

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Ду Икунь

**НЕЛИНЕЙНЫЕ МОДЕЛИ РЕЗИНОКОРДНЫХ СЛОЕВ И
ПНЕВМАТИЧЕСКОЙ ШИНЫ**

Специальность 01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2022

Работа выполнена на кафедре теории пластичности механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель:

Шешенин Сергей Владимирович,
доктор физико-математических наук,
профессор

Официальные оппоненты:

Чехонин Константин Александрович,
доктор физико-математических наук,
доцент, Хабаровское отделение
Института прикладной математики
ДВО РАН, директор

Левин Владимир Анатольевич,
заслуженный деятель науки РФ,
доктор физико-математических наук,
профессор, кафедра вычислительной
механики механико-математического
факультета МГУ имени М.В.
Ломоносова, профессор

Семенов Владимир Константинович,
кандидат технических наук,
ООО "Группа
ПОЛИПЛАСТИК", заместитель
директора НИИ – начальник
управления прочности и надежности
трубопроводных систем

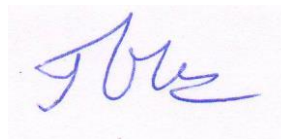
Защита состоится 10 июня 2022 года в 15 часов 00 минут на заседании диссертационного совета МГУ.01.14 Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова по адресу: 119192, Москва, Мичуринский проспект, д. 1, к. 240.

E-mail: chist206@yandex.ru

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М.В. Ломоносова (Ломоносовский проспект, д. 27) и на сайте ИАС «ИСТИНА»: <https://istina.msu.ru/dissertations/453992356/>

Автореферат разослан « » апреля 2022 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета МГУ.01.14,
кандидат физико-математических наук



П.В. Чистяков

Общая характеристика работы

Цель работы

Разработка моделей резинокордных слоев с учетом физической и геометрической нелинейностей. Применение их для численного моделирования напряженно-деформированного состояния (НДС) пневматических шин при сильном деформировании (сильном искажении формы).

Актуальность темы

Шины широко используются в автомобильной промышленности. Шина – сложная неоднородная конструкция. Стандартная радиальная шина легкового автомобиля содержит значительное количество различных сортов резиновой смеси и по крайней мере два типа резинокордных слоев. Материал является сильно неоднородным. Конструкция шины описывается большим количеством параметров, поэтому полная математическая оптимизация конструкции затруднительна и создание шин все еще базируется на опыте инженеров-конструкторов. Однако в мировой практике широко применяется создание виртуальных прототипов шин на основе применения современных численных методов и возросших мощностей компьютеров.

С развитием компьютерных технологий появляется все больше исследований по методу конечных элементов (МКЭ), применяемому для моделирования шин. Однако результаты, полученные с помощью МКЭ, во многом зависят от точности механической модели. Резинокордные слои невозможно точно смоделировать, выделяя отдельные нити корда. Последнее требует несоразмерно больших компьютерных затрат. Максимальная деформация материала резинокорда может достигать 15%. Актуальным является создание геометрически нелинейной эквивалентной гиперупругой конститутивной модели резинокордного материала.

При наезде шины на препятствие в ней возникают сильное искажение формы и большие деформации как в областях резины, так и отмеченные деформации до 15% в резинокордных слоях. Поэтому разработка нелинейной модели шины, учитывающей сильное искажение формы, является весьма актуальной. Создание собственного программного кода является актуальным и целесообразным, поскольку способствует повышению уровня научного моделирования и программирования в нашей стране. Представляется

актуальной верификация программы путем сравнения с зарубежными конечно-элементными программами.

В настоящее время наблюдается стремление адекватно моделировать НДС в шинах, в том числе при умеренно больших деформациях. Следовательно, развитие более точных механических моделей шин и более точное вычисление напряженно-деформированного состояния являются актуальными задачами.

Научная новизна работы

В диссертационной работе сформулирована и математически обоснована модификация определения представительной области (RVE) для случая резинокордного слоя, находящегося в окружении однородного материала. Такая модификация необходима для более точного вычисления упругих свойств слоя в поперечном направлении.

На основе определения RVE дано определение эффективных упругих свойств гиперупругого материала неоднородного слоя с учетом геометрической нелинейности.

Сделана конкретизация для слоев каркаса и брекера в виде моделей гиперупругих материалов.

Предложена схема вычислительных экспериментов для определения материальных параметров потенциалов. Определены потенциалы слоев каркаса и брекера.

Экспериментально изучено влияние эффекта Маллинза для брекерной резины.

На основе испытаний образцов резины и резинокорда определено влияние скорости деформирования при квазистатическом нагружении.

С помощью тестовых расчетов, в том числе расчета натяжения корда в опыте на разрыв, показана достоверность работы компьютерной программы, созданной научным руководителем.

Теоретическая и практическая значимость

Полученные результаты имеют теоретическое и прикладное значение. В работе дано модифицированное определение представительной области для слоя и показано его практическое преимущество для вычисления поперечных упругих свойств резинокордного слоя.

Предложенная схема вычислительных экспериментов имеет практическое значение для нахождения параметров потенциалов, описывающих гиперупругие свойства резинокордных слоев.

Эксперименты по определению влияния скорости квазистатического нагружения демонстрируют практическую важность учета скорости нагружения, а также влияния эффекта Маллинза на вычисление гиперупругих свойств резиновой смеси или резинокордного материала.

Проведенные тестовые и верификационные расчеты нагружения шины имеют практическую направленность.

Методология и методы исследования

Для формулировки механической модели использовался феноменологический подход, т.е. для описания свойств резиновой смеси использовалась гиперупругая модель с потенциалом Муни-Ривлина, а для описания анизотропного осредненного резинокордного материала – предложенные потенциалы, построенные на основе инвариантов меры деформации Коши-Грина относительно групп преобразований систем координат трансверсальной изотропии и ортотропии.

Методика нахождения параметров предложенных потенциалов основана на предложенной схеме вычислительных экспериментов. Решения соответствующих локальных задач в области модифицированной ячейки периодичности получаются методом конечных элементов.

Для использования потенциалов, описывающих резинокордные слои каркаса и брекера в виде определяющих соотношений и их линеаризации, проведено их дифференцирование дважды в символьном виде с использованием программы Octave.

Для моделирования задач сильного деформирования использована программа научного руководителя с применением полученного линеаризованного определяющего соотношения для анизотропных осредненных резинокордных слоев. Для обеспечения достоверности результатов проведено тестирование полученного таким образом варианта вычислительной программы.

Код, разработанный научным руководителем аспиранта, был создан при совместной работе руководителя с компанией Мишлен (Франция) и

предназначен для решения геометрически нелинейных задач механики деформируемого твердого тела.

Для вычисления натяжения корда в резинокордных слоях фактически использовалась идея метода двух масштабов. Решение глобальной задачи для всей шины находится с применением осредненных резинокордных слоев, а напряжение в корде в рамках каждого элемента вычисляется приближенно в предположении одинаковости деформации в направлении корда (в предположении, используемом для вычисления модулей Фойгта).

