

На правах рукописи



ЯКУБОВА АЛИЕ РУСТЕМОВНА

**О НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ, СПЕКТРАЛЬНЫХ И
НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ, ПОРОЖДЕННЫХ
ПОЛУТОРАЛИНЕЙНОЙ ФОРМОЙ**

01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы и
оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ

**диссертации на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук**

Ростов-на-Дону – 2022

Работа выполнена на кафедре математического анализа Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Крымский федеральный университет им. В.И. Вернадского»

Научный руководитель: **Закора Дмитрий Александрович**
доктор физико-математических наук,
доцент кафедры математического анализа,
ФГАОУ ВО "Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского"

Официальные оппоненты: **Левенштам Валерий Борисович**
доктор физико-математических наук,
доцент, профессор кафедры алгебры и дискретной математики, ФГАОУ ВО "Южный федеральный университет"

Муравник Андрей Борисович
доктор физико-математических наук,
руководитель проекта в акционерном обществе
"Концерн "Созвездие"

Защита состоится 22 марта 2022 г. в 16:00 на заседании диссертационного совета ЮФУ01.06 на базе Южного федерального университета, расположенном по адресу: 344090, г. Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова 8А, ауд. 211.

С диссертацией можно ознакомиться в Зональной научной библиотеке Южного федерального университета по адресу: г. Ростов-на-Дону, ул. Зорге, 21-ж и на сайте <https://hub.sfedu.ru/storage/1/1297007/9760d44e-2d94-4355-a465-b1cbee336ab1/>.

Автореферат разослан «_____» _____ 2022 г.

Отзыв на автореферат в 2-х экз. (с указанием даты, Фамилии Имени Отчества, учёной степени, специальности, звания, организации, подразделения, должности, адреса, телефона, e-mail), заверенный печатью организации, просим направлять по адресу: 344090, г. Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова 8А, ауд. 111, ученому секретарю диссертационного совета ЮФУ01.06 Кряквину В.Д., а также в формате pdf на e-mail: kryakvin@sfedu.ru.

Ученый секретарь
диссертационного
совета ЮФУ01.06

Кряквин Вадим Донатович

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Исследование задач, порожденных абстрактной формулой Грина, является достаточно новым. Французский математик Ж.-П. Обэн¹ представил первые результаты, связанные с получением абстрактной формулы Грина. Позже эта формула была предложена С. Г. Крейн². Р. Е. Шоуволтер³ использовал абстрактную формулу Грина в виде, предложенном Ж.-П. Обэном. Дальнейшее продвижение в этом направлении принадлежит Н. Д. Копачевскому⁴, М. С. Аграновичу, Т. Я. Азизову, В. И. Войтицкому, П. А. Старкову, О. А. Андроновой, К. А. Радомирской.

Глубокие результаты исследования смешанных краевых задач в липшицевых областях для сильно эллиптических систем второго порядка, а также соответствующих спектральных задач, получены в работах М. С. Аграновича^{5, 6, 7}.

Представляемая работа посвящена изучению слабых решений краевых задач, соответствующих несамосопряженных спектральных задач, а также начально-краевых проблем в случае одной области на основе формулы Грина для полуторалинейной формы (для оператора Лапласа). На этой базе исследованы смешанные краевые, спектральные и начально-краевые задачи, порожденные полуторалинейной формой для двух областей. В диссертации применяются новые подходы к исследованию несамосопряженных краевых задач, а также задач сопряжения, основанные на применении полуторалинейных равномерно аккретивных форм.

Цели и задачи диссертационной работы. Ранее краевые, спектральные и начально-краевые задачи рассматривались на основе симметрической полуторалинейной формы $(\eta, u)_{H^1(\Omega)} = \Phi_0(\eta, u)$. Подобными исследованиями занимались, например, М. С. Агранович, Н. Д. Копачевский, В. И. Войтицкий, П. А. Старков, К. А. Радомирская. Копачевский Н. Д. предложил исследовать задачи для одной и двух областей в возмущенном ($\varepsilon \neq 0$) несимметрическом случае, когда вместо скалярного произведения $(\eta, u)_{H^1(\Omega)} = \Phi_0(\eta, u)$ имеется по-

¹ Обэн Ж.-П., Приближенное решение эллиптических краевых задач / Ж. П. Обэн.—Москва : Мир, 1977.—384 с.

² Крейн С. Г., О колебаниях вязкой жидкости в сосуде / С. Г. Крейн // ДАН СССР.—1964.—Т. 159, № 2.—С. 262–265.

³ Showalter R. E., Hilbert space methods for partial differential equations / R. E. Showalter. — Electronic J. Differ. Equ, 1994.—220 p.

⁴ Копачевский Н. Д., Об абстрактной формуле Грина для смешанных краевых задач и ее приложениях / Н. Д. Копачевский // Spectral and Evolutional Problems: Proc. of 21th Crimean Autumn Math. School-Symf. — 2011.—Т. 21, № 1.—С. 2–39.

⁵ Агранович М. С., Спектральные задачи для сильно эллиптических систем второго порядка в областях с гладкой и негладкой границей / М. С. Агранович // Успехи математических наук. — 2002. — Т. 57. — С. 3–78.

⁶ Agranovich M. S., Remarks on potential and besov spaces in a lipschits domain and on whitney arrays on its boundary / M. S. Agranovich // Russian Journal of Math. Physics.—2008.—Vol. 15, no. 2.—P. 146–155.

⁷ Agranovich M. S., Katsenelenbaum B. Z, Sivov A. N., Voitovich N. N., Generalized Method of Eigenoscillations in Diffraction Theory / M. S. Agranovich, B. Z. Katsenelenbaum, A. N. Sivov, N. N. Voitovich. — Berlin : Wiley-VCH, 1999.—378 p.

луторалинейная несимметрическая форма $\Phi_\varepsilon(\eta, u)$, определенная на пространстве $H^1(\Omega)$, ограниченная на нем и являющаяся равномерно аккретивной.

Таким образом, главной *целью* данной работы является исследование задач в несимметрическом случае. Параметр $\varepsilon \in \mathbb{R}$ введен для удобства рассмотрения, причем все изучаемые задачи при $\varepsilon \rightarrow 0$ переходят в проблемы, отвечающие соответствующим невозмущенным задачам.

Основными *задачами* исследования являются:

- исследование слабой разрешимости краевых задач в одной области;
- изучение поведения спектра возмущенных и невозмущенных спектральных задач, свойств корневых функций, получение теорем о структуре спектра в одной области;
- исследование начально-краевых задач и вывод теорем о существовании и единственности сильных по времени решений задач Коши в одной области;
- исследование слабой разрешимости смешанной возмущенной задачи в случае двух областей;
- исследование структуры и локализации спектра, свойств корневых функций смешанных возмущенных и невозмущенных спектральных проблем при первом и втором условиях сопряжения. Исследование свойств решений спектральных задач в случае, когда в пучке $L(\lambda, \mu)$ один параметр является спектральным, другой — фиксированным, и наоборот;
- исследование вопросов разрешимости задач Коши при первом и втором условиях сопряжения в двух областях.

