МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

РЕМИЗОВ ИВАН ДМИТРИЕВИЧ

ФОРМУЛЫ ФЕЙНМАНА ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ЧЕРНОВА

Специальность 01.01.01
вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2017

Работа выполнена на кафедре теории функций и функционального анализа механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова.

Научный руководитель:	**Смолянов Олег Георгиевич** доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Орлов Юрий Николаевич** доктор физико-математических наук, доцент, заведующий отделом вычислительной физики и кинетических уравнений Института прикладной математики имени М.В.Келдыша РАН
	Сакбаев Всеволод Жанович доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры высшей математики Московского физико-технического института
	Шамаров Николай Николаевич доктор физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа механико-математического факультета МГУ имени М.В.Ломоносова

Защита диссертации состоится 16 февраля 2018 г. в 16 часов 45 минут на заседании диссертационного совета МГУ.01.07 Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119234, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, д. 1, МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16-24. Email: mexmat_disser85@mail.ru.

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М.В.Ломоносова (г. Москва, Ломоносовский проспект, д. 27) и на сайте ИАС «ИСТИНА» https://istina.msu.ru/dissertations/83959506/

Автореферат разослан 15 января 2018 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета МГУ.01.07
доктор физико-математических наук — ВЛАСОВ
профессор — Виктор Валентинович

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Диссертация посвящена развитию техники, связанной с исследованием одного из центральных объектов бесконечномерного анализа, находящего важные приложения в математической физике — функционального интеграла (интеграла Фейнмана по траекториям). Опубликовано много работ, посвящённых изучению и приложениям этого объекта, но большинство из них написаны на физическом уровне строгости, так как математическое описание возникающих конструкций связано с преодолением серьёзных технических и идейных трудностей. Число чисто математических работ этого направления сравнительно невелико, но в последнее десятилетие оно быстро возрастает. Этот рост связан не только с важностью обсуждаемых объектов для приложений, но и с внутренней логикой развития анализа. Сказанное и определяет актуальность темы диссертации. Обоснуем теперь, почему и в рамках этой достаточной широкой тематики поставленные и решённые в диссертации задачи занимают важное место.

Формулой Фейнмана (в смысле О.Г. Смолянова) называется представление решения эволюционного уравнения в виде предела кратного интеграла при кратности, стремящейся к бесконечности. При этом описана[1] связь интеграла Фейнмана и формул Фейнмана: кратные интегралы конечной (но неограниченно возрастающей) кратности в формулах Фейнмана являются аппроксимациями для интеграла «бесконечной кратности», т.е. интеграла Фейнмана по траекториям. Поэтому во многих случаях можно использовать формулы Фейнмана как для математически корректного определения интеграла Фейнмана, так и для его вычисления.

Впервые так называемые лагранжевы формуы Фейнмана появились в работе Р. Фейнмана[2] 1948 года, где он постулировал их «на физическом уровне строгости», т.е. без математического доказательства. Построенные Фейнманом формулы доказал в 1964 году Э. Нельсон,[3] его доказательство опиралось на открытую в 1959 году теорему Троттера,[4] называемую также иногда теоремой Троттера-Далецкого-Ли. Гамильтоновы формулы Фейнмана в 1951 году были также без доказательства предложены Р. Фейнманом,[5] а доказаны в

[1] О.Г.Смолянов, Е.Т.Шавгулидзе. Континуальные интегралы. УРСС, 2015.

[2] R.P. Feynman. Space-time approach to nonrelativistic quantum mechanics// Rev. Mod. Phys., 20 (1948), 367-387.

[3] E. Nelson, Feynman Integrals and the Schredinger Equation, J. Math. Phys., 1964, 5:3, pp. 332-343.

[4] H.F. Trotter. On the product of semi-groups of operators// Proceedings of the American Mathematical Society 10 (4), pp. 545–551, 1959.

[5] R.P. Feynman. An operation calculus having applications in quantum electrodynamics// Phys. Rev. 84 (1951), 108-128.

2002 году работе О.Г. Смолянова, А.Г. Токарева и А. Трумана[6] при помощи появившейся в 1968 году теоремы Чернова[7].

Первые упоминания теоремы Чернова в работах О.Г.Смолянова с соавторами относятся к 2000 году.[8,9,10] О состоянии исследований с применением теоремы Чернова в рамках парадигмы О.Г.Смолянова можно судить по обзорам[11,12,13] и вновь выходящим статьям М.С.Бузинова, Я.А.Бутко, Б.О.Волкова, А.А.Калиниченко, А.А.Кравцевой, Ю.Н.Орлова, В.Ж.Сакбаева, О.Г.Смолянова, Е.Т.Шавгулидзе, Н.Н.Шамарова, автора диссертации и ссылкам в этих статьях. Достаточно обширная (но всё равно не полная) библиография имеется в датированном августом 2017 года препринте Я.А.Бутко.[14] Приведём наиболее часто используемую формулировку этой теоремы.