Основные положения, выносимые на защиту

1. Показано, что модифицированное определение эффективных свойств, состоящее в расширении представительной области путем добавления окружающего однородного материала, приводит к большей точности вычисления этих свойств.
2. Выявлено, что предложенная схема вычислительных экспериментов обеспечивает определение всех параметров анизотропных потенциалов.
3. Экспериментально показано, что даже при квазистатическом нагружении резиновой смеси или резинокордного слоя брекера с постоянной скоростью в начале процесса деформирования проявляются вязкоупругие свойства.
4. На основе экспериментального исследования эффекта Маллинза обнаружено, что при первом деформировании для учета реономного поведения материала можно использовать обобщенную модель Максвелла.
5. Показано, что для материала резинокорда с металлическим кордом метод утончения слоя обеспечивает приемлемое совпадение изгибных жесткостей.

Достоверность и обоснованность результатов

Достоверность диссертационной работы обоснована использованием строгих математических методов, классических методов механики деформируемого твердого тела, апробированной экспериментальной техники и проверенных численных методов и компьютерных программ. Достоверность подтверждается также совпадением некоторых результатов расчетов с результатами тестов и результатами других авторов.

Основные результаты диссертационной работы докладывались на Всероссийских и Международных конференциях, на научно-исследовательских семинарах, подвергались рецензированию при публикации в журналах.

Апробация работы

Основные результаты, полученные в диссертации, докладывались и обсуждались на следующих семинарах и конференциях:

- научно-исследовательский семинар кафедры теории пластичности механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова под руководством д.ф.-м.н., проф., члена-корр. РАН Е.В. Ломакина (2022 г.);
- научно-исследовательский семинар кафедры механики композитов механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова под руководством д.ф.-м.н., проф. В.И. Горбачева (2022 г.);
- научно-исследовательский семинар имени А.А. Ильюшина кафедры теории упругости механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова под руководством д.ф.-м.н., проф. Д.В. Георгиевского (2022 г.);
- межфакультетский научно-исследовательский семинар по вычислительной механике под руководством д.ф.-м.н., проф. С.В. Шешенина, к.ф.-м.н., доц. Ф.Б. Киселева и к.ф.-м.н., с.н.с. Н.Б. Артамоновой (2021–2022 г.);
- Международная научная конференция «Ломоносовские чтения» (2021, 2022 г.);
- XXI Международная конференция по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС'2019), Алушта, Крым, Россия, 24-31 мая 2019 г.;
- 8-я Всероссийская научная конференция с международным участием «Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред» им. И.Ф. Образцова и Ю.Г. Яновского, Москва, Россия, 18-19 декабря 2018 г.;
- XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, Уфа, Россия, 19-24 августа 2019 г.;
- XXX Всероссийская школа-конференция «Математическое моделирование в естественных науках», Пермь, Россия, 6-9 октября 2021 г.;
- 11-я Всероссийская научная конференция с международным участием «Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и

гетерогенных сред» им. И.Ф. Образцова и Ю.Г. Яновского, Москва, Россия, 23-25 ноября 2021 г.

Публикации автора по теме диссертации

Основные результаты диссертации изложены в 8 печатных работах, из них 3 статьи опубликованы в журналах, индексируемых в базах данных Web of Science, Scopus, RSCI.

Личный вклад

Выбор представительной области согласно идее научного руководителя о модификации представительной области осуществлен автором [1,2,4-6]. Также самостоятельно осуществлена формулировка осредненных упругих свойств в рамках геометрической нелинейности для гиперупругого материала [1-3].

Самостоятельно предложена схема вычисления параметров потенциалов в рамках ортотропной модели [1,2,4]. Самостоятельно показана необходимость использования модифицированного определения осреднения для утонченного резинокордного слоя.

Эксперименты проведены в НИИ Механики МГУ совместно и под руководством ведущего научного сотрудника П.В. Чистякова и обработаны самостоятельно согласно идее научного руководителя. Выводы из этих экспериментов сделаны самостоятельно [3,7,8].

На основе программы научного руководителя для решения задачи нелинейного деформирования твердого тела реализована гиперупругая модель резинокордных слоев [3]. Самостоятельно проведено тестирование модифицированной программы и влияния утончения брекерного резинокордного слоя на изгибные жесткости [3]. Самостоятельно проведено сравнение натяжений в кордах в задаче внедрения индентера с результатами других авторов.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы. В работе содержится 58 рисунков, 32 таблицы. Список литературы содержит 145 наименований. Общий объем работы 127 стр.

Краткое содержание диссертации

Во введении формулируются цели работы, обосновывается актуальность и новизна исследований, излагается теоретическая и практическая значимость полученных результатов, приводится краткий обзор научной литературы по теме исследования.

В главе 1 изложена модификация определения представительной области для резинокордного слоя, находящегося в окружении резины (резиновой смеси). В соответствии с этим приведено определение эффективных гиперупругих свойств резинокордного слоя в рамках геометрической нелинейности. Рассмотрено два типа резинокордных слоев. Поперечное сечение ячейки периодичности слоя типа 1 имеет почти квадратную форму. Такая форма типична для резинокордного слоя каркаса. Материал корда в этом случае текстильный. Сечение ячейки слоя типа 2 при расчетах искусственно утончается и имеет форму прямоугольника. Такая ячейка типична для слоя брекера, который имеет жесткий стальной корд. Утончение используется как вычислительный прием, чтобы обеспечить совпадение изгибных жесткостей слоя относительно оси, перпендикулярной направлению волокон. (В главе 4 показано, что для ячейки типа 2 утончение действительно необходимо.)

Модификация RVE достигается путем добавления материала резины (резиновой смеси) к верхней и нижней границам ячейки периодичности. Далее на примере изгиба резинокордного слоя численным расчетом показывается, что модифицированное определение эффективных упругих свойств приводит к большей точности и поэтому целесообразно.

Далее в этой главе предлагаются формы упругого потенциала для ячейки периодичности типа 1, моделируемой трансверсально-изотропным материалом, и ячейки типа 2, моделируемой ортотропным материалом.

В разделе 1.1 приведены классические определения упругих эффективных модулей и податливостей, использующих определение представительной области (RVE). Определения являются конструктивными и позволяют вычислять эффективные модули. Задачи состоят в решении уравнений равновесия в RVE при двух различных граничных условиях (1) или (2)

$$u_i = \varepsilon_{ij}^0 x_j, \mathbf{x} \in \Sigma_{RVE} \Rightarrow \langle \sigma_{ij} \rangle = \frac{1}{|V_{RVE}|} \int_{V_{RVE}} \sigma_{ij} dV_{RVE}, \quad \langle \sigma_{ij} \rangle = C_{ijkl}^{eff} \langle \varepsilon_{kl} \rangle, \quad (1)$$

$$C_{ijkl}(\mathbf{x})u_{k,l}n_j = \sigma_{ij}^0 n_j, \mathbf{x} \in \Sigma_{RVE} \quad \langle \varepsilon_{ij} \rangle = \frac{1}{|V_{RVE}|} \int_{V_{RVE}} \varepsilon_{ij} dV_{RVE}, \quad \langle \sigma_{ij} \rangle = J_{ijkl}^{eff} \langle \varepsilon_{kl} \rangle. \quad (2)$$

Затем вычисляются модули жесткости и податливости, между которыми предполагается взаимнообратность

$$(\mathbf{C}^{eff})^{-1} = \mathbf{J}^{eff}.$$

Определение эффективных свойств, обобщенное на случай геометрической нелинейности и гиперупругой среды, состоит в решении краевых задач равновесия в RVE с аналогичными граничными условиями, задающими аффинные преобразования представительной области. Соотношение гиперупругого материала имеют вид

$$\mathbf{P} = \frac{\partial W(\mathbf{x}, \mathbf{C})}{\partial \mathbf{F}} \quad \text{или} \quad \mathbf{S} = 2 \frac{\partial W(\mathbf{x}, \mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}}.$$

Здесь и далее используем обозначения: $\boldsymbol{\sigma}$ – тензор напряжений Коши, $\mathbf{P} = \mathbf{J}\mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ – первый тензор напряжений Пиолы-Кирхгофа, $J = d \, e \, \mathbf{F}$ – якобиан преобразования Пиолы, $\mathbf{S} = \mathbf{J}\mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}$ – второй тензор Пиолы-Кирхгофа, $\mathbf{C}$ – тензор Коши-Грина ($\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$, $\mathbf{F}$ – деформационный градиент) и $\mathbf{E} = 1/2(\mathbf{C} - \mathbf{I})$ – Лагранжев тензор деформаций.