Объект исследования. Краевые, спектральные и начально-краевые задачи, порожденные несимметрической полуторалинейной формой в случае одной и двух областей.

Предмет исследования. Слабая разрешимость возмущенных краевых задач в случае одной и двух областей. Свойства решений возмущенных спектральных задач при первом и втором условиях сопряжения. Сильная разрешимость задач Коши для дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений первого порядка.

Научная новизна. Все результаты диссертационного исследования являются новыми. Впервые исследованы возмущенные краевые, спектральные и начально-краевые задачи, порожденные несимметрической полуторалинейной формой в случае одной и двух областей. Получены необходимые и достаточные условия разрешимости краевых задач. Подробно изучены смешанные спектральные задачи сопряжения, порожденные полуторалинейной формой. Установлено, что исходные проблемы приводятся к исследованию операторного пучка, который зависит от двух комплексных параметров, один из которых считается фиксированным, а другой — спектральным. Изучены свойства решений возмущенных и невозмущенных спектральных задач при первом и втором условиях сопряжения. Исследованы смешанные возмущенные начально — краевые задачи при первом и втором условиях сопряжения. Доказаны теоремы о сильной разрешимости этих задач.

Теоретическая и практическая значимость. Работа имеет теоретическое значение. Ее результаты могут быть использованы в задачах математической физики, гидродинамики, теории упругости, теории колебаний вязкой жидкости в сосуде, теории дифракции, а также при исследовании аналогичных абстрактных проблем, порожденных абстрактной формулой Грина для полуторалинейных форм. Результаты исследований дополняют и развивают теорию абстрактной формулы Грина и дифференциальных уравнений, могут быть полезны как специалистам, работающим в области дифференциальных уравнений и математической физики, так и в исследованиях прикладного характера.

Методология и методы исследования. В работе все построения опираются на так называемую обобщенную формулу Грина для оператора Лапласа, являющуюся частным случаем абстрактной формулы для тройки гильбертовых пространств и оператора следа. При изучении краевых задач в диссертации используются в основном методы функционального анализа и теории операторов в гильбертовом пространстве. Исследование спектральных проблем проводится методами теории самосопряженных и несамопряженных операторов, действующих в гильбертовом пространстве, методами общей теории абстрактной формулы Грина для полуторалинейных форм и спектральной теории операторных пучков. При этом основным методом исследования является метод сведения спектральной задачи к операторному пучку известного вида. Для изучения начально-краевых задач, порождающих спектральные, использованы операторные методы математической физики в областях с липшицевыми границами, с помощью которых изучаемые задачи приводятся к задачам Коши для дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве. На этой основе доказываются теоремы о сильной разрешимости соответствующих начально-краевых задач. При изучении задач сопряжения использован принцип суперпозиции, позволяющий представить решение исходной неоднородной задачи в виде суммы решений вспомогательных краевых задач, содержащих неоднородность либо в уравнении, либо в одном из краевых условий.

Положения, выносимые на защиту. На защиту выносятся следующие результаты автора:

1. Утверждение о существовании и единственности слабого решения полной краевой задачи Неймана-Ньютона в одной области. Утверждение о структуре спектра, свойствах корневых функций, о локализации спектра в комплексной плоскости для несамопряженных спектральных проблем, близких к классическим задачам Дирихле, Неймана-Ньютона, Стеклова, Стефана. Утверждения о структуре спектра в возмущенных задачах С. Г. Крейна, М. С. Аграновича, И. Д. Чуешова.
2. Утверждения о существовании и единственности сильных по времени решений задач Коши, порождающих рассматриваемые в работе спектральные проблемы в одной области.
3. Утверждение о существовании и единственности слабого решения смешанной возмущенной краевой задачи в случае двух областей. Утверждения о структуре

спектра, свойствах корневых функций, о локализации спектра в комплексной плоскости для невозмущенных ($\varepsilon = 0$) и возмущенных ($\varepsilon \neq 0$) спектральных проблем при первом и втором условиях сопряжения. Утверждения о свойствах решений смешанных спектральных задач в случае, когда в пучке $L(\lambda, \mu)$ один параметр является спектральным, другой — фиксированным, и наоборот.

4. Утверждения о существовании и единственности сильных по времени решений задач Коши при первом и втором условиях сопряжения в двух областях.

Степень достоверности и апробация результатов. Достоверность результатов диссертации подтверждается строгими доказательствами, основанными на спектральной теории операторных пучков и общих методах функционального анализа. Результаты исследований шесть раз докладывались автором на XXVI-XXXI Крымских Осенних Математических Школах-симпозиумах по спектральным и эволюционным задачам: КРОМШ-2015-2020, Ласпи-Батилиман, Республика Крым, Россия, сентябрь 2015-2020 гг. (см. [2, 4, 6, 11, 12, 14]); на XXIV Международной конференции "Математика. Экономика. Образование", Абрау Дюрсо, Россия, 2016 г. (см. [1]); на Международной конференции "Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения - VII", Ростов-на-Дону, 2017 г. (см. [3]); на научных конференциях студентов и молодых специалистов по математике и информатике, КФУ им. В.И. Вернадского, Симферополь, 2014, 2016 гг. (см. [5, 8]); на научных конференциях профессорско-преподавательского состава "Дни науки КФУ", КФУ им. В. И. Вернадского, 2015, 2017 гг. (см. [7, 9, 10]); на семинарах кафедры математического анализа КФУ им. В. И. Вернадского под руководством профессора Н. Д. Копачевского, Симферополь, 2014-2020 гг.

Публикации. Результаты исследований опубликованы в 17 научных работах, четыре из которых в рецензируемых журналах из списка, рекомендованного диссертационным советом ЮФУ01.06 при ФГАОУ ВО «Южный федеральный университет» (см. [13, 15–17]), остальные в материалах и сборниках тезисов конференций (см. [1–12, 14]).

Три научные статьи [13, 15, 16] индексируются в РИНЦ.

Одна научная статья [17] опубликована в журнале, которая входит в международную наукометрическую базу данных Scopus.

Личный вклад автора.

Работа [17], опубликована в соавторстве. В работе [17] автору диссертации принадлежат Теоремы 2.1–2.4, Теоремы 3.1–3.11, Леммы 3.1–3.2, Теоремы 4.1–4.6, Леммы 4.1–4.2. Из работы [17] в диссертационную работу включены только те результаты, которые получены лично автором диссертации.

Изученные задачи поставлены профессором Н. Д. Копачевским. Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы. Подготовка к публикации полученных результатов проводилась совместно с соавторами, причем вклад диссертанта был определяющим. Все представленные в диссертации результаты получены лично автором.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, обзора литературы, 3 глав, заключения и библиографии. Общий объем диссертации 165 страниц, из них 155 страниц текста, включая 1 рисунок. Библиография включает 81 наименование на 10 страницах.