Теорема Чернова.[15] *Пусть $\mathcal{F}$ — банахово пространство и $\mathscr{L}(\mathcal{F})$ — пространство всех линейных ограниченных операторов в $\mathcal{F}$. Пусть дана функция $G\colon [0,+\infty) \to \mathscr{L}(\mathcal{F})$, непрерывная на каждом векторе, причём $G(0) = I$ и $\|G(t)\| \leq e^{\omega t}$ с некоторой постоянной $\omega \in \mathbb{R}$. Пусть есть такое плотное подпространство $\mathcal{D} \subset \mathcal{F}$, что при всех $f \in \mathcal{D}$ существует предел $\lim_{t\to 0} t^{-1}(G(t)f - f)$, значение которого будем обозначать символом $G'(0)f$. Предположим, что $G'(0)$ на $\mathcal{D}$ обладает замыканием C, и что C является генератором сильно непрерывной полугруппы $\left(e^{tC}\right)_{t\geq 0}$. Тогда для каждого $f \in \mathcal{F}$ и каждого $t_0 > 0$ имеет место равномерная по $t \in [0, t_0]$ сходимость $e^{tC}f = \lim_{n\to\infty} G(t/n)^n f$.*

Пусть $\mathcal{F}$ — пространство числовых функций на некотором бесконечном множестве Q. Если C — неограниченный оператор, то вычислять e^{tC} обычно

[6]O.G. Smolyanov, A.G. Tokarev, A. Truman. Hamiltonian Feynman path integrals via the Chernoff formula// J. Math. Phys. 43, 10 (2002) 5161-5171.

[7]Paul R. Chernoff, Note on product formulas for operator semigroups, J. Functional Analysis 2 (1968), 238-242.

[8]Smolyanov O.G., Weizšacker H.v., Wittich O. Diffusion on compact Riemannian manifolds, and surface measures // Doklady Math. 2000. V. 61. P. 230-234.

[9]O.G. Smolyanov, H.v. Weizsäcker, and O. Wittich. Brownian motion on a manifold as limit of stepwise conditioned standard Brownian motions// Stochastic processes, Physics and Geometry: New Interplays. II: A Volume in Honour of S. Albeverio, volume 29 of Can. Math. Soc. Conf. Proc., pages 589–602. Am. Math. Soc., 2000.

[10]O. G. Smolyanov, A. Trumen. Feynman Formulas for Solutions of the Schrödinger Equation on Compact Riemannian Manifolds// Math. Notes, 68:5 (2000), 668–671

[11]O.G. Smolyanov. Feynman formulae for evolutionary equations// Trends in Stochastic Analyasis, London Mathematical Society Lecture Notes Series 353, 2009.

[12]O.G.Smolyanov. Schrödinger type semigroups via Feynman formulae and all that. Proceedings of the Quantum Bio-Informatics V, Tokyo University of Science, Japan, 7 - 12 March 2011// World Scientific, 2013.

[13]Я.А. Бутко. Фейнмановские формулы для эволюционных уравнений// Наука и образование, No 3 (2014), 95-132. DOI: 10.7463/0314.0701581

[14]Yana A. Butko. Chernoff approximation for semigroups generated by killed Feller processes and Feynman formulae for time-fractional Fokker-Planck-Kolmogorov equations// arXiv:1708.02503

[15]Теорема 10.7.21 в книге: Богачев В.И., Смолянов О.Г. Действительный и функциональный анализ: университетский курс// РХД, 2011.

трудно, поскольку задача вычисления e^{tC} равносильна решению задачи Коши

$$\begin{cases} u'_t(t,x) = Cu(t,x) \ \text{ для } \ t>0, x\in Q \\ u(0,x) = u_0(x) \ \text{ для } \ x\in Q \end{cases}$$

для линейного дифференциального уравнения с переменными коэффициентами (в оператор C входят функции, зависящие от x), при этом $u(t,x) = \left(e^{tC}u_0\right)(x)$. Однако, если мы располагаем подходящим семейством $(G(t))_{t\geq 0}$, то можно вычислять e^{tC} приближённо с помощью теоремы Чернова. Такой подход далее называется *аппроксимацией по Чернову*, сами выражения $G(t/n)^n$ — *черновскими аппроксимациями*, а функция G — *функцией Чернова оператора* C.