Предполагается, что существуют эффективные потенциалы, такие, что

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{\partial W^{eff}(\langle \mathbf{C} \rangle)}{\partial \langle \mathbf{C} \rangle}, \quad \langle \mathbf{C} \rangle = \frac{\partial W^{eff}(\langle \mathbf{S} \rangle)}{\partial \langle \mathbf{S} \rangle}.$$

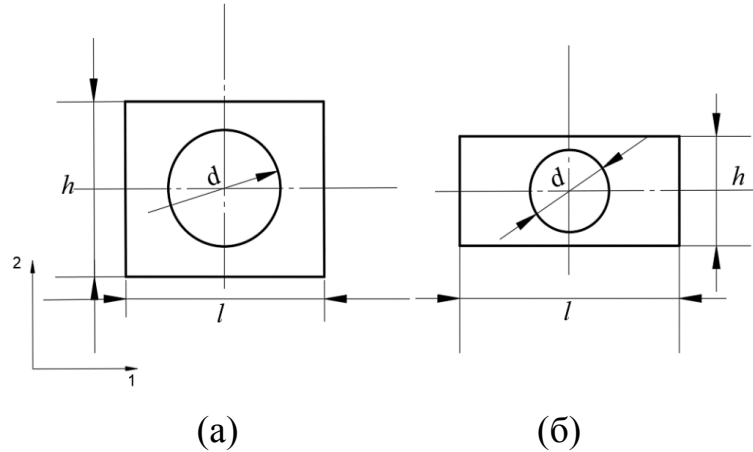


Рис. 1. Ячейка резинокордного материала. (а) – ячейка периодичности (RVE) «необрезанного» резинокордного слоя каркаса (тип 1), (б) – ячейка периодичности (RVE) утонченного слоя брекера (тип 2).

Раздел 1.2. Типичная ячейка периодичности изображена на рис. 1. Для RVE резинокордного слоя соотношение сторон близко к единице ($h = \eta l$, $\eta \approx 1$). При этом изгибные жесткости, вообще говоря, не могут быть получены из осредненных жесткостей в плане слоя. Другими словами, эквивалентный однородный слой с найденными эффективными жесткостями в плане может обладать неправильными изгибными жесткостями. Однако изгибными жесткостями резинокордного слоя каркаса можно пренебречь в силу их малости.

Для слоя брекера это не так, поэтому нужно использовать утончение слоя. Это значит, что слой в конечно-элементной модели искусственно делается более тонким, чем реальный резинокордный слой. Ячейка периодичности утонченного слоя брекера (рис. 1б) с $\eta = \frac{h}{l} \approx 0.5$ тоньше, чем ячейка каркаса.

В таком случае тип граничных условий влияет на соотношение между средними напряжениями и деформациями. Методом конечных элементов решены задачи о сжатии вдоль оси 2 при двух различных граничных условиях (1) и (2).

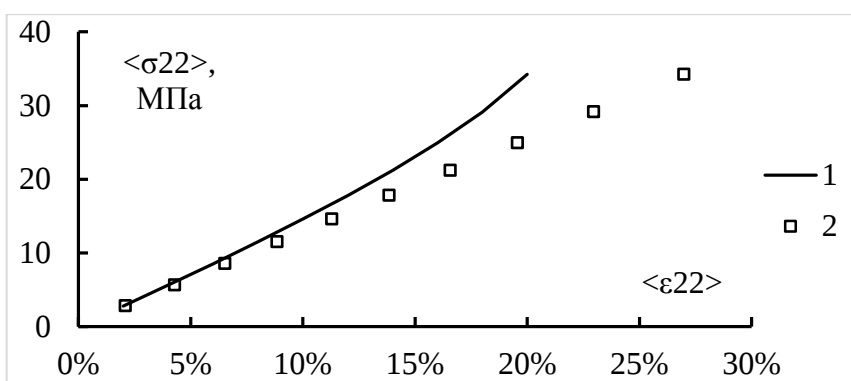


Рис. 2. Зависимость среднего напряжения от средней деформации для ячейки типа 2 при двух различных граничных условиях. 1 – граничные условия типа Дирихле, 2 – граничные условия типа Неймана.

Для ячейки типа 2 рис. 2 ясно показывает, что кривые различаются при различных граничных условиях. Причина в том, что граничный эффект проникает внутрь ячейки. Следовательно, необходимо модифицировать RVE резинокордного слоя.

Поэтому в **разделе 1.3** предложена модификации определения представительной области и вычисления средних напряжений и деформаций.

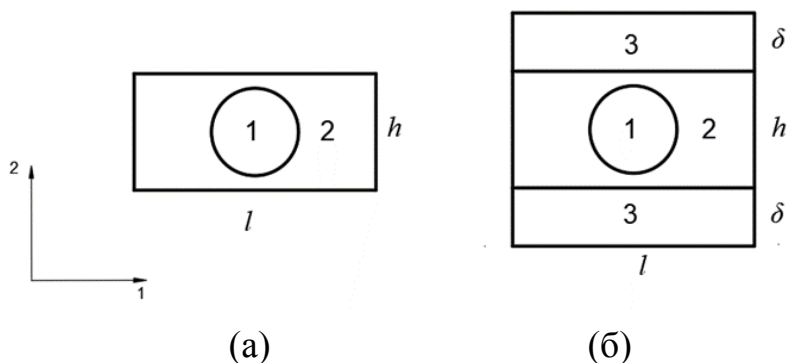


Рис. 3. Вид ячейки периодичности типа 2: (а) ячейка типа 2 резинокордного слоя (RVE), (б) та же ячейка, но дополненная слоями окружающего материала сверху и снизу (RVE+). 1 – материал корда, 2 – материал матрицы, 3 – материал, окружающий резинокордный слой.

Рассматривается модифицированное определение осреднения. А именно, краевые задачи формулируются в области RVE+ вместо RVE, а средние вычисляются по RVE.

Для RVE+ типа 2 анализ деформации сжатия вдоль оси 2 при двух различных граничных условиях (1) и (2) приводит к одинаковым результатам.