Благодарности

Искреннюю признательность и благодарность автор выражает своему научному руководителю профессору

Копачевскому Николаю Дмитриевичу

за постановку задач и помощь на всех этапах выполнения диссертации. Автор также выражает огромную благодарность своему научному руководителю Закоре Дмитрию Александровичу за ценные советы, постоянное внимание и поддержку, комментарии и замечания.

Работа выполнена при поддержке Регионального научно-образовательного математического центра ЮФУ, соглашение Минобрнауки России № 075-02-2021-1386.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во Введении обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследований, показана практическая значимость полученных результатов, представлены выносимые на защиту научные положения.

В первой главе приводится необходимая теоретическая часть. Сформулированы основные формулы Грина для тройки гильбертовых пространств, полуторалинейных форм и для смешанных краевых задач. В области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ с липшицевой границей $\Gamma := \partial\Omega$, для тройки гильбертовых пространств $E = L_2(\Omega)$, $F = H^1(\Omega)$, $G = L_2(\Gamma)$ и оператора следа $\gamma u := u|_{\Gamma}$ справедлива обобщенная формула Грина, порожденная оператором Лапласа:

$$\begin{aligned} (\eta, u)_{H^1(\Omega)} &:= \int_{\Omega} (\eta \bar{u} + \nabla \eta \cdot \nabla \bar{u}) \, d\Omega = \\ &= \langle \eta, u - \Delta u \rangle_{L_2(\Omega)} + \langle \gamma \eta, \frac{\partial u}{\partial n} \rangle_{L_2(\Gamma)} \quad \forall \eta, u \in H^1(\Omega), \\ u - \Delta u &\in (H^1(\Omega))^*, \quad \gamma \eta \in H^{1/2}(\Gamma), \quad \frac{\partial u}{\partial n} \in H^{-1/2}(\Gamma). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь слева в (1) стоит скалярное произведение в $H^1(\Omega)$, и оно является симметрической полуторалинейной формой в $H^1(\Omega)$: $\Phi_0(\eta, u) := (\eta, u)_{H^1(\Omega)}$.

На основе этой формулы Грина можно исследовать слабые решения классических краевых задач для оператора Лапласа, то есть задачи Дирихле, Неймана и другие, а также соответствующие спектральные и начально-краевые

проблемы.

Целью дальнейших рассмотрений является исследование подобных задач в несимметрическом случае, когда вместо скалярного произведения $(\eta, u)_{H^1(\Omega)} = \Phi_0(\eta, u)$ имеется полуторалинейная несимметрическая форма $\Phi_\varepsilon(\eta, u)$, определенная на пространстве $H^1(\Omega)$, ограниченная на нем и являющаяся равномерно аккретивной. Параметр $\varepsilon \in \mathbb{R}$ будет введен для удобства дальнейших рассмотрений, причем все изучаемые задачи при $\varepsilon = 0$ будут переходить в проблемы, отвечающие соответствующим невозмущенным задачам.

Дифференциальное выражение в (1) имеет вид $L_0 u = u - \Delta u$, а производная по внешней нормали $\partial_0 u := (\partial u / \partial n)_\Gamma$.

Рассмотрим возмущенное дифференциальное выражение

$$L_\varepsilon u := u - \Delta u + 2\varepsilon \sum_{k=1}^m c_k \frac{\partial u}{\partial x_k}, \quad c_k \in \mathbb{R}, \quad k = \overline{1, m}, \quad \varepsilon \in \mathbb{R}, \quad (2)$$

а также соответствующую обобщенную формулу Грина для полуторалинейной формы:

$$\begin{aligned} \Phi_\varepsilon(\eta, u) &:= (\eta, u)_{H^1(\Omega)} + \varepsilon \sum_{k=1}^m c_k \left[\left(\eta, \frac{\partial u}{\partial x_k} \right)_{L_2(\Omega)} - \left(\frac{\partial \eta}{\partial x_k}, u \right)_{L_2(\Omega)} \right] = \\ &= \langle \eta, L_\varepsilon u \rangle_{L_2(\Omega)} + \langle \gamma \eta, \partial_\varepsilon u \rangle_{L_2(\Gamma)} \quad \forall \eta, u \in H^1(\Omega), \end{aligned} \quad (3)$$

$$\partial_\varepsilon u := \partial_0 u - \varepsilon \sigma \gamma u, \quad \sigma := \sum_{k=1}^m c_k \cos(\widehat{\vec{n}, \vec{e}_k}), \quad \partial_\varepsilon u \in H^{-1/2}(\Gamma),$$

где L_ε — дифференциальное выражение (2), а $\partial_0 u := (\partial u / \partial n)_\Gamma$.

Все дальнейшие проблемы будем формулировать на базе этой формулы Грина.

Отметим еще, что $L_\varepsilon u = L_0 u + L_1 u$, где $L_1 u$ — дифференциальное выражение первого порядка, в то время как $L_0 u = u - \Delta u$ — дифференциальное выражение второго порядка.

Во второй главе исследованы краевые, спектральные и начально-краевые задачи, порожденные несимметрической полуторалинейной формой в случае одной области. Доказано существование слабых решений краевых задач Дирихле и Неймана-Ньютона (см. п. 2.1). На основе этих краевых задач исследованы несамосопряженные спектральные проблемы. Рассмотрим одну из них, а именно, спектральную задачу Дирихле:

$$L_\varepsilon u := u - \Delta u + 2\varepsilon \sum_{k=1}^m c_k \frac{\partial u}{\partial x_k} = \lambda u \quad (\text{в } \Omega), \quad u = 0 \quad (\text{на } \Gamma = \partial\Omega), \quad (4)$$

где $c_k \in \mathbb{R}$, $k = \overline{1, m}$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$, а $\lambda \in \mathbb{C}$ — спектральный параметр.