Если оператор $G(t)$ — интегральный, то $G(t/2)^2 f$ — это результат применения к функции f интегрального оператора два раза подряд, т.е. это двухкратный повторный интеграл, который можно трактовать как двойной. Аналогично, $G(t/3)^3 f$ представляет собой тройной интеграл, а $G(t/n)^n f$ — n-кратный интеграл. Таким образом, при каждом $t>0$ оказывается, что $e^{tC}f$ равно пределу кратных интегралов при кратности, стремящейся к бесконечности. Именно так при применении теоремы Чернова в рамках парадигмы О.Г.Смолянова возникают формулы Фейнмана.

В связи с обоснованной выше важностью теоремы Чернова для приложений в математической теории интеграла Фейнмана и в теории уравнений с частными производынми эта теорема сама являлась и является объектом пристального внимания. Так, А.Ю.Неклюдов получил[16] обобщение теоремы на случай, когда пространство $\mathcal{F}$ не нормированное, а лишь локально выпуклое. А.С.Пляшечник сформулировал, доказал и применил[17,18] вариант теоремы Чернова, пригодный для решения неавтономных эволюционных уравнений, т.е. уравнений $u'(t) = C(t)u(t)$ с явно зависящим от времени оператором C. Были получены[19,20] результаты об обращении теоремы Чернова. Существует[21] вариант теоремы Чернова, в предполагающую часть которой внесено условие плотности образа оператора $C-\lambda I$ в $\mathcal{F}$ при некотором $\lambda>0$; в этом

[16]А.Ю.Неклюдов. Теоремы Чернова и Троттера-Като для локально-выпуклых пространств. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, МГУ, Москва, 2008.

[17]A.S. Plyashechnik. Feynman formula for Schredinger-Type equations with time- and space-dependent coefficients, Russian Journal of Mathematical Physics, 2012, vol. 19, No.3, pp. 340-359.

[18]A.S. Plyashechnik. Feynman formulas for second-order parabolic equations with variable coefficients, Russian Journal of Mathematical Physics, 2013, vol. 20, No.3, pp. 377-379.

[19]А. Ю. Неклюдов, “Обращение теоремы Чернова”, Матем. заметки, 83:4 (2008), 581–589

[20]Ю. Н. Орлов, В. Ж. Сакбаев, О. Г. Смолянов, “Неограниченные случайные операторы и формулы Фейнмана”, Изв. РАН. Сер. матем., 80:6 (2016), 141–172

[21]Следствие 5.3 из теоремы 5.2 в книге: K.-J. Engel, R. Nagel. One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations// Springer, 2000.

случае существование полугруппы с генератором C утверждается теоремой, а не предполагается, как в классической теореме Чернова.

Предпринимались попытки структурировать теорему Чернова, т.е. предлагались способы разбиения её условий на части, в том числе см. работы В.А.Дубравиной[22] и Я.А.Бутко,[23] ещё несколько вариантов были предложены О.Г.Смоляновым и его соавторами. В большинстве случаев эти структурирования были призваны облегчить автору структурирования доказательство тех утверждений, под которые было подобрано это структурирование. При этом ни один из исследователей до автора диссертации не ставил задачу предложить такое структурирование, которое могло бы само по себе быть источником универсальных методов получения функций Чернова.

Таким образом, на момент начала диссертационного исследования имела место следующая ситуация:

- Теорема Чернова около 10 лет активно используется группой О.Г.Смолянова для выражения решения задачи Коши для эволюционных уравнений через коэффициенты уравнения и начальное условие.
- Решение задачи Коши $u'_t(t,x) = Cu(t,x), u(0,x) = u_0(x)$ имеет вид $u(t,x) = \left(e^{tC}u_0\right)(x)$, где экспонента e^{tC} может быть вычислена путём построения функции Чернова G для оператора C и применения (верной в силу теоремы Чернова) формулы $e^{tC} = \lim_{n\to\infty} G(t/n)^n$.
- Во всех известных примерах оператор $G(t)$ был интегральным, поэтому решение представлялось в виде предела кратных интегралов при растущей к бесконечности кратности (т.е. в виде формулы Фейнмана), что позволяет применять такие представления в математической теории континуального интеграла (интеграла Фейнмана по траекториям).
- Функции Чернова многих дифференциальных операторов известны, но регулярных методов построения функций Чернова не существует: для каждого оператора C приходится подбирать функцию Чернова индивидуально, хотя накопленный опыт уже начинает обобщаться в виде первых теорем общего характера[24].