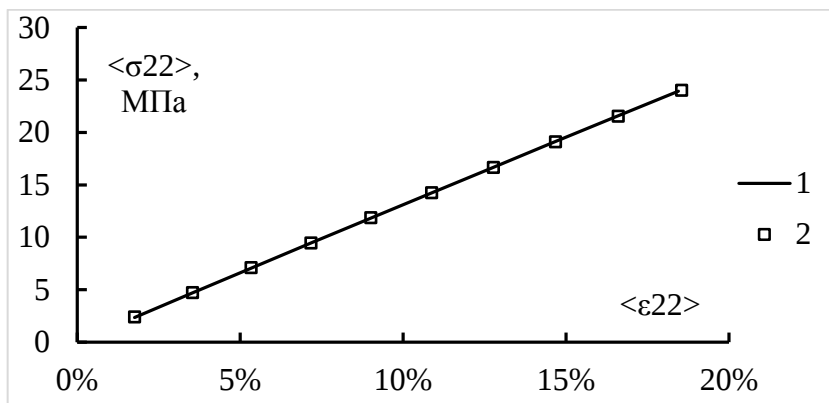


Рис. 4. Ячейка типа 2 RVE^+ при двух разных граничных условиях.

1 – граничные условия Дирихле, 2 – граничные условия Неймана.

Рис. 4 показывает, что для RVE+ нет зависимости от типа граничных условий.

В разделе 1.4 предложены потенциалы для осредненного гиперупругого материала. Используется трансверсально-изотропная модель для ячейки типа 1 и ортотропная модель для ячейки типа 2.

Потенциал осредненной (эффективной) среды представлен в виде суммы изотропной и неизотропной частей

$$W_{\text{total}} = W_{\text{iso}} + W_{\text{others}}.$$

Изотропная часть зависит от трех инвариантов тензора $\mathbf{C}$. Точнее, $W_{\text{iso}} = W_{\text{iso}}(I_1(\bar{\mathbf{C}}), I_2(\bar{\mathbf{C}}), J)$, где

$$I_1(\mathbf{C}) = C_{11} + C_{22} + C_{33}, \quad I_2(\mathbf{C}) = \frac{1}{2}(I_1^2 - I_1(\mathbf{C}^2)),$$

$$I_3 = J^2, \quad J = \det(\mathbf{F}),$$

$\mathbf{F}$ – градиент деформирования. Изотропная часть делится на энергию объемного деформирования и упругую энергию сдвига.

$$W_{\text{iso}} = W_{\text{sh}}(\bar{I}_1, \bar{I}_2) + W_{\text{vol}}(J),$$

где $\bar{I}_1 = I_1(\bar{\mathbf{C}}) = J^{-\frac{2}{3}} I_1$, $\bar{I}_2 = I_2(\bar{\mathbf{C}}) = J^{-\frac{4}{3}} I_2$, а девиатор $\bar{\mathbf{C}} = J^{-\frac{2}{3}} \mathbf{C}$. Можно принять, что

$$W_{\text{sh}} = W_{\text{Treloar}} = c_{10}(\bar{I}_1 - 3),$$

если деформация составляет менее 15%. Если деформация больше 15%, можно использовать потенциал Муни

$$W_{\text{sh}} = W_{\text{Mooney}} = c_{10}(\bar{I}_1 - 3) + c_{01}(\bar{I}_2 - 3).$$

Для энергии деформации объема существует несколько известных формул, использующих модуль объемного сжатия K , например

$$W_{\text{vol}} = \frac{K}{2}(J - 1)^2.$$

Для трансверсально изотропных материалов необходимо добавить инварианты I_4 и I_5 для учета свойств материала, связанных с направлением корда:

$$I_4 = \frac{1}{2}(C_{13}^2 + C_{23}^2), \quad I_5 = \frac{1}{2}(C_{33} - 1)^2.$$

Следовательно,

$$W_{\text{total}} = W_{\text{Treloar}} + W_{\text{vol}} + W_{\text{tr_sh}} + W_{\text{tr_tens}},$$

где $W_{\text{tr_sh}} = \frac{a}{2} I_4$ – потенциальная энергия сдвига вдоль волокон, а $W_{\text{tr_tens}} = \frac{b}{2} I_5$ – потенциальная энергия растяжения/сжатия в третьем направлении.

Для описания потенциала ортотропного материала к изотропным инвариантам можно добавить инварианты I_{41} , I_{42} и I_5 , I_6 :

$$I_{41} = \frac{1}{2} C_{13}^2, \quad I_{42} = \frac{1}{2} C_{23}^2, \quad I_5 = \frac{1}{2} (C_{33} - 1)^2, \quad I_6 = \frac{1}{2} (C_{22} - 1)^2.$$

Следовательно,

$$W^{\text{eff}} = W_{\text{sh}} + W_{\text{vol}} + W_{\text{sh}_1} + W_{\text{sh}_2} + W_{33} + W_{22},$$

где $W_{\text{sh}_1} = \frac{a_{13}}{2} I_{41}$, $W_{\text{sh}_2} = \frac{a_{23}}{2} I_{42}$ – потенциальная энергия сдвига вдоль волокон в плоскостях 1–3 и 2–3, а $W_{33} = \frac{b_{33}}{2} I_5$, $W_{22} = \frac{b_{22}}{2} I_6$.

В главе 2 описана процедура вычисления параметров гиперупругой модели с применением феноменологического подхода. Использованы численные эксперименты, моделирующие нагружения по путям деформаций, соответствующих аффинным преобразованиям представительной области. Для этих путей зависимость напряжения от деформации вычислялась МКЭ, а также получалась символьным дифференцированием потенциала. Из сравнения вычислялись параметры потенциала. Исследовалось влияние размера сетки на точность расчета, а также проверялась устойчивость расчета параметров.

В разделе 2.1 схема вычисления параметров потенциала слоя каркаса описана подробно. Здесь она описана кратко. Первый шаг – это растяжение вдоль оси 1. Деформацию растяжения можно описать как

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 + \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} (1 + \varepsilon)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следующий расчет – растяжение вдоль оси 2. Результаты для задачи I^+ , полученные при растяжении вдоль оси 1 и вдоль оси 2, оказались близки.

Выражение для S_{11} при растяжении вдоль оси 1, полученное символьным дифференцированием, имеет вид ($\varepsilon = C_{11} - 1$):

$$S_{11} = \frac{4}{3} c_{10} \varepsilon (\varepsilon + 2) (\varepsilon + 1)^{\frac{8}{3}} + K \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon}.$$

Формула для S_{11} содержит два неизвестных параметра C_{10} , K . Модуль K много больше начального модуля сдвига $G = 2C_{10}$. Поэтому K можно вычислить из этой формулы, пренебрегая первыми членами, либо C_{10} предварительно можно вычислить из опыта на сдвиг:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ \gamma & 1 + \gamma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Связь между касательным напряжением и удвоенной деформацией сдвига γ выражается формулой

$$S_{12} = \frac{\partial W}{\partial C_{12}} + \frac{\partial W}{\partial C_{21}} = 2c_{10}\gamma \left(1 + \frac{\gamma^2}{3} \right).$$

Используя последние два нагружения, получены два параметра c_{10} , K , определяющие механические свойства в поперечной плоскости 1-2. Для расчета параметра a была использовалась трехмерная модель и решалась задача I^+ о продольном сдвиге. По вычисленной диаграмме $S_{i3} \sim \gamma$, $i = 1, 2$ с помощью формулы $S_{i3} = 2c_{10} + a \gamma + O(\gamma^3)$ определялась последняя из материальных констант – константа a . Для ячейки типа 1 константа a имеет отличие от начального модуля сдвига $G_0 = 2c_{10}$, не превышающее 5%.