Поставим в соответствие исходной задаче операторное уравнение. С этой

целью введем операторы A_0 (положительно определенный, неограниченный, самосопряженный) и B_0 (неограниченный, симметрический) по закону

$$A_0 u := u - \Delta u, \quad u \in \mathcal{D}(A_0),$$

$$B_0 u := 2i \sum_{k=1}^m c_k \frac{\partial u}{\partial x_k}, \quad c_k \in \mathbb{R},$$

$$\mathcal{D}(B_0) := \{u \in H^1(\Omega) : u = 0 \text{ (на } \Gamma)\} = H_0^1(\Omega) = \mathcal{D}(A_0^{1/2}) \supset \mathcal{D}(A_0).$$

Тогда задача (4) сводится к проблеме на собственные значения:

$$(A_0 - i\varepsilon B_0)u = \lambda u, \quad u \in \mathcal{D}(A_0).$$

Для спектральной задачи Дирихле доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. *Спектр задачи Дирихле (4) состоит из изолированных конечно-кратных собственных значений λ_k , $k = 1, 2, \dots$, расположенных в правой полуплоскости и имеющих предельную точку $\lambda = \infty$. Для любого $\delta > 0$ все собственные значения этой задачи, кроме, быть может, конечного их числа, лежат в секторе $|\arg \lambda| < \delta$. Система корневых (собственных и присоединенных) элементов задачи полна в энергетическом пространстве $\mathcal{H}_{A_0} = H_0^1(\Omega)$ оператора A_0 . Собственные значения λ_k имеют асимптотическое поведение*

$$\lambda_k = \lambda_k(A_0)[1 + o(1)], \quad k \rightarrow \infty,$$

где $\lambda_k(A_0)$, в свою очередь, имеют асимптотическое поведение

$$\lambda_k(A_0) = d_m k^{2/m}[1 + o(1)], \quad k \rightarrow \infty.$$

Теорема 2. *Спектр задачи (4) расположен в параболической области*

$$\Lambda_\varepsilon := \{\operatorname{Re} \lambda \geq \lambda_1(A_0) : |\operatorname{Im} \lambda|^2 \leq \varepsilon^2 \|B_0 A_0^{-1/2}\|^2 \cdot \operatorname{Re} \lambda\},$$

а корневые элементы этой задачи образуют базис Абеля-Лидского порядка $\alpha > m/2$ в пространстве $H_0^1(\Omega)$.

Аналогичные результаты о дискретности спектра, его локализации, об асимптотическом поведении собственных значений, о полноте и базисности системы собственных и присоединенных (корневых) функций доказаны для спектральной задачи Неймана-Ньютона, Стеклова, Стефана, а также для других классов возмущенных спектральных задач, встречающихся в приложениях. Таких как: задача С. Г. Крейна (колебания вязкой жидкости в частично заполненном контейнере), И. Д. Чуешова (поверхностная диссипация энергии), М. С. Аграновича (теория дифракции) (см. пп. 2.2.2, 2.2.3, 2.2.4, 2.2.5).

Каждая из разобранных спектральных проблем порождается начально-краевой задачей, которая получается формальной заменой в спектральных задачах $\lambda \mapsto -d/dt$ и учитывает наличие заданных функций в уравнениях и краевых условиях. Опишем первую из задач, исследованных в работе.

Начально-краевая задача Дирихле

Она состоит в решении уравнения (см. (4))

$$\frac{\partial u}{\partial t} + L_\varepsilon u = f(t) \quad (\text{в } \Omega), \quad \gamma u = 0 \quad (\text{на } \Gamma), \quad u(0) = u^0. \quad (5)$$

Повторяя преобразования, сделанные в п. 2.2.1, приходим к выводу, что задача (5) равносильна задаче Коши

$$\frac{du}{dt} + (A_0 - i\varepsilon B_0)u = f(t), \quad u(0) = u^0, \quad (6)$$

где $u = u(t)$ — искомая функция переменной t со значениями в $L_2(\Omega)$. Свойства оператора $A_0 - i\varepsilon B_0$ описаны в п. 2.2.1.

Из этих свойств следует, что оператор B_0 вполне подчинен оператору A_0 , уравнение (6) как в невозмущенном случае ($\varepsilon = 0$), так и в возмущенном ($\varepsilon \neq 0$) является абстрактным параболическим уравнением, а полугруппа $\mathcal{U}(t)$, отвечающая ее генератору $-(A_0 - i\varepsilon B_0)$, является аналитической в некотором секторе, содержащем положительную полуось. Отсюда получаем следующий результат.

Теорема 3. Пусть в задаче (5) выполнены условия

$$\begin{aligned} u^0 &\in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) = \mathcal{D}(A_0), \\ f &\in C^\gamma(\mathbb{R}_+; L_2(\Omega)), \quad 0 < \gamma \leq 1. \end{aligned} \quad (7)$$

Тогда задача Коши (6), а вместе с ней и задача (5) имеют единственное сильное решение

$$u \in C^1(\mathbb{R}_+; L_2(\Omega)) \cap C(\mathbb{R}_+; \mathcal{D}(A_0)).$$

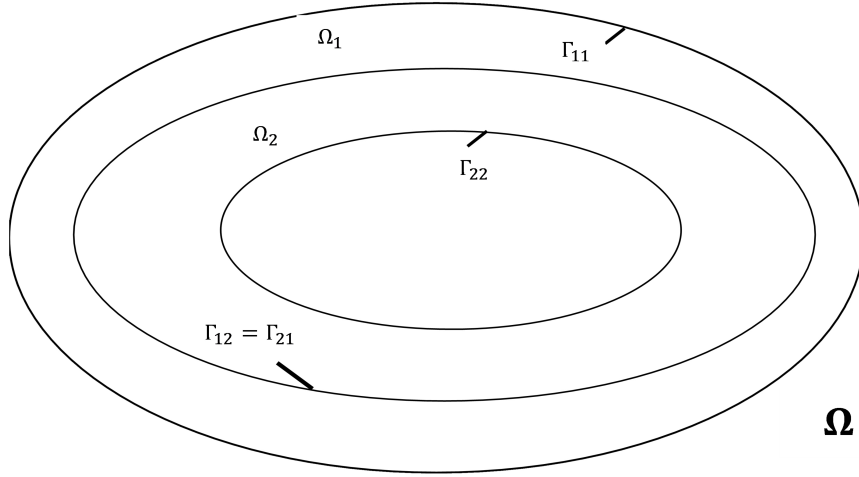
В работе также доказаны теоремы о существовании и единственности сильных решений для начально-краевых задач Неймана-Ньютона, Стеклова, Стефана, С. Г. Крейна, М. С. Аграновича, И. Д. Чуешова (см. параграфы 2.3.1, 2.3.2).

Результаты второй главы опубликованы в работах [1–11].