В связи с этим, направление дальнейшего развития в области применения теоремы Чернова определяется ответами на следующие вопросы:

[22] V. A. Dubravina. Feynman formulas for solutions of evolution equations on ramified surfaces// Russian Journal of Mathematical Physics Apr. 2014, Vol. 21 (2) pp. 285-288.

[23] Yana A. Butko. Chernoff approximation for semigroups generated by killed Feller processes and Feynman formulae for time-fractional Fokker-Planck-Kolmogorov equations// arXiv:1708.02503

[24] Butko Ya.A., Schilling R.L., Smolyanov O.G.. Lagrangian and Hamiltonian Feynman formulae for some Feller semigroups and their perturbations. Inf. Dim. Anal. Quant. Probab. Rel. Top., 15:3 (2012)

- Можно ли построить исчисление функций Чернова, т.е. предложить какие-либо регулярные методы построения функций Чернова для достаточно широкого класса операторов? Это позволило бы уйти от постоянного разбора частных случаев и начать строить общую теорию.

- Кроме интегральных, какие операторы могут выступать в роли функций Чернова? Как трактовать черновские аппроксимации, полученные на основе этих других операторов?

В первых двух главах диссертации эти вопросы получают свои ответы, что доказывает актуальность содержания этих глав.

Первая глава начинается с обзора литературы и определения используемых в диссертации терминов, там же даются необходимые пояснения и примеры. После этого обсуждается принадлежащая автору диссертации конструкция касания по Чернову и предлагается схема построения исчисления функций Чернова. А именно, доказываается, что если даны функции, касательные по Чернову к операторам A и B, то явно указанными в первой главе формулами можно задать функции, касательные по Чернову к операторам $A+B$ и AB. Далее, во второй и третьей главах диссертации рассуждения посвящены решению задач Коши для уравнения $u'_t(t,x) = Lu(t,x)$ в двух конкретных случаях. Обе задачи полностью решены автором. Возникшие при этом теоремы снабжены подробными доказательствами и ссылками на теорию из первой главы.

Во второй главе диссертации предполагается, что x принадлежит $\mathbb{R}^1$, а уравнение $u'_t(t,x) = Lu(t,x)$ — это параболическое уравнение второго порядка с переменными (вещественными) коэффициентами, которые зависят от x, но не от t. Уравнение решается путём применения черновской аппроксимационной процедуры со специально построенным семейством операторов сдвига. Доказана равномерная сходимость аппроксимаций к точному решению. Решение при этом представляется в виде выражения нового типа, поскольку в здесь используются не степени интегрального оператора (приводящие к обычным формулам Фейнмана), а степени оператора сдвига. Доказано, что решение может быть записано также как формула Фейнмана с интегральным ядром, содержащим обобщённые функции. Ранее это уравнение было решено многими способами, однако здесь впервые теорема Чернова применяется к семейству операторов сдвига, а не к семейству интегральных операторов.

В третьей главе диссертации предполагается, что аргумент x принадлежит бесконечномерному сепарабельному гильбертову пространству H, а в роли L выступает дифференциальный оператор с переменными коэффициентами, содержащий производные второго, первого и нулевого порядков. Вторая производная входит в L в виде лапласиана Вольтерры-Гросса,[25] который строится по линейному оператору $A\colon H \to H$ с конечным следом так: если f — числовая функция на H, то по определению $(\Delta_A f)(x) = \mathrm{trace}(Af'')(x)$. Решение с помощью теоремы Чернова пишется в виде предела кратных интегалов неограниченно растущей кратности, при этом интегрирование в гильбертовом пространстве ведётся по гауссовской мере с корреляционным оператором, равным произведению оператора A на зависящую от коэффициентов уравнения функцию.

Обоснуем актуальность задачи, решённой в третьей главе. Эволюционные уравнения (типа теплопроводности и типа Шрёдингера) в бесконечномерных пространствах[26,27] привлекают внимание исследователей примерно с 60-х годов XX века (в частности, см. работы О.Г. Смолянова, Е.Т. Шавгулидзе, А.Ю. Хренникова, С. Альбеверио). Существует множество статей, посвящённых этой тематике. Причина этого в том, что дифференциальные уравнения относительно функций бесконечномерного аргумента связаны с теорией поля и теорией струн, теорией случайных процессов, а также некоторыми задачами финансовой математики.[28] Приведём лишь несколько ссылок, важных для обоснования актуальности исследования, проведённого в третьей главе диссертации. Так, в частности, изучалось[29] уравнение Шрёдингера в гильбертовом пространстве. Уравнение содержит члены второго, первого и нулевого порядков, коэффициент при члене второго порядка постоянный. Решение задачи Коши даётся в виде формулы Фейнмана-Каца-Ито. Похожее уравнение Шрёдингера в гильбертовом пространстве удалось решить[30] с помощью интеграла по конечно-аддитивной мере и техники, выросшей из понятия черновского касания, см. работу [2] автора диссертации. В учебной литературе[31]