В разделе 2.2 для проверки параметров полученной гиперупругой модели была создана 2D микроскопическая модель резинокордного материала типа 1 в условиях плоской деформации. Микро модель, используемая при проверке, состояла из 100 ячеек периодичности. Таким образом, длина L пластины также примерно в 100 раз больше толщины. Решалась задача о цилиндрическом изгибе такой пластины при заданном в середине прогибе u_y в двумерной постановке посредством МКЭ. Для ячейки типа 1 модели гомогенизации типа I и I^+ не показали существенной разницы между собой и по сравнению с микро моделью.

В разделе 2.3 описана похожая схема для вычисления параметров потенциала слоя брекера (ячейка типа 2). В этом случае модели гомогенизации типа I и I^+ приводят к различающимся результатам.

В разделе 2.4 для проверки параметров полученной гиперупругой модели для ячейки типа 2 была также создана 2D микроскопическая модель резинокордного слоя типа 1 в условиях плоской деформации. Решалась задача о цилиндрическом изгибе такой пластины в результате заданной в середине сосредоточенной силы F_y (рис. 5). Задача решалась МКЭ в двумерной постановке.

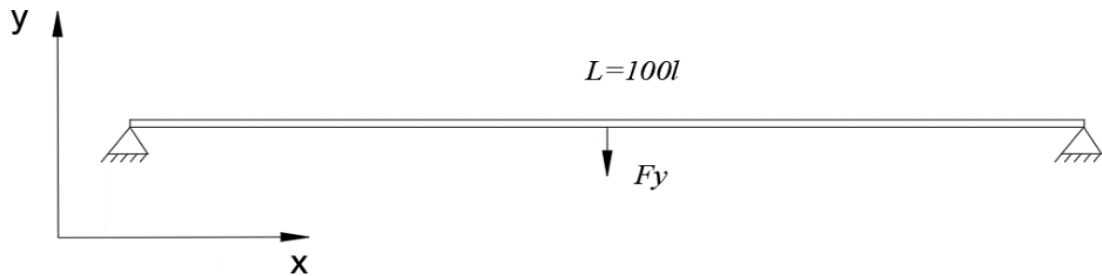


Рис. 5. Задача об изгибе пластины.

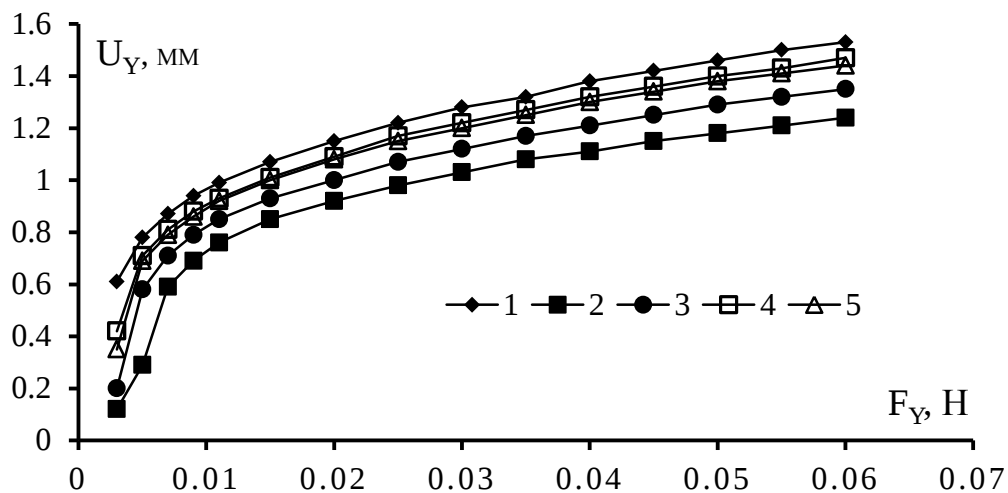


Рис. 6. Сравнение между моделями при деформировании изгиба:
1 – микромодель; гомогенизированные модели в задачах: 2 – I (Муни),
3 – I (Трелоар), 4 – I^+ (Муни), 5 – I^+ (Трелоар).

На рис. 6. видно, что приближение решения по осредненной модели к решению по микромодели лучше, когда свойства определялись из задачи I^+ , чем из задачи I . Для задачи I^+ решение практически не зависит от того, какой потенциал выбрать – Муни или Трелоара.

Глава 3 посвящена экспериментальному исследованию зависимости свойств брекерного слоя от скорости нагружения, а также изучению эффекта Маллинза для резиновой смеси. Испытания на одноосное растяжение проходили при одинаковой температуре с двухслойными образцами резинокорда и образцом из резиновой смеси такой же толщины.

Из-за наличия эффекта Маллинза были проведены отдельные исследования первого и последующих процессов растяжения образца из резиновой смеси. Вязкоупругие свойства резиновой матрицы описываются с помощью обобщенной модели Максвелла.

В **разделе 3.1** описываются проведенные эксперименты с целью выяснить величину различия первой и последующих кривых напряжение–деформация вследствие эффекта Маллинза при циклическом процессе нагрузки и разгрузки с постоянными скоростями.

В **разделе 3.2** описаны испытания на одноосное растяжение образца из резиновой смеси и резинокордных образцов при различных постоянных скоростях деформации. Результаты экспериментов показывают, что материал резиновой смеси проявляет вязкоупругие свойства даже в условиях квазистатического достаточно медленного нагружения.

В **разделе 3.3** анализируется зависимость между напряжением и деформацией в процессе первого одноосного растяжения. На рис. 7 показана зависимость напряжения от деформации резиновой матрицы, соответствующая скорости деформации $v_1 = 8 \times 10^{-3} \text{ с}^{-1}$ во время первого процесса нагружения.

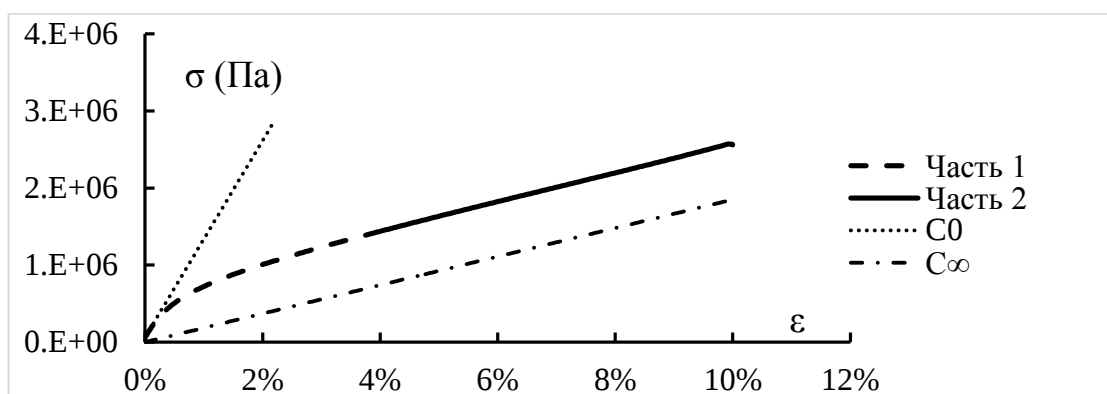


Рис. 7. Зависимость напряжения от деформации при первом одноосном растяжении резиновой матрицы при постоянной скорости деформации

$$v_1 = 8 \times 10^{-3} \text{ с}^{-1}.$$

На начальной стадии растяжения (2%~4%) зависимость напряжения от деформации представляет собой кривую. На этой стадии разница между кривыми становится больше при увеличении разницы в скорости деформации. Это отражает зависимость материала от скорости деформации. Наклон линии C_0 на рисунке представляет собой мгновенный модуль C_0 материала в начале растяжения. Наклон кривой C_∞ представляет собой длительный модуль C_∞ материала.