В третьей главе на базе уже рассмотренных краевых, спектральных и начально-краевых задач на основе полуторалинейной формы в случае одной области изучаются смешанные краевые, спектральные и начально-краевые задачи для двух областей. Итак, в области Ω , разбитой на две подобласти Ω_1, Ω_2 ,

сначала рассматривается задача сопряжения

$$\begin{aligned}
u_1 - \Delta u_1 + 2\varepsilon \sum_{k=1}^m c_{1k} \frac{\partial u_1}{\partial x_k} &= \lambda u_1 := f_1 \quad (\text{в } \Omega_1), \quad \gamma_{11} u_1 = \varphi_1 \quad (\text{на } \Gamma_{11}), \\
u_2 - \Delta u_2 + 2\varepsilon \sum_{k=1}^m c_{2k} \frac{\partial u_2}{\partial x_k} &= \lambda u_2 := f_2 \quad (\text{в } \Omega_2), \quad \gamma_{22} u_2 = \varphi_2 \quad (\text{на } \Gamma_{22}), \\
\gamma_{21} u_1 - \gamma_{12} u_2 &= \varphi_{21} \quad (\text{на } \Gamma_{12} = \Gamma_{21}), \\
\left(\frac{\partial u_1}{\partial n_{12}} - \varepsilon \sigma_{12} \gamma_{21} u_1 \right) + \left(\frac{\partial u_2}{\partial n_{21}} - \varepsilon \sigma_{21} \gamma_{12} u_2 \right) &= \psi_{21} \quad (\text{на } \Gamma_{12} = \Gamma_{21}), \\
\sigma_{12} &:= \sum_{k=1}^m c_{1k} \cos(\widehat{\vec{n}_{12}, \vec{e}_k}), \quad \sigma_{21} := \sum_{k=1}^m c_{2k} \cos(\widehat{\vec{n}_{21}, \vec{e}_k}).
\end{aligned} \tag{8}$$



Предполагается, что задача (8) имеет слабое решение $u = (u_1; u_2) \in H^1(\Omega) = H^1(\Omega_1) \oplus H^1(\Omega_2)$, и выводится уравнение, которому удовлетворяет это решение. С этой целью задача переписывается в виде неоднородной невязанной:

$$\begin{aligned}
u_1 - \Delta u_1 &= f_1 - 2\varepsilon \sum_{k=1}^m c_{1k} \frac{\partial u_1}{\partial x_k} =: \tilde{f}_1 \quad (\text{в } \Omega_1), \quad \gamma_{11} u_1 = \varphi_1 \quad (\text{на } \Gamma_{11}), \\
u_2 - \Delta u_2 &= f_2 - 2\varepsilon \sum_{k=1}^m c_{2k} \frac{\partial u_2}{\partial x_k} =: \tilde{f}_2 \quad (\text{в } \Omega_2), \quad \gamma_{22} u_2 = \varphi_2 \quad (\text{на } \Gamma_{22}), \\
\gamma_{21} u_1 - \gamma_{12} u_2 &= \varphi_{21} \quad (\text{на } \Gamma_{12} = \Gamma_{21}), \\
\partial_{21} u_1 + \partial_{12} u_2 &= \varepsilon(\sigma_{12} \gamma_{21} u_1 - \sigma_{21} \gamma_{12} u_2) + \psi_{21} =: \tilde{\psi}_{21} \quad (\text{на } \Gamma_{12} = \Gamma_{21}), \\
\sigma_{12} &:= \sum_{k=1}^m c_{1k} \cos(\widehat{\vec{n}_{12}, \vec{e}_k}), \quad \sigma_{21} := \sum_{k=1}^m c_{2k} \cos(\widehat{\vec{n}_{21}, \vec{e}_k}).
\end{aligned} \tag{9}$$

Здесь через Γ_{jj} , $j = 1, 2$, обозначены внешние свободные границы, а через $\Gamma_{12} = \Gamma_{21}$ — граница стыка областей. Полагаем, что области $\Omega_i \subset \mathbb{R}^m$ имеют липшицевы границы, разбитые на липшицевы куски Γ_{ij} . Через φ_1, φ_2 обозначены следы функций u_j , а через $\partial_{ij}u_j$ — соответствующие производные по внешней нормали; f_j — заданные функции в Ω_j , $j = 1, 2$, φ_j — заданные функции на внешних границах Γ_{jj} , $j = 1, 2$. Функция φ_{21} задает разрыв следов, а ψ_{21} — разрыв производных по внешней нормали на границе стыка областей.

Целью является нахождение функций $u_j \in H^1(\Omega)$, $j = 1, 2$, для которых выполнены уравнения в (9), внешние граничные условия, а также условия сопряжения на стыках областей. Исследование проводится на основе формулы Грина для полуторалинейной формы следующего вида (напомним, что выбор полуторалинейной формы изначально может быть произвольным):

$$\begin{aligned} \Phi_\varepsilon(\eta, u) &:= (\eta, u)_{H^1(\Omega)} + \varepsilon \sum_{k=1}^m c_{1k} \left[\left(\eta_1, \frac{\partial u_1}{\partial x_k} \right)_{L_2(\Omega_1)} - \left(\frac{\partial \eta_1}{\partial x_k}, u_1 \right)_{L_2(\Omega_1)} \right] + \\ &\quad + \varepsilon \sum_{k=1}^m c_{2k} \left[\left(\eta_2, \frac{\partial u_2}{\partial x_k} \right)_{L_2(\Omega_2)} - \left(\frac{\partial \eta_2}{\partial x_k}, u_2 \right)_{L_2(\Omega_2)} \right] = \\ &= \langle \eta_1, u_1 - \Delta u_1 + 2\varepsilon \sum_{k=1}^m c_{1k} \frac{\partial u_1}{\partial x_k} \rangle_{L_2(\Omega_1)} + \langle \eta_2, u_2 - \Delta u_2 + 2\varepsilon \sum_{k=1}^m c_{2k} \frac{\partial u_2}{\partial x_k} \rangle_{L_2(\Omega_2)} + \\ &+ \langle \gamma_{11}\eta_1, \frac{\partial u_1}{\partial n_{12}} - \varepsilon\sigma_{12}\gamma_{21}u_1 \rangle_{L_2(\Gamma_{11})} + \langle \gamma_{22}\eta_2, \frac{\partial u_2}{\partial n_{21}} - \varepsilon\sigma_{21}\gamma_{12}u_2 \rangle_{L_2(\Gamma_{22})} + \\ &+ \langle \gamma_{21}\eta_1, \frac{\partial u_1}{\partial n_{12}} - \varepsilon\sigma_{12}\gamma_{21}u_1 \rangle_{L_2(\Gamma_{12})} + \langle \gamma_{12}\eta_2, \frac{\partial u_1}{\partial n_{21}} - \varepsilon\sigma_{21}\gamma_{12}u_2 \rangle_{L_2(\Gamma_{21})}. \end{aligned} \quad (10)$$

Дальнейшие рассуждения направлены на получение необходимых и достаточных условий разрешимости задачи (9), а также представление этого решения через операторы вспомогательных краевых задач. При этом будет использован принцип суперпозиции, позволяющий представить решение задачи (9) в виде суммы решений четырех вспомогательных краевых задач (невозмущенных), содержащих неоднородность либо в уравнении, либо в одном из краевых условий.

Решение ищем в виде

$$u = (u_1; u_2) = \sum_{j=1}^4 (u_{j1}, u_{j2}) =: \sum_{j=1}^4 u_{(j)},$$

где $u_{(j)}$ — решения вспомогательных задач.

