

На правах рукописи



Сахбиев Олег Миргасимович

**ВАРИАЦИОННЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ТРЕХМЕРНЫХ
КОНСТРУКЦИЙ НА ОСНОВЕ АППРОКСИМИРУЮЩИХ
ФУНКЦИЙ С КОНЕЧНЫМИ НОСИТЕЛЯМИ**

Специальность: 01.02.04 – механика деформируемого твердого тела

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой
степени кандидата физико-
математических наук

Казань – 2018

Работа выполнена в ФГБОУ ВО «Казанский национальный
исследовательский технологический университет»

Научный руководитель: **Хайруллин Фарид Сагитович**, доктор
физико-математических наук, профессор

Официальные
оппоненты: **Гуреева Наталья Анатольевна**, доктор
физико-математических наук, доцент,
доцент кафедры высшей математики
ФГБОУ ВО «Волгоградский
государственный аграрный университет»

Бережной Дмитрий Валерьевич,
кандидат физико-математических наук,
доцент, доцент кафедры теоретической
механики ФГАОУ ВО «Казанский
(Приволжский) федеральный университет»

Ведущая организация: ФГБОУ ВО «Казанский национальный
исследовательский технический
университет им. А.Н.Туполева-КАИ»

Защита состоится «6» июня 2018 года в 14.30 часов на заседании
диссертационного совета Д 212.081.11 при Казанском (Приволжском)
федеральном университете по адресу: 420008, г. Казань, ул.
Кремлевская, д. 35, ауд. 610.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке им. Н.И.
Лобачевского при Казанском (Приволжском) федеральном
университете. Электронный вариант диссертации и автореферата
размещен на сайте <http://www.kpfu.ru>

Автореферат разослан апреля 2018 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
кандидат физико-математических наук



А.А. Саченков

I. Общая характеристика работы

Актуальность темы. В настоящее время методы расчета на прочность сложных конструкций являются достаточно развитыми. Однако, в силу того, что создаются новые материалы, составленные из неоднородных компонентов, проектируются все более сложные конструкции, возникают новые вычислительные возможности и т.п., возникает необходимость совершенствования методов расчета.

Особое место в расчетах на прочность занимает расчеты на прочность тонкостенных конструкций, что обусловлено широким использованием тонкостенных элементов в технике. Достаточно очевидны преимущества использования таких элементов: благодаря своей конфигурации с одной стороны они являются достаточно легкими, с другой стороны они обладают достаточной прочностью и жесткостью, что в конечном итоге делает их использование технически и экономически обоснованным.

Для расчета тонкостенных элементов конструкций сложной формы практически невозможно применять разрешающие уравнения теории тонкостенных конструкций. Аналитические решения можно получить в основном только для некоторых видов конструкций сложной формы при простых случаях нагружения, поэтому для решения прикладных задач используются в основном приближенные или численные методы.

Расчет составных конструкций, в том числе тонкостенных, производится в основном вариационными методами, в частности методом конечных элементов. В настоящее время МКЭ является наиболее распространенным.

Для определения напряженно-деформированного состояния (НДС) тонкостенных конструкций методом конечных элементов используются два подхода. При первом подходе решение задачи строится на основе теории оболочек, определяющие уравнения в которой получаются с использованием некоторых упрощающих гипотез. В этом случае задача становится двумерной, и для ее решения используются различные двумерные конечные элементы, либо одномерной в случае расчета стержней. При втором подходе построение конечных элементов производится на основе трехмерных уравнений теории упругости. Повышение размерности задачи, конечно, усложняет ее решение. Однако это позволяет получать более

точные результаты в зонах концентрации напряжений, поскольку часто там возникают пластические деформации и использование упрощающих гипотез о недеформировании нормали становится неприемлемым. Во многих случаях использование трехмерных конечных элементов фактически является безальтернативным.

В настоящее время существует множество конечных элементов, но не существует универсального конечного элемента одинаково хорошего для расчетов самых различных задач.

Поэтому совершенствование МКЭ в трехмерной постановке и разработка новых трехмерных конечных элементов для расчетов тонкостенных элементов конструкций является актуальным и представляет практический интерес.

Цель диссертационной работы заключается в разработке вариационного метода определения напряженно-деформированного состояния упругих тел, основанного на использовании функций с конечными носителями произвольной степени аппроксимации, позволяющего производить расчеты как трехмерных конструкций, так и тонких оболочек сложной формы.

Реализация предложенного вариационного метода на языках программирования (Fortran, Java) для дальнейшего определения НДС трехмерных конструкций (в том числе тонкостенных) с целью апробации метода.

Научная новизна диссертационной работы заключается в следующем:

1. Предложен алгоритм построения аппроксимирующих функций произвольного порядка для трехмерного тела в виде шестигранника с гладкими криволинейными гранями в декартовой и криволинейной системах координат.

2. На основе предложенных функций с конечными носителями разработан вариационный метод определения напряженно-деформированного состояния трехмерных, в том числе составных трехмерных и тонкостенных конструкций.

3. Разработан алгоритм формирования матрицы жесткости для трехмерных конструкций сложной формы.

4. Предложена методика расчета трехмерных ортотропных оболочек с помощью представленного метода.

Практическая ценность

1. Разработан вариационный метод, основанный на использовании аппроксимирующих функций с конечными носителями произвольного порядка, позволяющий производить расчеты трехмерных конструкций, элементами которых могут быть подобласти в виде шестигранников с криволинейными гранями. Предложенный метод позволяет определять НДС трехмерных тел, в том числе: составных сложных конструкций, тонкостенных элементов конструкций (пластин и оболочек), ортотропных многослойных конструкций, тонких стержневых систем.

2. На основании предложенных алгоритмов были разработаны программные модули (Fortran, Java), которые могут быть использованы в инженерных расчетах конструкций и сооружений, в особенности при наличии зон концентрации напряжений (отверстия, стыки, угловые вырезы), где НДС является существенно объёмным, и использование упрощающих гипотез о недеформировании нормали является нецелесообразным.

