имеет особенности вдоль $l \sqcup \mathrm{Sing}(F)$. Фактически, эта компонента являлась первым примером компоненты схем $\mathcal{M}(k)$, общий пучок которой имеет особенности смешанной размерности.

Далее, этот результат был обобщен в [16]. Были построены ещё две компоненты схемы модулей $\mathcal{M}(3)$. Общие пучки E этих компонент включаются в точную тройку следующего вида

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow F \longrightarrow \mathcal{O}_l(r) \oplus \mathcal{O}_W \longrightarrow 0, \qquad (5)$$

где $[F] \in \mathcal{R}(0,2,2n),\ n = 1,2,\ l$ – проективная прямая, и $W = \{q_1, ..., q_s\} \in \mathrm{Sym}^s(\mathbb{P}^3)^*$ – подмножество точек в $\mathbb{P}^3$, такое, что $l \cap W = \emptyset,\ (l \sqcup W) \cap \mathrm{Sing}(F) = \emptyset$. Условие $c_1(E) = 0$ накладывает ограничение $r = n + 1 - s$, поэтому мы имеем 7 семейств пучков $\mathcal{X}(n,s)$, где

$$(n,s) = (1,0),\ (1,1),\ (1,2),\ (2,0),\ (2,1),\ (2,2),\ (2,3).$$

Из этих семи семейств четыре лежат в известных компонентах $\overline{\mathcal{T}(3,s)}$.

Теорема 10 (см. [16, Thm. 4]) *Мы имеем следующие вложения:*

$$\mathcal{X}(1,1) \subsetneq \overline{\mathcal{T}(3,1)}, \quad \mathcal{X}(2,2) \subsetneq \overline{\mathcal{T}(3,2)},$$

$$\mathcal{X}(1,2) \subsetneq \overline{\mathcal{T}(3,2)}, \quad \mathcal{X}(2,3) \subsetneq \overline{\mathcal{T}(3,3)}.$$

Поэтому замыканиях этих четырех семейств не даёт нам новых компонент. Семество $\mathcal{X}(1,0)$ было уже рассмотренно ранее. Однако, размерности семейств $\mathcal{X}(2,0)$ и $\mathcal{X}(2,1)$ совпадают с соответствующими размерностями касательных пространств схемы $\mathcal{M}(3)$, поэтому их замыкания, $\overline{\mathcal{X}(2,0)}$ и $\overline{\mathcal{X}(2,1)}$, являются неприводимыми компонентами схемы $\mathcal{M}(3)$. В силу того, что множества особенностей общих пучков этих двух компонент, а именно, $l \sqcup \mathrm{Sing}(F) \sqcup W$, where $|\mathrm{Sing}(F)| = 4$, $|W| = 0, 1$, не совпадают с множествами особенностей общих пучков других компонент схемы $\mathcal{M}(3)$, компоненты $\overline{\mathcal{X}(2,0)}$ и $\overline{\mathcal{X}(2,1)}$ являются новыми.

Теорема 11 (см. [16, Теорема 3]) *Замыкания семейств $\mathcal{X}(2,0)$ и $\mathcal{X}(2,1)$ являются новыми неприводимыми компонентами схемы $\mathcal{M}(3)$ размерности 24 и 26, соответственно.*

Конструкция из работ [15, 16] была обобщена в статье [11]. А именно, в этой статье были построены новые неприводимые компоненты схем модулей $\mathcal{M}(e,n,m), e = -1, 0$, общие пучки которых имеют особенности вдоль дизъюнктного объединения проективной прямой и набора точек в $\mathbb{P}^3$.

Далее, эти результаты были обобщены в работе [17], в которой была построена новая бесконечная серия компонент схем модулей $\mathcal{M}(k)$, $k \geq 3$, общие точки которых имеют особенности смешанной размерности. Конструкция обобщает вычисления из [10, 15, 16, 11]. Рассмотрим две серии схем Гильберта Hilb_d, $d \geq 1$, и $\mathrm{Hilb}_{(d_1,d_2)}$, $1 \leq d_1 \leq d_2$, где Hilb_d параметризует гладкие рациональные кривые степени d, а $\mathrm{Hilb}_{(d_1,d_2)}$ параметризует кривые, являющиеся гладкими полными пересечениями бистепени (d_1, d_2) в $\mathbb{P}^3$. Для схем Гильберта $\mathrm{Hilb}_{(d_1,d_2)}$ мы будем предполагать, что $1 \leq d_1 \leq d_2$ и $(d_1, d_2) \neq (1,1), (1,2)$. Обозначим через $\mathcal{H}$ какую-нибудь компоненту из набора компонент $\{\mathrm{Hilb}_d \mid d \geq 1\} \sqcup \{\mathrm{Hilb}_{(d_1,d_2)} \mid 1 \leq d_1 \leq d_2, (d_1, d_2) \neq (1,1), (1,2)\}$. Пусть C – кривая из $\mathcal{H}$ степени d и рода g. Далее, рассмотрим подмножество $W \subset \mathbb{P}^3$, состоящее из s дизъюнктных точек в $\mathbb{P}^3$, удовлетворяющих условию $C \cap W = \emptyset$.