[25] Л.Аккарди, О.Г.Смолянов. Обобщённые лапласианы Леви и чезаровские средние// ДАН 424:5 (2009) 583-567

[26] В.И.Авербух, О.Г.Смолянов, С.В.Фомин. Обобщенные функции и дифференциальные уравнения в линейных пространствах. I. Дифференцируемые меры.// Тр. ММО, 24, Издательство Московского университета, М., 1971, 133–174

[27] В.И.Авербух, О.Г.Смолянов, С.В.Фомин. Обобщенные функции и дифференциальные уравнения в линейных пространствах. II. Дифференциальные операторы и их преобразования Фурье.// Тр. ММО, 27, Издательство Московского университета, М., 1972, 249–262

[28] В.А.Лапшин.Математические модели динамики срочной структуры процентных ставок, учитывающие качественные свойства рынка. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, факультет ВМК МГУ им. М.В.Ломоносова, Москва, 2010.

[29] Я.А. Бутко. Формула Фейнмана-Каца-Ито для бесконечномерного уравнения Шрёдингера со скалярным и векторным потенциалами// Нелинейная динамика, 2006, т. 2, №1, с. 75-87.

[30] В. Ж. Сакбаев. Усреднение случайных блужданий и меры на гильбертовом пространстве, инвариантные относительно сдвигов//ТМФ, 191:3 (2017), 473–502

[31] G. Da Prato, J. Zabczyk. Second Order Partial Differential Equations in Hilbert Spaces// London Mathematical Society Lecture Notes Series 293, 2004.

разбирается решение уравнения теплопроводности в гильбертовом пространстве, без членов первого и нулевого порядка, коэффициент перед старшей производной постоянный. Решение даётся в виде свёртки с гауссовой мерой (полностью аналогично конечномерному уравнению теплопроводности с постоянными коэффициентами), доказано существование разрешающей полугруппы операторов. В другом источнике[32] решение этого же уравнения даётся в виде формулы Фейнмана-Каца. Также было[33] рассмотрено параболическое уравнение с переменными коэффициентами (уравнение диффузии — его частный случай) в конечномерном пространстве. В предположении, что для задачи Коши существует сильно непрерывная разрешающая полугруппа, авторы доказывают формулы Фейнмана и Фейнмана-Каца, дающие это решение. Рассматривались[34,35,36] формулы Фейнмана и Фейнмана-Каца для решений задачи Коши для эволюционных уравнений в пространствах над полем p-адических чисел. Решение более простых, чем рассмотренное в третьей главе, уравнений типа теплопроводности было найдено с помощью интегрирования по специально построенной для этого конечно-аддитивной мере.[37,38] Таким образом, остаётся нерассмотренным следующий важный случай: пространство координат вещественное и бесконечномерное, правая часть содержит производные порядка два, один и ноль, коэффициенты перед всеми производными переменные. Работы [3,4] автора диссертации посвящены именно этому случаю, причём существование разрешающей полугруппы не предполагается, а доказывается, и также доказана непрерывная зависимость решения не только от начального условия, но и от коэффициентов уравнения.

Тем самым обоснована актуальность темы диссертации в целом, а также актуальность всех поставленных и решённых задач поглавно.

Цель работы — в рамках парадигмы школы О.Г. Смолянова продолжить

[32]Luiz C.L. Botelho. Non-linear diffusion in R^D and Hilbert Spases, a Cylindrical/Functional Integral Study// arXiv:1003.0048v1 [physics.gen-ph] 27 Feb 2010.

[33]Ya.A. Butko, M. Grothaus, O.G. Smolyanov. Lagrangian Feynman formulas for second-order parabolic equations in bounded and unbounded domains// Infinite Dimansional Analaysis, Quantum Probability and Related Topics, vol. 13, No. 3 (2010), 377-392.

[34]Н.Н. Шамаров. Представления эволюционных полугрупп интегралами по траекториям в вещественных и p-адических пространствах. Диссертация на соискание учёной степени доктора физико-математических наук// Москва, МГУ, 2010.

[35]О.Г. Смолянов, Н.Н. Шамаров, М. Кпекпасси. Формулы Фейнмана-Каца и Фейнмана для бесконечномерных уравнений с оператором Владимирова// ДАН, 2011, т. 438, №5, с. 609-614.