На втором участке кривой напряжение–деформация (4%~10%) зависимость между напряжением и деформацией представляет собой примерно прямую линию. На этом этапе соотношение между напряжением и деформацией материала не зависит или слабо зависит от скорости деформации. Наклон прямой линии определяет длительный модуль C_∞ . Это показывает, что на втором участке механические свойства материала резиновой матрицы позволяют определить упругие или гиперупругие параметры материала в рамках аддитивной модели гиперупругости и вязкоупругости.

Графики напряжение–деформация для вторых участков совмещены на рис. 8 для сравнения наклонов.

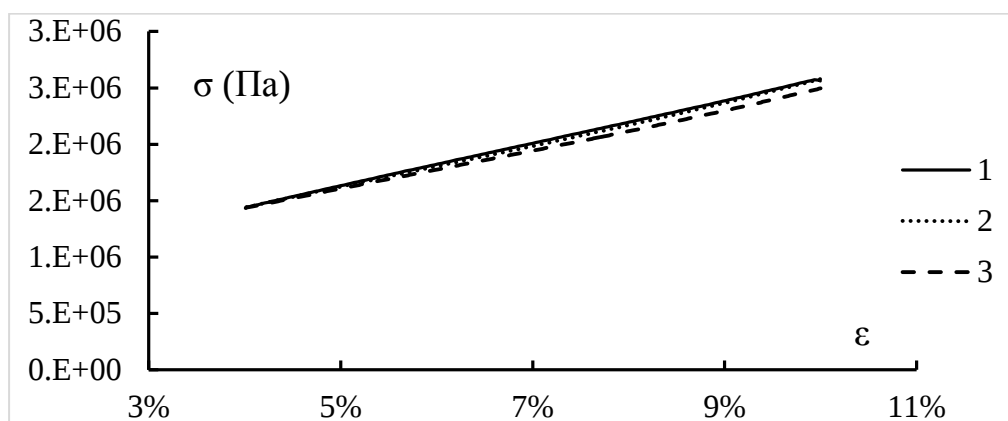


Рис. 8. Сравнение наклонов второй части кривой напряжение–деформация при разных постоянных скоростях деформации для брекерной резины.

- 1 – диаграмма напряжение–деформация для скорости деформации $8 \times 10^{-3} \text{ с}^{-1}$,
 2 – диаграмма для скорости $7 \times 10^{-4} \text{ с}^{-1}$, 3 – для скорости $8 \times 10^{-5} \text{ с}^{-1}$,
 4 – для скорости $8 \times 10^{-6} \text{ с}^{-1}$.

Как видно из рис. 8, наклоны второй части кривых напряжение–деформация практически одинаковы. Это показывает, что вторая часть зависимости напряжение–деформация может быть описана моделью упругости

(гиперупругости при дальнейшем увеличении деформации). Такое же поведение обнаружено при испытаниях резинокордных материалов с кордными углами 30 и 45 градусов. В целом кривые могут быть описаны аддитивной моделью гиперупругости и вязкоупругости. В качестве последней удобно выбрать обобщенную модель Максвелла.

Выбор параметров модели Максвелла

$$\sigma(t) = \int_0^t R(t-\tau) d\varepsilon(\tau), \quad R(t-\tau) = C_\infty + \sum_{n=1}^N C_n e^{-\frac{t}{t_n}} \quad (3)$$

осуществлен для первого участка кривой напряжение–деформация. В случае гиперупругой модели вместо C_∞ следует использовать $\frac{\partial W}{\partial C}$. Используя аддитивное сочетание моделей гиперупругости в линейной вязкоупругости, соотношение (3) можно записать в виде

$$\sigma(\varepsilon) = \sigma(\varepsilon)_{ref} + \int_0^t R(t-\tau)(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_{ref}) d\tau,$$

где $\sigma(\varepsilon)_{ref}$ есть соотношение напряжение–деформация при выбранной референсной скорости деформации. Таким образом, зная референную зависимость напряжения от деформации можно вычислить аналогичную зависимость для актуальной скорости деформирования.

Справедливость такой аппроксимации показана на рис. 9.

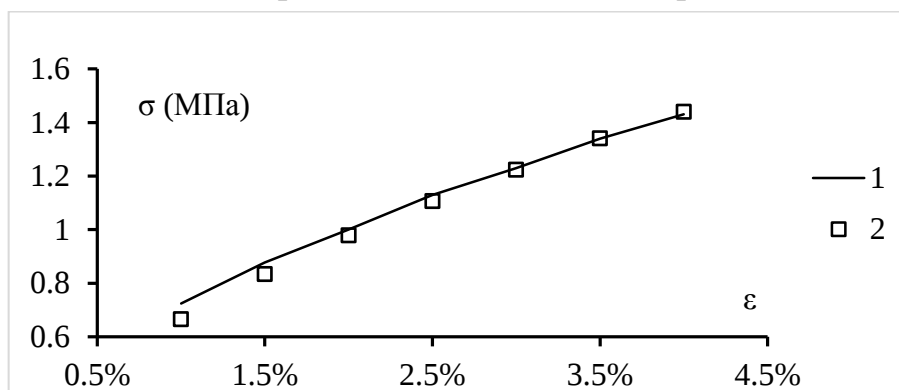


Рис. 9. Проверка параметров модели Максвелла. 1 – экспериментальные данные, 2 – результаты расчета по модели Максвелла.

В разделе 3.4 анализируется зависимость между напряжением и деформацией при последующих нагружениях. Результаты испытаний показали, что наклон между второй частью кривой напряжения–деформации неодинаков.

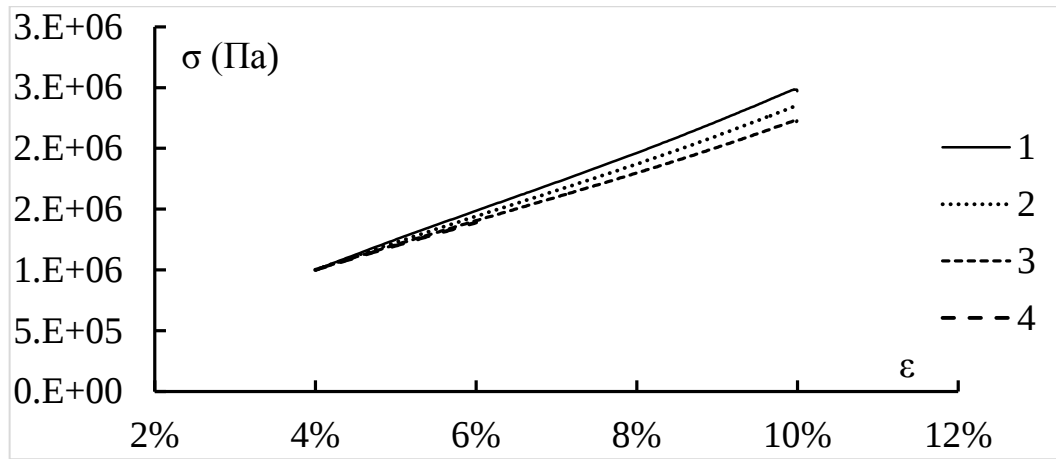


Рис. 10. Во время второго растяжения сравнение наклонов кривых напряжение–деформация материала резиновой смеси при различных скоростях деформации.