Основные научные положения, выносимые на защиту:

1. Способ аппроксимации перемещений твердых тел в трехмерной декартовой и криволинейной системах координат на основе функций с конечными носителями произвольной степени аппроксимации иерархического типа.
2. Способ построения трехмерного криволинейного шестигранного конечного элемента на основе предложенной аппроксимации.
3. Алгоритм формирования матриц жесткости объемных конечных элементов на основе предложенного метода.
4. Методика определения напряженно-деформированного состояния тонких изотропных и ортотропных оболочек на основе трехмерных уравнений теории упругости без использования упрощающих гипотез о недеформировании нормали.

Достоверность полученных результатов, изложенных в диссертационной работе, обеспечивается удовлетворением

разработанных алгоритмов основным соотношениям механики деформируемого твердого тела, теории упругости, использованием проверенных численных методов и подтверждается сравнениями с результатами решения тестовых задач, полученных другими авторами. В представленных тестовых примерах выполнялись численные исследования сходимости вычислительных процессов при различных порядках аппроксимирующих функций и количествах дискретных элементов рассчитываемой конструкции.

Апробация результатов работы. Основные результаты диссертационной работы докладывались на:

- Всероссийской научной конференции «Обратные краевые задачи и их приложения» (КФУ, г. Казань) в 2014 г.;
- XI Всероссийском съезде по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механике (КФУ, г. Казань) в 2015 г.;
- Казанском национальном исследовательском технологическом университете на заседании кафедры «Теоретической механики и сопротивления материалов» (г. Казань) в 2017 г.;
- X Всероссийской конференции по механике деформируемого твердого тела в Самарском государственном техническом университете в 2017 г.;
- научном семинаре кафедры «Теоретической механики» в Казанском федеральном университете в 2018 г.;
- научном семинаре кафедры «Механики» в Казанском государственном архитектурно-строительном университете в 2018 г.

Публикации. Основные результаты исследований, выполненных по теме диссертационной работы, опубликованы в 8 научных статьях, в том числе 2 статьи из перечня, определенного Высшей аттестационной комиссией Министерства образования и науки Российской Федерации, в том числе 1 в журнале, включенный в международную реферативную базу данных Скопус (Scopus). Список опубликованных работ приводится в конце данного реферата.

Структура и объем диссертации. Диссертация содержит титульный лист, оглавление, введение, четыре главы основного текста, заключение, список литературы; изложена на 159 страниц машинного текста, содержит 59 рисунков, 23 таблицы, список литературы из 182 наименования литературных источников.

Содержание работы

Во введении обосновывается актуальность исследований по методикам расчета деформируемых трехмерных тел, в том числе тонкостенных конструкций (пластин и оболочек), находящихся в различных условиях нагружения при упругом состоянии материала. Отмечаются достоинства и недостатки существующих методов расчета. Кратко излагаются варианты реализации метода конечных элементов (МКЭ). Описываются подходы в расчетах тонкостенных конструкций на прочность МКЭ с упрощающими гипотезами о недеформировании нормали и без дополнительных гипотез. В заключительной части формулируется цель исследования, новизна, практическая ценность работы, приводится общая структура диссертации.

В первой главе приведен краткий обзор развития за последние десятилетия численного метода конечных элементов в исследованиях трехмерных конструкций. Описаны новые трехмерные конечные элементы, в том числе и элементы, используемые для расчета тонкостенных конструкций, выполненные российскими и зарубежными учеными.

Во второй главе предложен алгоритм построения аппроксимирующих функций с конечными носителями произвольной степени аппроксимации. Отличительная особенность метода заключается в том, что в пределах некоторой шестигранной подобласти с гладкими криволинейными гранями в аппроксимирующих функциях, путем соответствующего выбора этих функций и преобразования системы координат, разделяются параметры, определяющие искомые функции внутри подобласти и на ее границах. Это позволяет выполнять кинематические условия стыковки этих подобластей и удовлетворять геометрическим граничным условиям. На основе соотношений теории упругости и вариационного принципа Лагранжа с использованием предложенных функций разработан вариационный метод определения напряженно-деформированного состояния трехмерных изотропных упругих конструкций.

Построение аппроксимирующих функций для трехмерных шестигранных областей с криволинейными гранями.

Рассматривается подобласть V_k в виде шестигранника (рис.1) с криволинейными гладкими гранями $\Omega_i, i = \overline{1,6}$. Вводятся глобальная система координат $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$ и локальная система координат x, y, z , связанная с подобластью V_k , которая выбирается таким образом, чтобы уравнения граней $\Omega_i, i = \overline{1,6}$ можно было задать относительно соответствующих координатных плоскостей в следующем виде:

$$\begin{aligned} z &= F_1(x, y), z = F_2(x, y), y = F_3(z, x), y = F_4(z, x), \\ x &= F_5(y, z), x = F_6(y, z), \end{aligned} \quad (1)$$

где $F_i, i = \overline{1,6}$ - однозначные функции класса C^1 , которые могут быть заданы аналитически или построены численно.

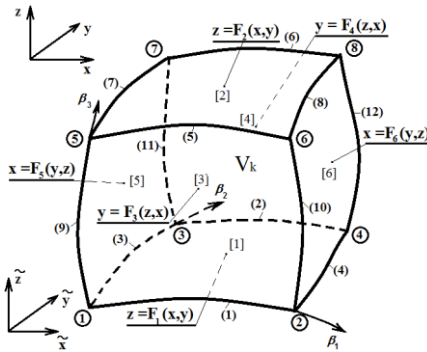


Рис.1

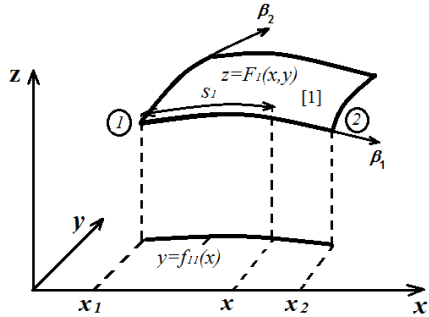


Рис.2

На рисунке показаны в круглых скобках (i) - номера граничных линий γ_i (сторон), в кружочках - номера угловых точек, в квадратных скобках $[j]$ - номера граней Ω_j подобласти V_k .