Теперь рассмотрим серию компонент $\mathcal{S}(a,b,c)$ пространств модулей стабильных рефлексивных пучков из теоремы 5, а также рассмотрим серию пространств модулей $\mathcal{V}_m$, параметризующих рефлексивные собственно μ-полустабильные пучки, из раздела 3. Обозначим через $\mathcal{R}$ произвольную компоненту из набора $\{\mathcal{S}(a,b,c)\} \sqcup \{\mathcal{V}_m\}$, такую, что выполнено следующее условие

$$\begin{cases} s < n, \text{ если } \mathcal{H} = \mathrm{Hilb}_d \text{ для некоторого } d, \\ s \leq n, \text{ если } \mathcal{H} = \mathrm{Hilb}_{(d_1,d_2)} \text{ для некоторой пары } (d_1,d_2), \\ m \leq d, \text{ если } \mathcal{R} = \mathcal{V}_m \text{ для некоторого } m, \end{cases} \tag{6}$$

где m равно c_2 и n равно $\frac{1}{2}c_3$ пучков из $\mathcal{R}$. Предположим, что $F \in \mathcal{R}$ и рассмотрим линейное расслоение L степени $g-1+2d+n-s$ на кривой C, удовлетворяющее свойству

$$\mathrm{Hom}_e(F, L \oplus \mathcal{O}_W) \neq 0, \quad h^1(\mathcal{H}om(F,L)) = 0, \quad h^0(\omega_C(4) \otimes L^{-2}) = 0. \tag{7}$$

Далее, аналогично точной тройке (5), мы можем построить пучок E следующим образом

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow F \longrightarrow L \oplus \mathcal{O}_W \longrightarrow 0. \tag{8}$$

Можно показать, что пучок E является стабильным и он лежит в $\mathcal{M}(m+d)$. Более того, мы имеем следующую теорему.

Теорема 12 (см. [17, Thm]) *Замыкание семейства $\mathcal{C}(\mathcal{R},\mathcal{H},s)$, состоящего из пучков E, полученных при помощи точной тройки (8), является неприводмой компонентой схемы модулей $\mathcal{M}(m+d)$.*

Таким образом, варьируя пространство модулей $\mathcal{R} \in \{\mathcal{S}(a,b,c)\} \sqcup \{\mathcal{V}_m\}$, схему Гильберта $\mathcal{H} \in \{\mathrm{Hilb}_d \mid d \geq 1\} \sqcup \{\mathrm{Hilb}_{(d_1,d_2)} \mid 1 \leq d_1 \leq d_2, (d_1,d_2) \neq (1,1),(1,2)\}$ и число точек s, удовлятворяющие условиям (6), мы получим новую бесконечную серию неприводимых компонент $\{\overline{\mathcal{C}(\mathcal{R},\mathcal{H},s)}\}$ схем модулей $\mathcal{M}(k)$, $k \geq 3$. Общие пучки этих компонент имеют особенности смешанной размерности. В частности, это означает, что они не совпадают с известными компонентами.

Наименьшее k, для которых $\mathcal{M}(k)$ содержит компоненту этой серии, равно 3. Мы имеем следствие.

Следствие 1 *Замыкание семейства* $\mathcal{C}(\mathcal{V}_1, \mathrm{Hilb}_2, 0)$ *является неприводимой компонентой схемы модулей* $\mathcal{M}(3)$ *размерности 21. Таким образом, схема модулей* $\mathcal{M}(3)$ *содержит не менее 11 неприводимых компонент.*

Общий пучок E этой компоненты удовлетворяет следующей точной тройке

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow F \longrightarrow \mathcal{O}_C(2) \longrightarrow 0,$$

где $[F] \in \mathcal{V}_1$ и C – гладкая коника. Собственно μ-полустабильный рефлексивный пучок F включается в точную тройку вида

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \longrightarrow F \longrightarrow I_l \longrightarrow 0, \quad l \in \mathrm{Gr}(2, 4).$$

Результаты диссертации опубликованы в трёх статьях:

1. A.N. Ivanov, A.S. Tikhomirov, The moduli component of the space of semistable rank-2 sheaves on $\mathbb{P}^3$ with singularities of mixed dimension (Компонента пространства модулей полустабильных пучков ранга 2 на $\mathbb{P}^3$ с особенностями смешанной размерности), Doklady Mathematics, 2017, Vol. 96, No. 2, pp. 506–509.