1 – диаграмма напряжение–деформация для скорости деформации примерно $8 \times 10^{-3} \text{ с}^{-1}$, 2 – для скорости $7 \times 10^{-4} \text{ с}^{-1}$, 3 – для скорости $8 \times 10^{-5} \text{ с}^{-1}$, 4 – для скорости $8 \times 10^{-6} \text{ с}^{-1}$.

В главе 4 представлена трехмерная модель шины, использующая разработанную эквивалентную гиперупругую модель материала резинокорда. Цель состоит в моделировании квазистатического деформирования шины в рамках гиперупругости. Численные расчеты в основном состоят из трех частей:

1. Оценка адекватности изгибной жесткости резинокорда брекерного слоя.
2. Моделирование испытания на разрыв (Breaking Test).

В разделе 4.1 описан метод нелинейного анализа. Вариационное уравнение квазистатической геометрически нелинейной задачи сформулировано в текущей конфигурации

$$\int_V \mathbf{d}(\mathbf{w}) : \mathbf{C}^d \cdot \mathbf{d}(\mathbf{du}) dV + \int_V \mathbf{T} : [\nabla \mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{du}^T] dV = dA^e(\mathbf{u}, \mathbf{w}) \quad (4)$$

где $\mathbf{C}_{ijkl}^d = J^{-1} F_{ip} F_{jq} F_{kr} F_{ls} \mathbf{C}_{pqrs}^E$, $\mathbf{C}^E = \frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{C}}$. Это соотношение показывает, что гиперупругая модель резинокордных слоев удобна тем, что определяющие соотношения для резинокордных слоев и областей резиновой смеси имеют одинаковый тип. Различие состоит только в виде потенциала.

Уравнение (4) – Лагранжев подход с адаптацией (UL). Для случая отсутствия перестроений конечно-элементной сетки он эквивалентен полностью Лагранжевому подходу (TL). Перемещение $\mathbf{u}$ зависит от координат

в текущей области и t . Нелинейный функционал dA^e сформулирован в текущей области, поскольку внутреннее давление является следящей нагрузкой. Уравнение (4) дискретизировано с помощью МКЭ по координатам и неявного метода Эйлера по параметру нагружения.

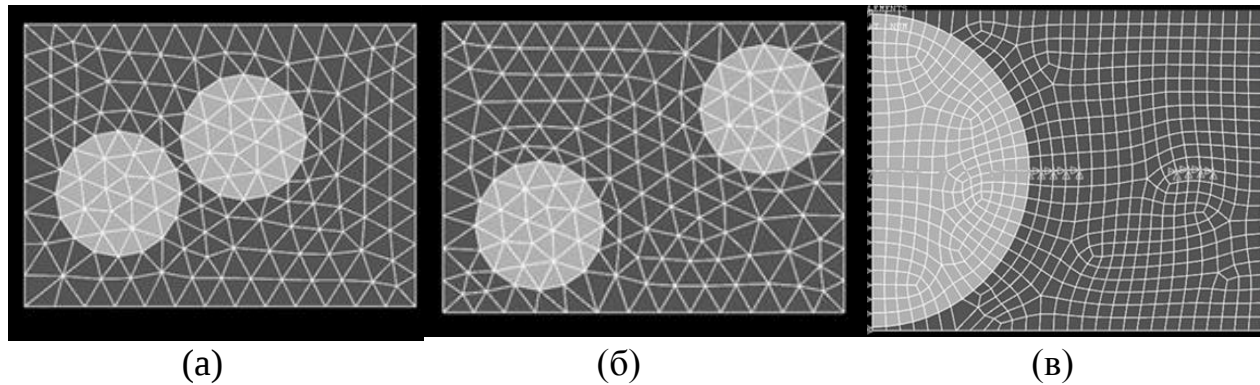


Рис. 11. Модели ячейки периодичности.

В разделе 4.2 изучается цилиндрический изгиб резинокордного слоя в направлениях поперек корда. Вопрос состоит в том, обеспечивает ли метод утончения правильную жесткость на изгиб. Строится 3D микромоделей ячейки резинокордного слоя, содержащие одно эффективное волокно или четыре волокна (рис. 11).

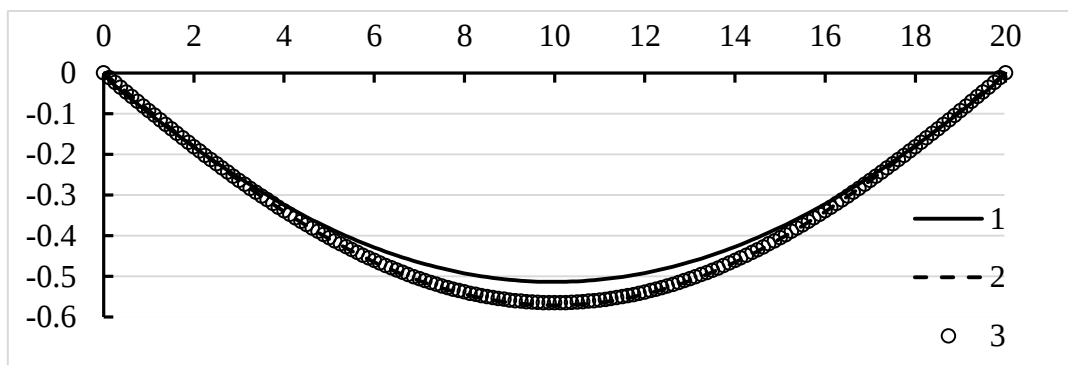


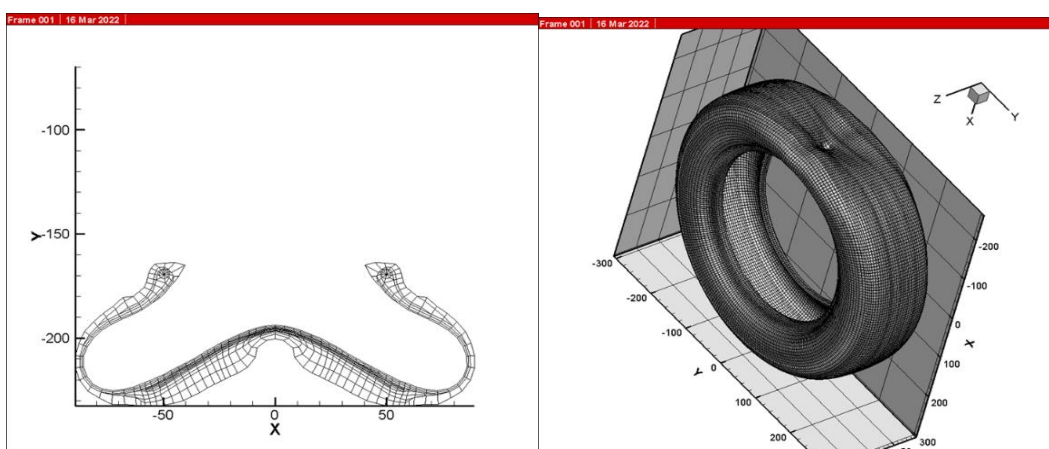
Рис. 12. Результат сравнения деформации изгиба. 1 – гомогенизированная модель, 2 – микромодель типа «а», 3 – микромодель типа «б».