Для каждой из граничных линий $\gamma_i, i = \overline{1,12}$ вводятся дуговые координаты s_i . Например, для линии γ_1 координата s_1 показана на рис.2 и находится по формуле:

$$s_1 = \int_{x_1}^x \sqrt{1 + f_{11}'(\xi)^2 + \left(\frac{\partial F_1(\xi, y)}{\partial \xi} + \frac{\partial F_1}{\partial y} \cdot f_{11}' \right)^2} d\xi \equiv h_1(x). \quad (2)$$

Здесь $y = f_{11}(x)$ - уравнение проекции стороны γ_1 на плоскость xu , x_1 - координата угловой точки подобласти V_k . В обозначении функции $y = f_{11}(x)$ первый индекс показывает номер стороны, второй – номер грани, с которой определяется проекция.

Длина дуги граничной линии γ_1 определяется по формуле:

$$s_1^0 = h_1(x_2). \quad (3)$$

Для функций h_i задаются обратные функции, которые определяют соответствующие декартовы координаты для линии γ_i через дуговые координаты S_i :

$$\begin{aligned} x &= g_i(s_i), \quad \text{для } i = 1, 2, 5, 6; \\ y &= g_i(s_i), \quad \text{для } i = 3, 4, 7, 8; \\ z &= g_i(s_i), \quad \text{для } i = \overline{9, 12}. \end{aligned} \quad (4)$$

В подобласти V_k (рис. 1) вводится локальная криволинейная система координат $\beta_1, \beta_2, \beta_3$, которая связана с системой координат x, y, z следующим образом:

$$\begin{aligned} x &= F_5(y_5^*(\beta_2, \beta_3), z_5^*(\beta_2, \beta_3))(1 - \beta_1) + F_6(y_6^*(\beta_2, \beta_3), z_6^*(\beta_2, \beta_3))\beta_1 + \\ &\quad + d_1(\beta_1, \beta_2, \beta_3), \\ y &= F_3(z_3^*(\beta_1, \beta_3), x_3^*(\beta_1, \beta_3))(1 - \beta_2) + F_4(z_4^*(\beta_1, \beta_3), x_4^*(\beta_1, \beta_3))\beta_2 + \\ &\quad + d_2(\beta_1, \beta_2, \beta_3), \\ z &= F_1(x_1^*(\beta_1, \beta_2), y_1^*(\beta_1, \beta_2))(1 - \beta_3) + F_2(x_2^*(\beta_1, \beta_2), y_2^*(\beta_1, \beta_2))\beta_3 + \\ &\quad + d_3(\beta_1, \beta_2, \beta_3), \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} y_5^*(\beta_2, \beta_3) &= f_{95}(g_9(s_9^0 \beta_3))(1 - \beta_2) + f_{11,5}(g_{11}(s_{11}^0 \beta_3))\beta_2 + q_{25}(\beta_2, \beta_3), \\ z_5^*(\beta_2, \beta_3) &= f_{35}(g_3(s_3^0 \beta_2))(1 - \beta_3) + f_{75}(g_7(s_7^0 \beta_2))\beta_3 + q_{35}(\beta_2, \beta_3), \\ q_{25}(\beta_2, \beta_3) &= \left[g_3(s_3^0 \beta_2) - y_1 \cdot (1 - \beta_2) - y_3 \cdot \beta_2 \right] (1 - \beta_3) + \\ &\quad + \left[g_7(s_7^0 \beta_2) - y_5 \cdot (1 - \beta_2) - y_7 \cdot \beta_2 \right] \beta_3, \\ d_1(\beta_1, \beta_2, \beta_3) &= q_{11}(\beta_1, \beta_2)(1 - \beta_3) + q_{12}(\beta_1, \beta_2)\beta_3 \text{ и т.д.} \end{aligned} \quad (6)$$

В этих формулах использованы следующие обозначения:

$x_l, y_l, z_l, l = \overline{1,8}$ - координаты угловых точек подобласти V_k ;

$f_{ij}(x_m^o)$ - уравнения проекций граничных линий γ_i поверхностей Ω_j на соответствующие координатные плоскости, x_m^o - одна из осей x, y, z в зависимости от индекса m ;

$g_i(s_i^o \cdot \beta_\alpha)$ - функции (4), заданные через соответствующие безразмерные координаты β_α , s_i^o - длины дуг линий γ_i , которые определяются по формулам вида (3).

Система координат $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ в соответствии с соотношениями (5) - (6) выбрана таким образом, что в подобласти V_k выполняются условия $0 \leq \beta_1, \beta_2, \beta_3 \leq 1$, грани Ω_i задаются уравнениями $\beta_l = 0$ или $\beta_l = 1, l = \overline{1,3}$; граничные линии γ_i задаются одной из координат $\beta_l, l = \overline{1,3}$. Причем, на линиях γ_i координаты β_α переходят в безразмерные дуговые координаты. Например, для линии γ_1 получим $\beta_1 = \frac{s_1}{s_1^o}$.