[36]О.Г. Смолянов, Н.Н. Шамаров. Гамильтоновы формулы Фейнмана для уравнений, содержащих оператор Владимирова с переменными коэффициентами// ДАН, 2011, т. 440, №5, с. 597-602.

[37]В. Ж. Сакбаев. Усреднение случайных блужданий и меры на гильбертовом пространстве, инвариантные относительно сдвигов// ТМФ, 191:3 (2017), 473–502

[38]В. Ж. Сакбаев. Случайные блуждания и меры на гильбертовом пространстве, инвариантные относительно сдвигов и поворотов // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз., 140 (2017), 88–118

исследование математических структур, связанных с теоремой Чернова, и применить их для получения представлений решений эволюционных уравнений с помощью формул Фейнмана и их аналогов. Ввести понятие функции, касательной по Чернову к оператору, и найти методы построения таких функций. Для параболического уравнения на вещественной прямой с переменными коэффициентами построить основанные на операторах сдвига черновские аппроксимации к решению задачи Коши, доказать равномерную сходимость аппроксимаций к решению и доказать, что решение может быть записано также как формула Фейнмана с интегральным ядром, содержащим обобщённые функции. Для параболического уравнения с переменными коэффициентами с пространственной координатой из бесконечномерного гильбертовова пространства доказать существование разрешающей полугруппы, найти дающую решение задачи Коши формулу Фейнмана, доказать непрерывную зависимость решения от коэффициентов уравнения.

Новизна. Все **выносимые на защиту** результаты диссертации являются новыми, получены автором самостоятельно и состоят в следующем:

1. Введено понятие функции, касательной по Чернову к оператору, и найдены методы построения таких функций.

2. Для параболического уравнения на вещественной прямой с переменными коэффициентами построены основанные на операторах сдвига черновские аппроксимации к решению задачи Коши, доказана равномерная сходимость аппроксимаций к решению. Доказано, что решение может быть записано как формула Фейнмана с интегральным ядром, содержащим обобщённые функции.

3. Для параболического уравнения с переменными коэффициентами с пространственной координатой из бесконечномерного гильбертова пространства доказано существование разрешающей полугруппы, найдена дающая решение задачи Коши формула Фейнмана, доказана непрерывная зависимость решения от коэффициентов уравнения.

Методы. В диссертации использованы методы бесконечномерного анализа и теории операторов, а также оригинальные авторские конструкции, относящиеся в целом к области функционального анализа.

Соответствие паспорту научной специальности. В диссертации изучаются функции, функционалы, операторы (в том числе дифференциальные), а также отображения бесконечномерных пространств, интегральные представления и преобразования, в силу чего диссертация соответствует паспорту специальности 01.01.01 «Вещественный, комплексный и функциональный анализ» по направлению «функциональный анализ».

Теоретическая и практическая ценность. Диссертация имеет теоретический характер. Её результаты могут быть использованы в функциональном анализе, теории операторных полугрупп, теории уравнений с частными производными, а также в вычислительной математике.

Апробация. Результаты диссертации докладывались на следующих научных семинарах, конференциях и заседаниях:

- Научный семинар «Бесконечномерный анализ и математическая физика» на механико-математическом факультете МГУ, руководители О.Г.Смолянов и Е.Т.Шавгулидзе (многократно, 2008-2017 г.г.)
- Международный молодежный научный форум «ЛОМОНОСОВ» (2011, 2012, 2013 гг., МГУ, Москва)
- Заседание Нижегородского математического общества (21 сентября 2012 г., Нижний Новгород)
- Третья международная конференция «Математическая физика и её приложения» (27 августа–01 сентября 2012 г., г. Самара)
- Научная конференция «Бесконечномерная динамика, диссипативные системы и аттракторы» (12–18 июля 2015 г., г. Нижний Новгород)
- Научный семинар «Топологические методы в динамике» кафедры фундаментальной математики НИУ ВШЭ (ННФ) и лаборатории ТАПРАДЕСС (27.01.2017, 10.02.2017)
- XIV международная научная конференция «Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования» (с. Цей, 3-8 июля 2017 г.)

Публикации. Основные результаты диссертаци опубликованы в 9 печатных работах автора. Из них 4 статьи [1-4] в рецензируемых научных журналах RSCI, Web of Science, SCOPUS и 5 тезисов докладов на научных конференциях [5-9]. Работ, написанных в соавторстве, нет.

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из введения, трёх разбитых на параграфы глав, заключения и списка литературы. Объём текста диссертации составляет 82 страницы, список литературы содержит 76 наименований. Чертежей, таблиц и рисунков нет.

Краткое содержание диссертации

Введние

Во введении обосновывается актуальность темы диссертации, освещается место проведённого автором исследования в контексте предметной области, даётся общая характеристика работы.