2. A. N. Ivanov, A. S. Tikhomirov, Semistable rank 2 sheaves with singularities of mixed dimension on $\mathbb{P}^3$ (Полустабильные пучки ранга 2 с особенностями смешанной размерности на $\mathbb{P}^3$), Journal of Geometry and Physics, Vol. 129, 2018, pp. 90-98.

3. A. N. Ivanov, A new series of moduli components of rank-2 semistable sheaves on $\mathbb{P}^3$ with singularities of mixed dimension (Новая бесконечная серия компонент модулей полустабильных пучков ранга 2 на $\mathbb{P}^3$ с особенностями смешанной размерности), Sbornik: Mathematics, 211:7 (2020), pp. 967-986.

Список литературы

[1] L. Ein, Some stable vector bundles on $\mathbb{P}^4$ and $\mathbb{P}^5$, J. Reine Angew. Math. 337 (1982), 142–153.

[2] L. Ein, Generalized nullcorrelation bundles, Nagoya Math. J. 111 (1988), 13–24.

[3] M.-C. Chang, Stable rank 2 reflexive sheaves on $\mathbb{P}^3$ with small c_2 and applications, Trans. Amer. Math. Soc., **284** (1984), 57–89.

[4] R. Hartshorne, Stable Reflexive Sheaves, Math. Ann. **254** (1980), 121–176.

[5] R. Hartshorne, Stable vector bundles of rank 2 on $\mathbb{P}^3$, Math. Ann., 254 (1978), 229–280.

[6] J. Le Potier, Systèmes cohèrents et structures de niveau, Astèrisque, 214 (1993).

[7] R. Vakil, Murphy's law in algebraic geometry: badly-behaved deformation spaces, Inv. Math. 164 (2006), 569 – 590.

[8] D. Huybrechts, M. Lehn, The Geometry of Moduli Spaces of Sheaves, 2nd ed., Cambridge Math. Lib., Cambridge University Press, Cambridge, 2010.

[9] M. Jardim, D. Markushevich, A. S. Tikhomirov, New divisors in the boundary of the instanton moduli space, Moscow Mathematical Journal, 2018, Vol. 18, No. 1, P. 117-148.

[10] M. Jardim, D. Markushevich, A. S. Tikhomirov, Two infinite series of moduli spaces of rank 2 sheaves on $\mathbb{P}^3$, Annali di Matematica Pura ed Applicata (4), 196(4):1573–1608, 2017.

[11] C. Almeida, M. Jardim, A. S. Tikhomirov, Irreducible components of the moduli space of rank 2 sheaves of odd determinant on $\mathbb{P}^3$, 2019, arXiv:1903.00292.

[12] M. Maruyama, Moduli of stable sheaves, I, J. Math. Kyoto Univ., 17-1 (1977) 91-126.

[13] G. Ellingsrud, S. A. Stromme, Stable rank 2 vector bundles on $\mathbb{P}^3$ with $c_1 = 0$ and $c_2 = 3$, Math. Ann. 255 (1981), 123–135.

[14] D. Mumford, Projective invariants of projective structures and applications, Proc. Intern. Cong. Math. Stockholm (1962), 526-530.

[15] A. N. Ivanov, A. S. Tikhomirov, The moduli component of the space of semistable rank-2 sheaves on $\mathbb{P}^3$ with singularities of mixed dimension. Dokl. Math. 96, 506–509 (2017).

[16] A. N. Ivanov, A. S. Tikhomirov, Semistable rank 2 sheaves with singularities of mixed dimension on $\mathbb{P}^3$, Journal of Geometry and Physics, 2018, Vol. 129, p. 90–98.

[17] A. N. Ivanov, A new series of moduli components of rank-2 semistable sheaves on $\mathbb{P}^3$ with singularities of mixed dimension, Sbornik: Mathematics, 211:7 (2020), 967–986.

[18] L. Costa, G. Ottaviani, Nondegenerate multidimensional matrices and instanton bundles, Trans. Amer. Math. Soc. 355 (2003), 49–55.

[19] A. S. Tikhomirov, Moduli of mathematical instanton vector bundles with odd c2 on projective space, Izvestiya: Mathematics 76 (2012), 991–1073.

[20] A. S. Tikhomirov, Moduli of mathematical instanton vector bundles with even c2 on projective space, Izvestiya: Mathematics 77 (2013), 1331–1355.

[21] M. Jardim, M. Verbitsky, Trihyperkähler reduction and instanton bundles on P3, Compositio Math. 150 (2014), 1836–1868.

[22] B. Schmidt, Rank two sheaves with maximal third Chern character in three-dimensional projective space, Matemática Contemporânea, Vol. 47 (2020), 228–270.