Например, если в соотношения (5) - (6) подставить $\beta_3 = 0$, то получаются уравнения, определяющие грань Ω_1 :

$$\begin{aligned} x &= x_1^*(\beta_1, \beta_2), \quad y = y_1^*(\beta_1, \beta_2), \\ z &= F_1(x_1^*(\beta_1, \beta_2), y_1^*(\beta_1, \beta_2)), \quad (0 \leq \beta_1, \beta_2 \leq 1). \end{aligned} \quad (7)$$

Если в соотношениях (7) задать $\beta_1 = 1$, то получается уравнение линии λ_4 :

$$\begin{aligned} x &= f_{41}(g_4(s_4^o \beta_2)), \quad y = g_4(s_4^o \beta_2), \\ z &= F_1(x, y), \quad (0 \leq \beta_2 \leq 1). \end{aligned} \quad (8)$$

Если в формулах (8) подставить $\beta_2 = 0$, то получим координаты узловой точки с номером 2:

$$\begin{aligned} x &= f_{41}(g_4(0)) = f_{41}(y_2) = x_2, \quad y = g_4(0) = y_2, \\ z &= F_1(x, y) = F_1(x_2, y_2) = z_2. \end{aligned} \quad (9)$$

В пределах подобласти V_k перемещения, заданные в системе координат x, y, z , ищем в виде:

$$u_i = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \sum_{l=1}^L D_{inml}^k t_l(\beta_1) t_m(\beta_2) t_n(\beta_3), \quad i = \overline{1,3}, \quad (10)$$

в которых используются следующие функции формы:

$$t_1(\beta_1) = 1 - \beta_1, \quad t_2(\beta_1) = \beta_1, \quad t_l(\beta_1) = t_1(\beta_1) [t_2(\beta_1)]^{l-2}, \quad (l = \overline{3, L}). \quad (11)$$

Если определить перемещения точек подобласти на гранях Ω_j , то с учетом функций формы (11) трехмерные полиномы (10) переходят в двумерные. Например, на грани Ω_1

$$u_i(\Omega_1) = \sum_{m=1}^M \sum_{l=1}^L D_{i1ml}^k t_l(\beta_1) t_m(\beta_2), \quad i = \overline{1,3}. \quad (12)$$

Перемещения точек подобласти на граничных линиях γ_i представляются в виде одномерных полиномов. Например, для граничной линии γ_2 , подставляя в выше полученную формулу значение $\beta_2 = 1$, получим

$$u_i(\gamma_2) = \sum_{l=1}^L D_{i12l}^k t_l(\beta_1), \quad i = \overline{1,3}. \quad (13)$$

Вариационный метод расчета трехмерных конструкций сложной формы в декартовой системе координат.

Предположим, что упругое тело, занимающее область V , может быть разбито на подобласти вида V_k (рис 1). В пределах подобласти перемещения, заданные в глобальной системе координат $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$, ищем в виде:

$$\tilde{u}_i = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \sum_{l=1}^L D_{inml}^k t_l(\beta_1) t_m(\beta_2) t_n(\beta_3), \quad i = \overline{1,3}. \quad (14)$$

Тройную сумму (14) представим в виде одномерной суммы:

$$\tilde{u}_i = \sum_{j=1}^J D_{ij}^k t_j^k, \quad i = \overline{1,3}, \quad (15)$$

которая в матричном виде запишется так:

$$\{\tilde{u}^k\} = [D^k] \{t^k\}, \quad (16)$$

где $\{\tilde{u}^k\}^T = \{\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3\}$; $\{t^k\}^T = \{t_1^k, t_2^k, \dots, t_j^k\}$ - функции формы (11), заданные в системе координат $\beta_1, \beta_2, \beta_3$; $J = N \cdot M \cdot L$; $j = (n-1) \cdot M \cdot L + L \cdot (m-1) + l$; $[D^k]$ - матрица неизвестных постоянных размерностью $3 \times J$:

$$[D^k] = \begin{bmatrix} D_{11}^k, \dots, D_{1J}^k \\ D_{21}^k, \dots, D_{2J}^k \\ D_{31}^k, \dots, D_{3J}^k \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Перемещения в локальной декартовой системе координат x, y, z находим через перемещения в глобальной декартовой системе координат $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$:

$$\{u^k\} = [C^k] \cdot \{\tilde{u}^k\}, \quad (18)$$

где $[C^k]$ - матрица направляющих косинусов локальной системы координат в глобальной системе координат.

Потенциальная энергия деформации всей конструкции определяется как сумма потенциальных энергий деформации подобластей V_k :

$$\Pi = \sum_{k=1}^K \Pi_k.$$

Здесь Π_k - потенциальная энергия подобласти V_k , которая определяется по известным формулам теории упругости и имеет вид:

$$\Pi_k = \frac{1}{2} \int_V \{u^k\}^T [A]^T [E][A] \{u^k\} dV, \quad (19)$$

где $[E]$ - матрица упругости, $[A]$ - дифференциальная матрица:

$$[E] = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu, & \lambda, & \lambda, & 0, & 0, & 0 \\ \lambda, & \lambda + 2\mu, & \lambda, & 0, & 0, & 0 \\ \lambda, & \lambda, & \lambda + 2\mu, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & \mu, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & \mu, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & \mu \end{bmatrix}, [A] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x}, & 0, & 0 \\ 0, & \frac{\partial}{\partial y}, & 0 \\ 0, & 0, & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y}, & \frac{\partial}{\partial x}, & 0 \\ 0, & \frac{\partial}{\partial z}, & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z}, & 0, & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (20)$$

Подставляя (16) в равенство (18), а затем в соотношения для потенциальной энергии деформации (19), получим

$$P_k = \frac{1}{2} \int_{V_k} \{t^k\}^T [D^k]^T [C^k]^T [A]^T [E] [A] [C^k] [D^k] \{t^k\} dV. \quad (21)$$

Для определения напряженно-деформированного состояния трехмерных конструкций используется вариационный принцип Лагранжа, на основании которого должно выполняться условие

$$\delta \mathcal{E} = \sum_{k=1}^K \delta \mathcal{E}_k = \sum_{k=1}^K \int (\delta P_k - \delta A_k) dV = 0. \quad (22)$$

Здесь $\mathcal{E}$ – полная энергия конструкции, $\mathcal{E}_k$ – полная энергия подобласти V_k ; P_k , δA_k – соответственно удельная потенциальная энергия деформации и вариация работы внешних сил на единице объема подобласти V_k .