Первая глава

Предполагается, что X — бесконечное множество, и $\mathcal{F}$ — банахово пространство числовых функций на X, причём в $\mathcal{F}$ действует замкнутый линейный оператор $L\colon Dom(L) \to \mathcal{F}$ с плотной в $\mathcal{F}$ областью определения $Dom(L) \subset \mathcal{F}$. Рассматривается задача Коши для эволюционного уравнения

$$\begin{cases} u'_t(t,x) = Lu(t,x), \\ u(0,x) = u_0(x), \end{cases} \tag{1}$$

где $u_0 \in \mathcal{F}$, и $u(t,\cdot) \in \mathcal{F}$ для всех $t \geq 0$. Как известно[39], в случае существования C_0-полугруппы $\left(e^{tL}\right)_{t\geq 0}$ с генератором $(L, Dom(L))$ решение задачи Коши (1) существует и даётся равенством $u(t,x) = (e^{tL}u_0)(x)$ для $t \geq 0$ и $x \in X$. Если $u_0 \in Dom(L)$, то $u(t,\cdot) \in Dom(L)$ для всех $t \geq 0$ и решение является классическим, а для произвольного $u_0 \in \mathcal{F}$ решение задачи Коши существует лишь как решение соотвествующего интегрального уравнения. Условиями касания по Чернову (Chernoff tangency, CT) будем называть следующее:

(CT0). Пусть $\mathcal{F}$ — банахово пространство, и $\mathscr{L}(\mathcal{F})$ — пространство всех линейных ограниченных операторов в $\mathcal{F}$. Пусть дано отображение $G\colon [0,+\infty) \to \mathscr{L}(\mathcal{F})$, или, иначе говоря, семейство линейных ограниченных операторов $(G(t))_{t\geq 0}$. Пусть замкнутый линейный оператор $L\colon Dom(L) \to \mathcal{F}$ имеет плотную в $\mathcal{F}$ область определения $Dom(L) \subset \mathcal{F}$.

(CT1). Семейство G сильно непрерывно (=непрерывно в сильной операторной топологии пространства $\mathscr{L}(\mathcal{F})$), т. е. отображение $t \longmapsto G(t)f \in \mathcal{F}$ непрерывно на $[0,+\infty)$ для каждого $f \in \mathcal{F}$;

(CT2). $G(0) = I$, т. е. $G(0)f = f$ для каждого $f \in \mathcal{F}$;

(CT3). Существует такое плотное в $\mathcal{F}$ линейное подпространство $\mathcal{D} \subset \mathcal{F}$, что при всех $f \in \mathcal{D}$ существует предел $\lim_{t\to 0}(G(t)f - f)/t$, значение которого обозначим символом $G'(0)f$;

(CT4). Замыкание оператора $(G'(0), \mathcal{D})$ существует и равно $(L, Dom(L))$.

Определение 1. Будем говорить, что G *касается по Чернову* оператора L, если выполняются условия касания по Чернову (CT0)-(CT4).

[39] K.-J. Engel, R. Nagel. One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations// Springer, 2000.

Классическую теорему Чернова можно сформулировать теперь следующим образом, отделяя в её условиях (E)xistence condition и (N)orm growth condition от (CT).

Теорема 2. (*теорема Чернова в новой эквивалентной формулировке*) Пусть $\mathcal{F}$ — банахово пространство. Пусть дано отображение $G\colon [0, +\infty) \to \mathscr{L}(\mathcal{F})$ и замкнутый линейный оператор $L\colon Dom(L) \to \mathcal{F}$ с областью определния $Dom(L) \subset \mathcal{F}$. Пусть выполнены следующие условия:

(E). Существует C_0-полугруппа $(e^{tL})_{t\geq 0}$ с генератором $(L, Dom(L))$;

(CT). Отображение G касается по Чернову оператора L;

(N). Существует такое число $\omega \in \mathbb{R}$, что $\|G(t)\| \leq e^{\omega t}$ при всех $t \geq 0$.

Тогда для каждых $f \in \mathcal{F}$ и $T > 0$ верно, что

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[0,T]} \left\| \left(G\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n f - e^{tL} f \right\| = 0. \tag{2}$$

Определение 3. Если G касается по Чернову оператора L, то выражение $\lim_{n\to\infty} G(t/n)^n u_0$ будем называть *формальным решением задачи Коши (1) в смысле Чернова*. Если же, сверх того, для G выполнено равенство (2), то будем говорить, что G является *функцией Чернова* для оператора L, или *эквивалентна по Чернову* полугруппе $\left(e^{tL}\right)_{t\geq 0}$, а стоящее под знаком предела выражение $G(t/n)^n u_0$ будем называть *аппроксимацией решения задачи Коши (1) в смысле Чернова* или *черновской аппроксимацией*.