Проведена оценка относительной разницы максимальных прогибов, вычисленных по осредненной модели и микромоделям. Рассмотрен изгиб с растяжением, анализ линейный. Сравнение приведено на рис. 12. Для модели одного волокна получена разница 21%, а для модели, содержащей 4 корда, –

10%. Таким образом, модель одного волокна, используемая в инженерной практике, приводит к большей погрешности, чем модель с несколькими волокнами.

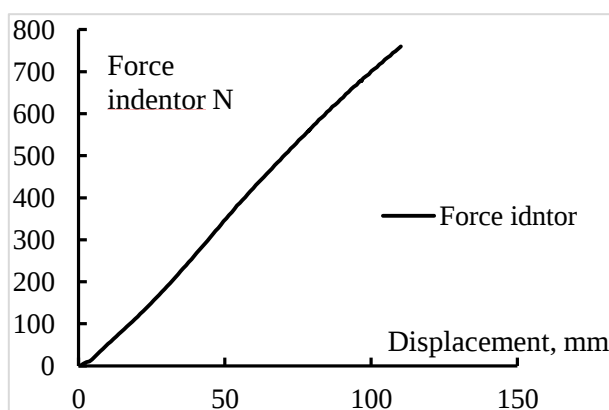
Наконец, мы провели геометрически нелинейный анализ. Микроскопическая модель показана на рис. 11б. Максимальная разница прогиба между двумя моделями составляет $\frac{w_2 - w_1}{w_2} = 0.082$.

Таким образом, по результатам нескольких серий сравнительных экспериментов, показано, что для материала резинокорда с металлическим кордом метод утончения обеспечивает приемлемое совпадение изгибных жесткостей.

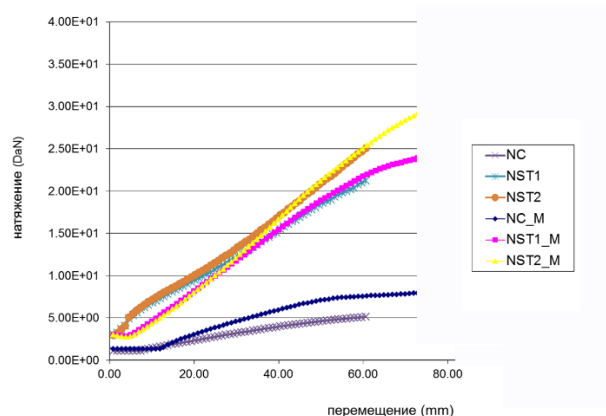


(a)

(б)



(в)



(г)

Рис. 13. Результат теста на разрыв. (а) – деформация шины (2D-модель), (б) – деформация шины (3D-модель), (в) – зависимость вдавливающей силы от перемещения индентера, (г) – максимальное растягивающее усилие, воспринимаемое каждым слоем материала.

В разделе 4.3 верифицируется используемая в расчетах программа конечных элементов, созданная научным руководителем и дополненная полученными потенциалами. Для использования они дважды продифференцированы с помощью программы символьных вычислений Octave. Основной тест состоит во внедрении в шину индентера в радиальном направлении. Задача решалась в квазистатической постановке в рамках гиперупругости. Зависимость вдавливающей силы от перемещения индентера является результатом испытания. Проблема является существенно геометрически нелинейной. Путем численного расчета можно получить деформацию шины и максимальное усилие в корде, как показано на рис 13в и 13г.

Также решена модельная задача, когда шины медленно преодолевают препятствия. Во время этого процесса шину можно считать деформированной в условиях квазистатической нагрузки.

Основные выводы и результаты диссертации

1. Модифицировано определение RVE слоя, рассматриваемого как трехмерное упругое тело. В соответствии с этой модификацией дано определение эффективных упругих свойств трехмерного упругого материала неоднородного слоя с учетом геометрической нелинейности.
2. Определение эффективных свойств конкретизировано для резинокордных слоев каркаса и брекера в виде моделей гиперупругих материалов. Показано, что для утонченной ячейки брекера модификация RVE необходима.
3. Предложены варианты потенциалов для трансверсально изотропного и ортотропного материалов.
4. Предложена и проверена схема вычислительных экспериментов для определения материальных параметров потенциалов.
5. Количественно изучено влияние эффекта Маллинза для брекерной резины. Выявлено, что при моделировании сильного нагружения для обеспечения точности около 10% следует учитывать этап нагружения: при первом нагружении следует использовать первую кривую напряжение–деформация, при последующих нагружениях – кривую второго или последующих циклов.
6. Описано влияние скорости деформации при квазистатическом равномерном нагружении с помощью обобщенной модели Максвелла.

7. Показано, что для материала резинокорда с металлическим кордом (материала брекера) метод утончения слоя обеспечивает приемлемое совпадение изгибных жесткостей.
8. Тестирование компьютерной модели шины показало адекватность ее результатов.

Публикации автора по теме диссертации

Научные статьи в рецензируемых журналах, индексируемых в международных базах Web of Science, Scopus, RSCI:

1. *Шешенин С.В., Ду Икунь*. Две модели резинокордного слоя // Механика композиционных материалов и конструкций. 2021. Т.27. №2. С.191–204.
Impact factor RINC: 0.531. DOI: 10.33113/mkmmk.ras.2021.27.02.191_204.03
2. *Sheshenin S.V., Du Yikun*. Homogenization of rubber-cord layers at moderately large deformations. Mechanics of Composite Materials. 2021. Vol.57. No.3. P.275–286.
Impact factor JCR (WoS): 1.029. DOI: 10.1007/s11029-021-09953-2
3. *Шешенин С.В., Ду Икунь, Чистяков П.В., Артамонова Н.Б.* Моделирование резинокордных слоев при квазистатическом нагружении // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2021. №4. С.49–59.
Impact factor SJR: 0.302. DOI: 10.15593/perm.mech/2021.4.06

Другие научные труды:

4. *Шешенин С.В., Чистяков П.В., Пятко А.А., Икунь Ду*. Нелинейные и вязкоупругие свойства резинокорда // Материалы XXI Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС'2019), Алушта, 24-31 мая 2019 г. М: Изд-во МАИ, 2019. С.367–369.
5. *Ду Икунь, Шешенин С.В.* Модель резинокорда при умеренно больших деформациях // Сборник трудов 8-й Всероссийской научной конференции с международным участием «Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред» им. И.Ф. Образцова и Ю.Г. Яновского. Москва, 18-19 декабря 2018 г. М.: ООО «Сам Полиграфист», 2019. С.101–109.

6. *Шешенин С.В., Ду Икунь, Чистяков П.В.* Модели резинокордного слоя // Сборник трудов XII Всероссийского съезда по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Т. 3: Механика деформируемого твердого тела. Уфа: РИЦ БашГУ, 2019. С.1276–1277.
7. *Шешенин С.В., Ду Икунь, Чистяков П.В.* Моделирование резинокордных слоев при квазистатическом нагружении // Материалы XXX Всероссийской школы-конференции «Математическое моделирование в естественных науках», Пермь, 6-9 октября 2021 г. Пермь: Изд-во ПНИПУ, 2021. С.33–35.
8. *Ду Икунь, Шешенин С.В., Чистяков П.В.* Моделирование квазистатического деформирования пневматической шины // Сборник трудов 11-й Всероссийской научной конференции с международным участием «Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред» им. И.Ф. Образцова и Ю.Г. Яновского. Москва, 23-25 ноября 2021 г. М.: ООО «Сам Полиграфист», 2021. С.45–53.