Первый этап — вспомогательная задача Зарембы:

$$u_{11} - \Delta u_{11} = 0 \quad (\text{в } \Omega_1), \quad \gamma_{11}u_{11} = \varphi_1 \quad (\text{на } \Gamma_{11}), \quad \partial_{12}u_{11} = 0 \quad (\text{на } \Gamma_{21}); \quad (11)$$

$$u_{12} - \Delta u_{12} = 0 \text{ (в } \Omega_2), \quad \gamma_{22} u_{12} = \varphi_2 \text{ (на } \Gamma_{22}), \quad \partial_{21} u_{12} = 0 \text{ (на } \Gamma_{12} = \Gamma_{21}). \quad (12)$$

Здесь φ_1, φ_2 заданы, т.е. условия Дирихле на внешних границах неоднородны, а уравнения и условия Неймана на стыке однородные. Таким образом, для $u_{(1)} = (u_{11}; u_{12})$ имеем задачу Зарембы, которая распадается на две независимые задачи (11), (12).

С помощью соответствующей формулы Грина (см. (10)) дано определение слабого решения этой проблемы и на этой основе получен следующий результат.

Теорема 4. *Каждая из задач Зарембы (11), (12) имеет единственное слабое решение $u_{1k} \in H_h^1(\Omega_k)$ тогда и только тогда, когда выполнено условие*

$$\varphi_k \in H^{1/2}(\Gamma_{kk}), \quad k = 1, 2,$$

и это решение выражается формулой

$$u_{1k} = \tilde{\gamma}_{kk}^{-1} \varphi_k, \quad \tilde{\gamma}_{kk}^{-1} \in \mathcal{L}(H^{1/2}(\Gamma_{kk}); H_h^1(\Omega_k)), \quad k = 1, 2.$$

Для оставшихся трех вспомогательных задач также доказаны теоремы о существовании и единственности слабого решения (см. п. 3.1.1). Складывая решения четырех вспомогательных задач, получаем следующую связь решений возмущенной и невозмущенной задач

$$\begin{aligned} u + \varepsilon A^{-1} \left(\sum_{k=1}^m c_{1k} \frac{\partial u_1}{\partial x_k}; \sum_{k=1}^m c_{2k} \frac{\partial u_2}{\partial x_k} \right) - \varepsilon W_{21} (\sigma_{12} \gamma_{21} u_1 - \sigma_{21} \gamma_{12} u_2) = \\ = (I + \hat{C}) \hat{\varphi} + V \varphi_{21} + A^{-1} f + W_{21} \psi_{21} =: u_0, \end{aligned} \quad (13)$$

или

$$(I + \varepsilon S) u_\varepsilon = u_0, \quad u_0, u = u_\varepsilon \in H^1(\Omega), \quad S \in \mathfrak{S}_\infty(H^1(\Omega)).$$

Окончательно получено следующее утверждение.

Теорема 5. *Если $I + \varepsilon S$ обратим, в частности, если*

$$|\varepsilon| \cdot \|S\| < 1,$$

то исходная возмущенная краевая задача (9) разрешима, то есть существует единственное слабое решение, которое выражается формулой

$$u_\varepsilon = (I + \varepsilon S)^{-1} u_0, \quad u_0, u_\varepsilon \in H^1(\Omega), \quad S \in \mathfrak{S}_\infty(H^1(\Omega)),$$

где u_0 — сумма слагаемых в (13).

На основе изложенного выше подхода для краевых задач в работе рассматриваются спектральные задачи сопряжения. Сначала исследуются невозмущен-

ные смешанные спектральные задачи при первом условии сопряжения. Имеем в областях Ω_1 , Ω_2 и на внешних границах:

$$\begin{aligned} u_1 - \Delta u_1 &= \lambda u_1 =: f_1 \text{ (в } \Omega_1); & \partial_{11} u_1 &= \lambda \gamma_{11} u_1 =: \psi_1 \text{ (на } \Gamma_{11}), \\ u_2 - \Delta u_2 &= \lambda u_2 =: f_2 \text{ (в } \Omega_2); & \partial_{12} u_2 &= \lambda^{-1} \gamma_{22} u_2 =: \psi_2 \text{ (на } \Gamma_{22}). \end{aligned} \quad (14)$$

На границах стыка задается один из двух вариантов условия сопряжения:

$$\gamma_{21} u_1 - \gamma_{12} u_2 = 0, \quad \partial_{21} u_1 + \partial_{12} u_2 = \mu \gamma_{21} u_1 =: \psi_{21} \quad (\text{на } \Gamma_{21}), \quad (15)$$

$$\partial_{21} u_1 = -\partial_{12} u_2 = \psi_{21} := \mu(\gamma_{21} u_1 - \gamma_{12} u_2) \quad (\text{на } \Gamma_{12}).$$

В этой проблеме имеется два параметра λ и μ , один из которых можно считать спектральным, а второй — фиксированным.

Из постановки задачи (14)-(15) видно, что ее слабое решение $u = (u_1; u_2)$ естественно искать в пространстве $H_\Gamma^1(\Omega) \subset H^1(\Omega_1) \oplus H^1(\Omega_2)$.

Решение задачи представляется в виде суммы решений вспомогательных задач, в которых ”неоднородности” (т.е. f_k и ψ_k) содержатся либо в уравнениях, либо в одном из краевых условий (см. п. 3.2.1.). Имеем

$$u = \sum_{k=1}^5 u_{(k)} = \sum_{k=1}^5 (u_{k1}; u_{k2}).$$

С использованием соответствующих формул для решений каждой из этих вспомогательных задач, приходим к выводу, что слабое решение задачи (14)-(15) удовлетворяет уравнению

$$u = \sum_{k=1}^5 u_{(k)} = \lambda V_{11} \gamma_{11} p_1 u + \lambda^{-1} V_{22} \gamma_{22} p_2 u + \lambda A^{-1} \tilde{p}_1 u + \lambda A^{-1} \tilde{p}_2 u + \mu V_{21} \gamma_{21} p_1 u.$$

Далее проведя ряд преобразований (см. п. 3.2.1), получим спектральную задачу

$$L(\lambda, \mu)v := (I - \lambda(A^{-1} + B_{11}) - \lambda^{-1}B_{22} - \mu K_{22})v = 0, \quad v \in L_2(\Omega), \quad (16)$$

где $0 < A^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty(L_2(\Omega))$,

$$\begin{aligned} 0 &\leq B_{11} := A^{1/2} V_{11} (V_{11})^* A^{-1/2} \in \mathfrak{S}_\infty(L_2(\Omega)), \\ 0 &\leq B_{22} := A^{1/2} V_{22} (V_{22})^* A^{-1/2} \in \mathfrak{S}_\infty(L_2(\Omega)), \\ 0 &\leq K_{22} := A^{1/2} V_{21} (V_{21})^* A^{-1/2} \in \mathfrak{S}_\infty(L_2(\Omega)) \end{aligned} \quad (17)$$

для операторного пучка $L(\lambda, \mu)$ с параметрами λ и μ , один из которых можем считать фиксированным, другой — спектральным.