Выполнение условий (22) приводит к линейной системе уравнений

$$[K] D = P, \quad (23)$$

где $[K]$ – матрица жесткости конструкции, P – вектор правой части, учитывающий работу внешних сил, D – вектор неизвестных постоянных, который строится на основании элементов матриц D_{ij}^k и имеет вид:

$$D = \{D_1, D_2 \cdots D_{3*N}\}^T, \quad (24)$$

где N – количество узлов всей конструкции.

Элемент матрицы жесткости K_{nl} для подобласти V_k определяется по формуле:

$$K_{nl} = \int_{V_k} \left(\{R\} [A]^T [E] [A] \{c_{*i} t_j\} \right) dV; \quad (25)$$

где $n = (i-1) \cdot J + j$, $l = (m-1) \cdot J + r$; $i = \overline{1,3}$; $j = \overline{1,J}$; $m = \overline{1,3}$; $r = \overline{1,J}$; $\{R\} = \{t_r \cdot c_{1m}, t_r \cdot c_{2m}, t_r \cdot c_{3m}\}$.

В третьей главе представлен алгоритм построения аппроксимирующих функций для трехмерных областей, заданных в криволинейной системе координат. На основе введенных аппроксимирующих функций и соотношений теории упругости в криволинейной системе координат разработан вариационный метод определения напряженно-деформированного состояния трехмерных конструкций сложной формы. Описаны методики вычислений длин дуг, производных, интегралов, необходимых для проведения расчетов. Приведены формулы определения направляющих косинусов локальной системы координат, компонент метрического тензора и тензора кривизны в криволинейной системе координат. В этой же главе представленный метод используется для расчетов конструкций из ортотропного материала.

Построение аппроксимирующих функций для трехмерных областей в криволинейной системе координат.

Вводится локальная криволинейная система координат $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ таким образом (рис.3), чтобы уравнения граней $\Omega_i, i = \overline{1,6}$ можно было задать относительно соответствующих координатных поверхностей в следующем виде:

$$\begin{aligned} \alpha_3 &= F_1(\alpha_1, \alpha_2), \quad \alpha_3 = F_2(\alpha_1, \alpha_2), \\ \alpha_2 &= F_3(\alpha_3, \alpha_1), \quad \alpha_2 = F_4(\alpha_3, \alpha_1), \\ \alpha_1 &= F_5(\alpha_2, \alpha_3), \quad \alpha_1 = F_6(\alpha_2, \alpha_3), \end{aligned} \quad (26)$$

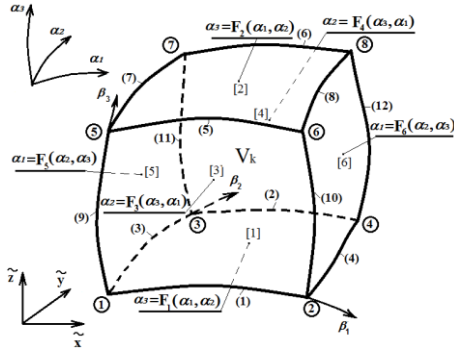


Рис.3

В криволинейной системе координат дуговая координата s_1 определяются по формуле:

$$s_1 = \int_{\alpha_{11}}^{\alpha_1} \sqrt{A_1^2 + A_2^2 \cdot f_{11}'(\xi)^2 + A_3^2 \cdot \left(\frac{\partial F_1(\xi, \alpha_2)}{\partial \xi} + \frac{\partial F_1}{\partial \alpha_2} \cdot f_{11}' \right)^2} d\xi, \quad (27)$$

где A_i - коэффициенты Ляме, $\alpha_2 = f_{11}(\alpha_1)$ уравнение проекции стороны γ_1 на плоскость $(\alpha_1 \alpha_2)$, α_{11} - координата угловой точки подобласти V_k .

Остальные дуговые координаты s_i определяются аналогично.

Вводятся обратные функции, которые определяют соответствующие криволинейные координаты для линии γ_i через дуговые координаты s_i :

$$\alpha_j = g_i(s_i), \quad (i = \overline{1,12}), \quad (j = \overline{1,3}). \quad (28)$$

В подобласти V_k (рис.3) вводится локальная криволинейная система координат $\beta_1, \beta_2, \beta_3$, которая связана с системой координат $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= F_5(\alpha_{25}^*(\beta_2, \beta_3), \alpha_{35}^*(\beta_2, \beta_3))(1 - \beta_1) + \\ &\quad + F_6(\alpha_{26}^*(\beta_2, \beta_3), \alpha_{36}^*(\beta_2, \beta_3))\beta_1 + \alpha_{10}(\beta_1, \beta_2, \beta_3), \\ \alpha_2 &= F_3(\alpha_{33}^*(\beta_1, \beta_3), \alpha_{13}^*(\beta_1, \beta_3))(1 - \beta_2) + \\ &\quad + F_4(\alpha_{34}^*(\beta_1, \beta_3), \alpha_{14}^*(\beta_1, \beta_3))\beta_2 + \alpha_{20}(\beta_1, \beta_2, \beta_3), \end{aligned} \quad (29)$$

$$\alpha_3 = F_1(\alpha_{11}^*(\beta_1, \beta_2), \alpha_{21}^*(\beta_1, \beta_2))(1 - \beta_3) + \\ + F_2(\alpha_{12}^*(\beta_1, \beta_2), \alpha_{22}^*(\beta_1, \beta_2))\beta_3 + \alpha_{30}(\beta_1, \beta_2, \beta_3),$$

где

$$\alpha_{25}^*(\beta_2, \beta_3) = f_{95}(g_9(s_9^0\beta_3))(1 - \beta_2) + f_{11,5}(g_{11}(s_{11}^0\beta_3))\beta_2 + q_{25}(\beta_2, \beta_3),$$

$$q_{25}(\beta_2, \beta_3) = \left[g_3(s_3^0\beta_2) - \alpha_{21}(1 - \beta_2) - \alpha_{23}\beta_2 \right] (1 - \beta_3) + \\ + \left[g_7(s_7^0\beta_2) - \alpha_{25}(1 - \beta_2) - \alpha_{27}\beta_2 \right] \beta_3,$$

$$\alpha_{10}(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = q_{11}(\beta_1, \beta_2)(1 - \beta_3) + q_{12}(\beta_1, \beta_2)\beta_3 \text{ и т.д.} \quad (30)$$

Здесь $\alpha_{1l}, \alpha_{2l}, \alpha_{3l}, l = \overline{1,8}$ - координаты угловых точек подобласти V_k ; $\alpha_n = f_{ij}(\alpha_m)$ - уравнения проекций граничных линий γ_i поверхностей Ω_j на соответствующие координатные плоскости; $g_i(s_i^0 \cdot \beta_\alpha)$ - функции, которые определяют соответствующие криволинейные координаты через координаты β_α ; s_i^0 - длины дуг линий γ_i .