В параграфе 3.2.2. исследованы возмущенные смешанные спектральные

задачи сопряжения при первом условии сопряжения. Имеем в областях Ω_1 , Ω_2 и на внешних границах:

$$\begin{aligned} u_1 - \Delta u_1 = \lambda u_1 &=: f_1 - 2\varepsilon \sum_{k=1}^m c_{1k} \frac{\partial u_1}{\partial x_k} =: \tilde{f}_1 \quad (\text{в } \Omega_1), \\ u_2 - \Delta u_2 = \lambda u_2 &=: f_2 - 2\varepsilon \sum_{k=1}^m c_{2k} \frac{\partial u_2}{\partial x_k} =: \tilde{f}_2 \quad (\text{в } \Omega_2), \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \partial_{11} u_1 &= \lambda \gamma_{11} u_1 + \varepsilon \sigma_1 \gamma_{11} u_1 =: \psi_1 + \varepsilon \sigma_1 \gamma_{11} u_1 =: \widetilde{\psi}_1 \quad (\text{на } \Gamma_{11}), \\ \partial_{22} u_2 &= \lambda^{-1} \gamma_{22} u_2 + \varepsilon \sigma_2 \gamma_{22} u_2 =: \psi_2 + \varepsilon \sigma_2 \gamma_{22} u_2 =: \widetilde{\psi}_2 \quad (\text{на } \Gamma_{22}), \end{aligned} \quad (19)$$

на границах стыка задается один из двух вариантов условия сопряжения:

$$\begin{aligned} \gamma_{21} u_1 - \gamma_{12} u_2 &= 0, \quad \partial_{21} u_1 + \partial_{12} u_2 = \varphi_{21} + \varepsilon (\sigma_{12} \gamma_{21} u_1 - \sigma_{21} \gamma_{12} u_2) = \\ &= \mu \gamma_{21} u_1 + \varepsilon (\sigma_{12} \gamma_{21} u_1 - \sigma_{21} \gamma_{12} u_2) =: \widetilde{\psi}_{21} \quad (\text{на } \Gamma_{21}), \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \partial_{21} u_1 + \partial_{12} u_2 &= \psi_{21} + \varepsilon (\sigma_{12} \gamma_{21} u_1 - \sigma_{21} \gamma_{12} u_2) = \mu (\gamma_{21} u_1 - \gamma_{12} u_2) + \\ &+ \varepsilon (\sigma_{12} \gamma_{21} u_1 - \sigma_{21} \gamma_{12} u_2) =: \widetilde{\psi}_{21} \quad (\text{на } \Gamma_{21}). \end{aligned} \quad (21)$$

Решение задачи (18)-(20) снова ищем в виде суммы решений пяти вспомогательных задач (см. п. 3.2.2.). Имеем:

$$\begin{aligned} u_\varepsilon &= \varepsilon V_{11} \sigma_1 \gamma_{11} p_1 u_\varepsilon - \varepsilon V_{22} \sigma_2 \gamma_{22} p_2 u_\varepsilon + \varepsilon A^{-1} \left(\sum_{k=1}^m c_{1k} \frac{\partial u_1}{\partial x_k}; \sum_{k=1}^m c_{2k} \frac{\partial u_2}{\partial x_k} \right) - \\ &- \varepsilon V_{21} (\sigma_{12} \gamma_{21} u_1 - \sigma_{21} \gamma_{12} u_2) = \lambda (A^{-1} + V_{11} V_{11}^*) u_\varepsilon + \\ &+ \lambda^{-1} (V_{22} (V_{22})^*) u_\varepsilon + \mu V_{21} (V_{21})^* u_\varepsilon, \end{aligned} \quad (22)$$

где $V_{kk} = (\gamma_{kk} p_k)^*$.

Здесь возникает следующая спектральная задача

$$L(\lambda, \mu) v_\varepsilon := ((I - \varepsilon S) - \lambda (A^{-1} + B_{11}) - \lambda^{-1} B_{22} - \mu K_{22}) v_\varepsilon = 0, \quad v_\varepsilon \in L_2(\Omega), \quad (23)$$

где A — оператор гильбертовой пары $(H_\Gamma^1(\Omega); L_2(\Omega))$, операторы B_{11} , B_{22} , K_{22} описаны в (17), а $S \in \mathfrak{S}_\infty(L_2(\Omega))$,

$$\begin{aligned} S &:= A^{1/2} V_{11} \sigma_1 \gamma_{11} p_1 A^{-1/2} + A^{1/2} V_{22} \sigma_2 \gamma_{22} p_2 A^{-1/2} + \\ &+ A^{-1/2} \left(\sum_{k=1}^m c_{1k} \frac{\partial u_1}{\partial x_k}; \sum_{k=1}^m c_{2k} \frac{\partial u_2}{\partial x_k} \right) A^{-1/2} - A^{1/2} V_{21} (\sigma_{12} \gamma_{21} p_1 - \sigma_{21} \gamma_{12} p_2). \end{aligned}$$

Операторные пучки (16) и (23) содержат два параметра λ и μ . Это позволяет исследовать два класса задач: при фиксированном $\mu \in \mathbb{C}$ возникают задачи со спектральным параметром λ в уравнении, а при фиксированном $\lambda \in \mathbb{C}$ —

задачи со спектральным параметром μ в краевом условии на границе сопряжения. В зависимости от этого получаются различные выводы о полноте, базисности корневых элементов и структуре спектра этих задач при первом и втором условиях сопряжения (см. п. 3.2.3-3.2.10).

Далее, на основе изложенного выше подхода для краевых и спектральных задач в работе рассматриваются смешанные начально-краевые проблемы математической физики при первом и втором условиях сопряжения. Доказаны теоремы о существовании и единственности сильных по времени решений задач Коши, порождающих рассматриваемые в работе спектральные проблемы в двух областях (см. п. 3.3.).

Результаты третьей главы опубликованы в работах [12, 13, 16].

В Заключение диссертационной работы приведены основные результаты работы, которые состоят в следующем:

1. Доказана теорема о слабых решениях полной краевой задачи Неймана-Ньютона в одной области. Доказаны теоремы о структуре спектра, свойствах корневых функций, о локализации спектра в комплексной плоскости для несамосопряженных спектральных проблем, близких к классическим задачам Дирихле, Неймана-Ньютона, Стеклова, Стефана. Доказаны теоремы о структуре спектра в возмущенных задачах С. Г. Крейна, М. С. Аграновича, И. Д. Чуешова.
2. Доказаны теоремы о существовании и единственности сильных по времени решений задач Коши, порождающих рассматриваемые в работе спектральные проблемы в одной области.
3. Доказана теорема о слабом решении смешанной возмущенной краевой задачи в случае двух областей. Доказаны теоремы о структуре спектра, свойствах корневых функций, о локализации спектра в комплексной плоскости для невозмущенных ($\varepsilon = 0$) и возмущенных ($\varepsilon \neq 0$) спектральных проблем при первом и втором условиях сопряжения. Установлены свойства решений смешанных спектральных задач в случае, когда в пучке $L(\lambda, \mu)$ один параметр является спектральным, другой — фиксированным, и наоборот.
4. Доказаны теоремы о существовании и единственности сильных по времени решений задач Коши при первом и втором условиях сопряжения в двух областях.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. *Копачевский, Н. Д.* О краевых, спектральных и начально-краевых задачах, порожденных полуторалинейными формами / Н. Д. Копачевский, А. Р. Якубова // *XXIV Междунар. конф. "Математика. Экономика. Образование"*; IX Междунар. симпоз. "Ряды Фурье и их прилож."; *Междунар. конф. по стохастич. мет. (Труды)*. — 2016. — С. 57–64. <http://conf-symp.sfedu.ru/2016tMoryak.pdf>.
2. *Копачевский, Н. Д.* О некоторых спектральных и начально-краевых за-

- дачах, порожденных полуторалинейными формами / Н. Д. Копачевский, А. Р. Якубова // *Международ. конф. "XXVII Крымская осенняя матем. школа-симпоз. по спектральным и эволюционным задачам"*. (КРОМШ-2016) // *Сборн. материалов.* — 2016. — С. 21. <http://kromsh.info/files/abstracts/abstracts-2016.pdf>.
3. Копачевский, Н. Д. О некоторых спектральных и начально-краевых задачах, порожденных полуторалинейной формой для оператора Лапласа / Н. Д. Копачевский, А. Р. Якубова // *Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения VII : материалы докладов международной конференции, Ростов-на-Дону, 24-28 апреля 2017 года.* — 2017. — С. 98–99. <http://www.otha.sfedu.ru/conf2017>.
 4. Копачевский, Н. Д. Об абстрактной формуле Грина для полуторалинейных форм и ее приложениях / Н. Д. Копачевский, А. Р. Якубова // *Международ. конф. "XXVIII Крымская осенняя матем. школа-симпоз. по спектральным и эволюционным задачам"* (КРОМШ - 2017) // *Сборн. материалов.* — 2017. — С. 36–37. <http://kromsh.info/files/abstracts/abstracts-2017-p1.pdf>.
 5. Якубова, А. Р. Абстрактная формула Грина для полуторалинейных форм / А. Р. Якубова // *Таврическая научная конференция студентов и молодых специалистов по математике и информатике.* — 2014. — С. 70–76. <http://fmiconf.cfuv.ru/pdf/FMICONF2014.pdf>.
 6. Якубова, А. Р. Об одной спектральной задаче, порожденной несимметрической полуторалинейной формой / А. Р. Якубова // *Спектральные и эволюционные задачи: сб. трудов XXVI Крымской Осенней матем. школы-симпозиума.* — 2015. — С. 29. <http://kromsh.info/files/abstracts/abstracts-2015-p1.pdf>.
 7. Якубова, А. Р. Об одной спектральной задаче, порожденной полуторалинейной формой / А. Р. Якубова // *Сборник тезисов участников I научной конференции профессорско-преподавательского состава, аспирантов, студентов и молодых ученых "Дни науки КФУ им. В.И. Вернадского"*. — 2015. — С. 298–299. <http://science.cfuv.ru/wp-content/uploads/2016/12/TA1.pdf>.
 8. Якубова, А. Р. Эволюционные и спектральные задачи, порожденные несимметрическими полуторалинейными формами / А. Р. Якубова // *Таврическая научная конференция студентов и молодых специалистов по математике и информатике.* — 2016. — С. 102–106. <http://fmiconf.cfuv.ru/pdf/doklad-2016.pdf>.
 9. Якубова, А. Р. О некоторых спектральных и начально-краевых задачах, порожденных полуторалинейной формой для оператора Лапласа / А. Р. Якубова // *Математика, информатика, компьютерные науки, моделирование, образование : сборник научных трудов научно-практической конференции МИКМО-2017 и Таврической научной конференции студентов и молодых специалистов по математике и информатике.* — 2017. — С. 89–90.

<http://mics.su/files/theses/2017.pdf>.

10. Якубова, А. Р. Об абстрактной формуле Грина для полуторалинейных форм и ее приложениях / А. Р. Якубова // *Сборник тезисов участников III научно-практической конференции "Дни науки КФУ им. В.И. Вернадского"*. — 2017. — С. 547–548. <http://www.academia.edu>.
11. Якубова, А. Р. О некоторых задачах, порожденных полуторалинейной формой / А. Р. Якубова // *Сборник материалов международной конференции "XXIX Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам" (КРОМШ-2017)*. — 2018. — С. 95–96. <http://kromsh.info/files/abstracts/abstracts-2018-p1.pdf>.
12. Якубова, А. Р. О некоторых смешанных краевых и спектральных задачах, порожденных полуторалинейной формой / А. Р. Якубова // *Сборник материалов международной конференции "XXX Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам" (КРОМШ-2019) : сборник материалов международной конференции*. — 2019. — С. 82–84. <http://www.elibrary.ru/item.asp?id=41315743>.
13. Якубова, А. Р. Возмущенные начально-краевые задачи сопряжения / А. Р. Якубова // *Таврический вестник информатики и математики (ТВИМ)*. — 2020. — № 4(49). — С. 109–120. http://tvim.info/files/journal/tvim_2020_4.pdf.
14. Якубова, А. Р. О начально-краевых задачах, порожденных полуторалинейной формой / А. Р. Якубова // *XXXI Крымская осенняя математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам (КРОМШ-2020) : сборник материалов международной конференции*. — 2020. — С. 199–200. http://drive.google.com/file/d/1g45dpPd_HaH6SBCS6Yzk4QfZS8bl411U/edit.
15. Якубова, А. Р. О свойствах решений некоторых смешанных спектральных задач / А. Р. Якубова // *Таврический вестник информатики и математики (ТВИМ)*. — 2020. — № 2 (47). — С. 88–110. http://tvim.info/files/journal/tvim_2020_2.pdf.
16. Якубова, А. Р. О спектральных и эволюционных задачах, порожденных полуторалинейной формой / А. Р. Якубова // *Современная математика. Фундаментальные направления*. — 2020. — Т. 66, № 2. — С. 335–371. <http://elibrary.ru/item.asp?id=43868700>.
17. Kopachevskii, N. D. On some problems generated by a sesquilinear form / N. D. Kopachevskii, A. R. Yakubova // *Journal of Mathematical Sciences*. — 2020. — Vol. 250, no. 4. — Pp. 622–659. <http://link.springer.com/article/10.1007>.
 Русская версия: Копачевский, Н. Д. О некоторых задачах, порожденных полуторалинейной формой / Н. Д. Копачевский, А. Р. Якубова // *Современная математика. Фундаментальные направления*. — 2017. — Т. 63, вып. 2. — С. 278–315. <http://mi.mathnet.ru/cmfd321>.