Вариационный метод определения напряженно-деформированного состояния трехмерных упругих конструкций в криволинейной системе координат.

Предположим, что упругое тело, занимающее область V , может быть разбито на подобласти вида V_k (рис 3). В пределах подобласти перемещения, заданные в глобальной системе координат $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$, аппроксимируются функциями:

$$\tilde{u}_i = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \sum_{l=1}^L D_{inml}^k t_l(\beta_1) t_m(\beta_2) t_n(\beta_3), \quad i = \overline{1,3}, \quad (31)$$

которые в матричном виде записываются так:

$$\{\tilde{u}^k\} = [D^k] \{t^k\}. \quad (32)$$

Перемещения в локальной криволинейной системе координат $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ записываем через перемещения в глобальной декартовой системе координат $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$:

$$\{u^k\} = [C^k] \cdot \{\tilde{u}^k\}, \quad (33)$$

где $[C^k]$ - матрица направляющих косинусов, элементы которой определяются соотношениями:

$$c_{ij} = \frac{1}{A_i} \cdot \frac{\partial \tilde{x}_j}{\partial a_i}. \quad (34)$$

Соотношения (19) - (25) справедливы и для криволинейной системы координат, однако вычисление производных и интегралов происходит с учетом криволинейной системы координат. Кроме того, дифференциальная матрица отличается и имеет вид:

$$[A] = \begin{bmatrix} \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} & , & k_{12} & , & k_{13} \\ k_{21} & , & \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} & , & k_{23} \\ k_{31} & , & k_{32} & , & \frac{1}{A_3} \frac{\partial}{\partial \alpha_3} \\ \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} - k_{12} & , & \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} - k_{21} & , & 0 \\ 0 & , & \frac{1}{A_3} \frac{\partial}{\partial \alpha_3} - k_{23} & , & \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} - k_{32} \\ \frac{1}{A_3} \frac{\partial}{\partial \alpha_3} - k_{13} & , & 0 & , & \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} - k_{31} \end{bmatrix} \quad (35)$$

где k_{ij} - кривизна кривой α_i в плоскости $\alpha_i \alpha_j$ (главные кривизны),

$$A_i = \sqrt{\sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial x_j}{\partial \alpha_i} \right)^2}, \quad k_{ij} = \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}. \quad (36)$$

Элемент матрицы жесткости K_{nl} для подобласти V_k определяется по формуле (25).

В четвертой главе приводятся примеры решения задач определения напряженно-деформированного состояния трехмерных конструкций из изотропных и ортотропных материалов в декартовой и криволинейной системах координат. Рассмотрены задачи расчета тонкостенных элементов конструкций (стержней, пластин и оболочек). Приведены результаты, показывающие сходимость представленного метода, распределение напряжений вблизи зон концентраций

напряжений. Проводится сравнительный анализ с результатами, полученными другими авторами.

Пример 1

Рассматривается защемленный (в сечении АВ) криволинейный брус (рис.4.1.8), к которому в точке С(3,536 м; 3,536 м; 0) прикладывалась сосредоточенная сила $F=80 \text{ kH}$. Поперечное сечение бруса имеет форму трапеции. Верхнее основание трапеции 0,1 м, нижнее 0,3 м. Уравнение оси бруса: $z=0$, $x^2 + y^2 = 25$.

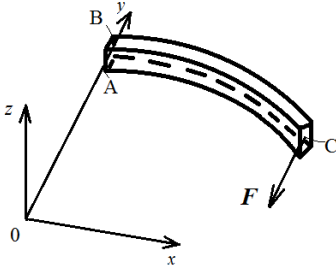


Рис.4

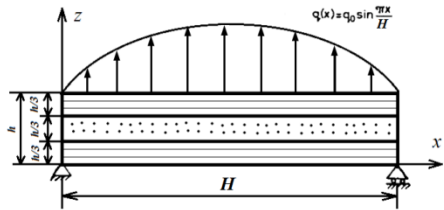


Рис.5

В таблице 1 приведены максимальные сжимающие, в точке $A(0; 4,8; -0,15)$, и максимальные растягивающие, в точке $B(0; 5,2; 0,05)$, напряжения. Использовалась одна подобласть.

Таблица 1

$L = M = N$		4	5	6	7	8	Точное
$\nu = 0$	$\sigma_{xx}^A, \text{ МПа}$	-27,1	-50,3	-50	-49,7	-49,8	-50,9
	$\sigma_{xx}^B, \text{ МПа}$	66,3	67,9	65,9	66,1	66,4	67,5
$\nu = 0,3$	$\sigma_{xx}^A, \text{ МПа}$	-36,4	-59,8	-57,6	-56,3	-55,7	
	$\sigma_{xx}^B, \text{ МПа}$	79,9	79,8	75,9	75,6	76,3	

В последнем столбце приводится решение, полученное методами сопротивления материалов для криволинейного бруса. Как видно из результатов, хорошая точность расчета достигается даже при $L = M = N = 5$. При коэффициенте Пуассона $\nu = 0,3$ напряжения получились несколько большим, чем при $\nu = 0$, что вполне логично.

Пример 2

Рассчитана задача об изгибе трехслойной балки из углепластика под действием синусоидальной нагрузки (рис. 5).

Балка состоит из углепластиковых однонаправленно армированных монослоев со следующими характеристиками (ось 1 совпадает с направлением армирования):

$$E_{11} = 1,724 \cdot 10^5 \text{ МПа}; \quad E_{22} = 6895 \text{ МПа}; \quad G_{12} = G_{31} = 3448 \text{ МПа};$$

$$G_{23} = 1379 \text{ МПа}; \quad \nu_{12} = 0,25. \text{ Направление армирования 1-го и 3-го}$$

слоев совпадают с осью балки x , а направление армирования 2-го слоя перпендикулярно оси балки. Для первого и третьего слоев:

$$E_{xx} = E_{11}; \quad E_{yy} = E_{22}; \quad G_{xy} = G_{xz} = G_{12}; \quad G_{yz} = G_{23}; \quad \text{для второго}$$

слоя: $E_{xx} = E_{22}; \quad E_{yy} = E_{11}; \quad G_{xz} = G_{23}$. Геометрия и нагрузка на балку следующие: $H = 24 \text{ м}; \quad b = 1 \text{ м}; \quad h = 2,4 \text{ м}; \quad q_0 = 0,6895 \text{ МПа}$.

При расчете балка разбивалась на четыре конечных элемента, по одному на верхний и нижний, и два на средний слой. Порядок аппроксимации задавался константами $L = M = N = 7$. Для сравнения результатов (таблица 2, рис.8) были рассмотрены следующие

$$\text{безразмерные величины: } \bar{\sigma}_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{q_0}; \quad \bar{\sigma}_{xz} = \frac{\sigma_{xz}}{q_0}; \quad \bar{w} = \frac{100 \cdot E_{22} \cdot h^3}{q_0 \cdot H^4} w.$$

Таблица 2

Прогиб в центре	Аналитическое решение Рикардс Р.Б.			МКЭ Рикардс Р.Б.	Программа
	Теория упругости	Классическая теория	Теория Тимошенко		
Погрешность %					
$\bar{w}$	0,93164	0,50966	0,7631	0,9886	0,9441
ε	-	45,29	18,09	-6,11	1,33

На рис.8 приводятся безразмерное напряжение $\bar{\sigma}_{xx}$ в сечении $x = H/2$, сплошной линией приведены данные согласно представленной методики, остальные графики соответствуют данным из работы Рикардс Р.Б., где кривая (1) - решение теории упругости, кривая (2) - решение МКЭ и кривая (3) - решение по классической теории слоистых балок.

Как видно из результатов, решение, полученное по представленной методике, очень близко к решению теории упругости.

Пример 3

Произведен расчет составной конструкции, которая представляет собой статически неопределимую раму, показанную на рис.6. В точке с координатами (68 см, 5 см, 65 см) приложена сосредоточенная сила $F=1кН$, $E = 2 \cdot 10^5 МПа$.

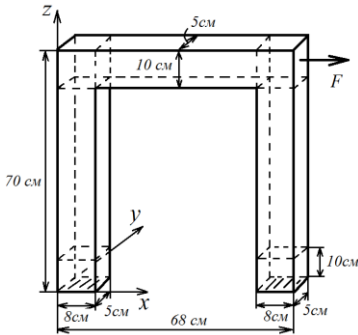


Рис.6

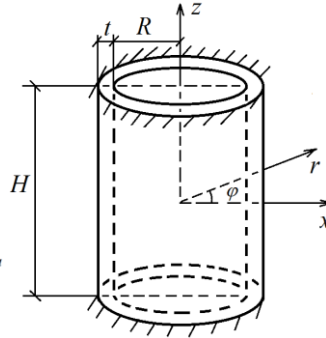


Рис.7

Конструкция разбивалась на семь конечных элементов (пунктирные линии на рисунке). Общее число узлов с учетом исключения внутренних узлов составило 1688.

Рассматривались два варианта с разными коэффициентами Пуассона: 1) $\nu = 0$ и 2) $\nu = 0,3$. Первый вариант решения сравнивался с решением, полученным в соответствии с теорией сопротивления материалов.

В таблице 3 приводятся максимальные напряжения σ_{zz} , полученные по представленной методике для порядка аппроксимации $L = M = N = 8$, и максимальные напряжения σ_{zz}^T , полученные в соответствии с формулами сопротивления материалов, для точек на линии $z=0$ см, $y=2,5$ см.

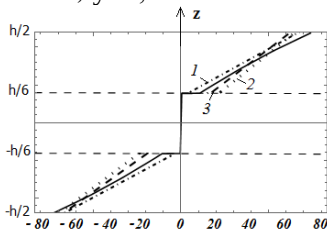


Рис.8

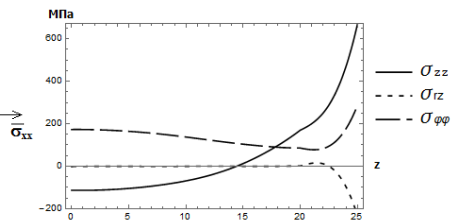


Рис.9

Таблица 3

$MПа$	$\nu = 0$		$\nu = 0,3$	
	$x=0$ см	$x=68$ см	$x=0$ см	$x=68$ см
σ_{xx}	3,56	-3,58	4,72	-4,75
σ_{zz}	3,46	-3,46		

Как видно из таблицы, при первом варианте расчета процент расхождения от решения, полученного методами сопротивления материалов, составляет 3,46%. При использовании трехмерных уравнений теории упругости напряжения примерно на 30% больше, чем для первого варианта.

На основании полученных результатов можно сделать вывод: представленная методика может быть использована для расчетов сложных составных конструкций.

Пример 4

Определялось напряженно-деформированное состояние цилиндрической оболочки (рис. 7) длиной $H = 50$ см, которая закреплена по торцам и нагружена внутренним давлением интенсивности $q = 24$ МПа. Внутренний радиус цилиндра $R=50$ см; модуль упругости $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; толщина стенки цилиндра $t=5$ см; коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$. Из-за наличия плоскостей симметрии рассматривалась одна восьмая оболочки, которая ограничивалась криволинейными (цилиндрическими) координатами:

$50 \text{ см} \leq r \leq 55 \text{ см}; 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}; 0 \leq z \leq 25 \text{ см}$. При расчете использовалась

одна подобласть (один конечный элемент). Результаты расчетов (МПа) приведены в таблице 4, где даются значения осевых и окружных напряжений в точках с координатами r и z . В последних двух столбцах приводятся результаты из работы Гуревой Н.А., в которой данная конструкция была разбита на 300 элементов.

Как видно из таблицы 4, наблюдается удовлетворительная сходимость вычислительного процесса. Результаты расчета вполне соответствуют результатам работы Гуревой Н.А. даже для одного конечного элемента.

Таблица 4

Координаты точки, см		Напряжения при различной аппроксимации $L = 4, M = N$, МПа						Напряжения МПа, Гуреева Н.А.	
		4		6		8			
г	z	σ_{zz}	$\sigma_{\varphi\varphi}$	σ_{zz}	$\sigma_{\varphi\varphi}$	σ_{zz}	$\sigma_{\varphi\varphi}$	σ_{zz}	$\sigma_{\varphi\varphi}$
50	25	449,53	192,66	546,8	234,3	584,2	250,4	591,88	253,66
55	25	-341,90	-146,53	-438,4	-187,9	-460,1	-197,2	-449,46	-192,63

Эта же задача была рассчитана двумя конечными элементами, которые стыкуются в плоскости $\alpha_3 = z = 24 \text{ см}$. На рис. 9 приводятся осевые напряжения σ_{zz} (сплошная линия), окружные $\sigma_{\varphi\varphi}$ (длинный пунктир) и касательные σ_{rz} (короткий пунктир) при $\varphi = 0$, вдоль центральной оси цилиндра z , на внутренней стороне $r = 50 \text{ см}$.

Как видно из результатов расчета, введение дополнительного конечного элемента вблизи зоны концентрации напряжений позволило более точно отследить напряжения вблизи зоны концентрации напряжений.

Основные результаты выполненных исследований и выводы по диссертации состоят в следующем.

1. Построены трехмерные аппроксимирующие функции с конечными носителями произвольного порядка в декартовой и криволинейной системах координат.

2. На основе уравнений теории упругости с использованием вариационного принципа Лагранжа и предложенных аппроксимирующих функций разработан метод определения напряженно-деформированного состояния трехмерных изотропных и ортотропных конструкций.

3. Описан алгоритм формирования матрицы жесткости для трехмерных конструкций сложной формы.

4. На основе представленного метода разработан пакет прикладных программ по расчету трехмерных конструкций.

5. Показана возможность использования предложенного метода для расчета тонких пластин и оболочек без использования упрощающих гипотез о недеформировании нормали.

6. Анализ результатов численных исследований показывает:

- метод можно использовать для определения напряженно-деформированного состояния составных трехмерных конструкций, тонкостенных изотропных и многослойных ортотропных пластин и оболочек, стержневых систем;
- для достижения необходимой точности решения задач требуется малое количество элементов;
- использование предложенного метода позволяет получать трехмерную картину распределения напряжений и деформаций в тонких оболочках и стержнях, выявлять зоны концентрации напряжений;
- при решении задач размеры подобластей, на которые разбивается трехмерная конструкция, могут существенно различаться, что позволяет производить расчеты многослойных конструкций с тонкими клеевыми слоями.

Основные результаты диссертационной работы отражены в восьми публикациях.

Статьи в ведущих рецензируемых научных журналах и изданиях, определенных в ВАК РФ.

1. Хайруллин Ф.С., Сахбиев О.М. О методе расчета трехмерных конструкций сложной формы // Вестник Казанского технологического университета. – 2014. т. 17. № 23. – С. 328-330. (№ по перечню ВАК 254).

2. Хайруллин Ф.С., Сахбиев О.М. Численный метод построения сглаживающих аппроксимирующих функций // Вестник Казанского технологического университета. – 2011. № 8. – С. 239-244. (№ по перечню ВАК 254).

Статьи в ведущих рецензируемых научных журналах и изданиях, включенных в международную реферативную базу данных Скопус (Scopus).

3. Хайруллин Ф.С., Сахбиев О.М. Расчет ортотропных конструкций вариационным методом на основе трехмерных функций с конечными носителями // Вестник Пермского национального

исследовательского политехнического университета. Механика. – 2017. № 2 – С. 195-207.

Публикации в других изданиях

4. Хайруллин Ф.С., Сахбиев О.М. Метод определения напряженно-деформированного состояния трехмерных конструкций сложной формы // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2016. № 1. – С. 36-42.

5. Хайруллин Ф.С., Сахбиев О.М. Моделирование деформаций трехмерных конструкций с плоскими граничными поверхностями // Вестник технологического университета. – 2016. Т. 19. № 20. – С. 161-163. (с 1 декабря 2015 г. № по перечню ВАК 382)

6. Хайруллин Ф.С., Сахбиев О.М. Особенности реализации вариационного метода расчета трехмерных конструкций сложной формы // В сборнике: XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики сборник докладов. – Казань, 2015. – С. 3966-3968.

7. Сахбиев О.М., Хайруллин Ф.С. Моделирование деформаций тонких оболочек на основе трехмерных функций с конечными носителями // Научному прогрессу – творчество молодых: Материалы XII международной молодежной научной конференции по естественнонаучным и техническим дисциплинам. Часть. 1. – Йошкар-Ола. ПГТУ, 2017 – С. 127-129.

8. Сахбиев О.М., Хайруллин Ф.С. Метод и результаты расчетов трехмерных конструкций // Материалы X Всероссийской конференции по механике деформируемого твердого тела. Т.2. – Самара. СамГТУ, 2017. – С. 184-186.