Теорема 4. Пусть $\mathcal{F}$ — банахово пространство, и функции G_1 и G_2 со значениями в $\mathscr{L}(\mathcal{F})$ касаются по Чернову действующих в $\mathcal{F}$ операторов L_1 и L_2 соответственно (при этом в условии (CT3) фигурируют плотные подпространства $\mathcal{D}_1$ и $\mathcal{D}_2$ соответственно). Тогда:

1. Обозначим символом I тождественный оператор в $\mathcal{F}$. Если оператор $L = L_1 + L_2$ замкнут и имеет плотную в $\mathcal{F}$ существенную область определения $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$, то функция $G(t) = G_1(t) + G_2(t) - I$ касается по Чернову оператора $L_1 + L_2$.

2. Пусть оператор $L = L_1 L_2$ замкнут и имеет плотную в $\mathcal{F}$ существенную область определения $\mathcal{D} \subset \{f\colon f \in \mathcal{D}_2, L_2 f \in \mathcal{D}_1\}$. Пусть G_2 имеет на $\mathcal{D}$ вторую производную в нуле, т.е. существует такой линейный оператор $G_2''(0)\colon \mathcal{D} \to \mathcal{F}$, что для каждого $f \in \mathcal{D}$ при достаточно малых $\varepsilon > 0$ верно равенство $G_2(\varepsilon)f = f + \varepsilon L_2 f + \frac{1}{2}\varepsilon^2 G_2''(0) f + \varepsilon^2 a(\varepsilon, f)$, где $a(\varepsilon, f) = o(1)$ при $\varepsilon \to 0$. Тогда функция $G(t) = (G_1(\sqrt{t}) - I)(G_2(\sqrt{t}) - I) + I$ касается по Чернову оператора $L_1 L_2$.

Замечание 5. Пункт 1 теоремы 4 позволяет строить формальные (здесь и далее — в смысле Чернова) решения для уравнения $u_t' = L_1 u + L_2 u$, если известны функции G_1 и G_2 (иными словами, если известны формальные решения уравнений $u_t' = L_1u$ и $u_t' = L_2u$). Аналогично, пункт 2 теоремы 4 предлагает способ построения формальных решений и для уравнения $u_t' = L_1L_2u$. Таким образом, теорема 4 даёт метод построения формального решения уравнения $u_t' = Lu$ в случае, когда L — произвольный дифференциальный оператор с коэффициентами, не зависящими от времени, поскольку он получается путём конечного числа сложений и произведений операторов дифференцирования $(L_2f)(x) = f'(x)$ и умножения на функцию $(L_1f)(x) = q(x)f(x)$, а функции Чернова этих операторов известны: сдвиг на t для L_2, т.е. $(G_2(t)f)(x) = f(x+t)$, и умножение на tq для L_1, т.е. $(G_1(t)f)(x) = tf(x)q(x)$. При этом в зависимости от задачи есть возможность записать эти функции по-разному: как следует из условия (CT3), функции, касательные по Чернову к одному оператору, на плотном в $\mathcal{F}$ подпространстве отличаются друг от друга лишь членами порядка $o(t)$.

Вторая глава

Рассмотрим $x \in \mathbb{R}^1$, $t \geq 0$ и поставим задачу Коши для уравнения теплопроводности

$$\begin{cases} u_t'(t,x) = (a(x))^2 u_{xx}''(t,x) + b(x)u_x'(t,x) + c(x)u(t,x) = Hu(t,x), \\ u(0,x) = u_0(x). \end{cases} \tag{3}$$

Коэффициенты a, b, c, u_0 выше это ограниченные, равномерно непрерывные функции $\mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$. Глава посвящена выводу явной формулы, выражающей решение задачи (3) через a, b, c, u_0 в предположении того, что оператор H является генератором C_0-полугруппы $\left(e^{tH}\right)_{t\geq 0}$.

Обозначим множество всех (определённых на вещественной прямой и принимающих вещественные значения) ограниченных непрерывных функций символом $C_b(\mathbb{R})$. Множество тех из них, что равномерно непрерывны, обозначим символом $UC_b(\mathbb{R})$, а тех, что имеют ограниченных производные всех порядков, символом $C_b^\infty(\mathbb{R})$. При этом оказывается, что $C_b^\infty(\mathbb{R}) \subset UC_b(\mathbb{R}) \subset C_b(\mathbb{R})$, и по отношению к равномерной (чебышёвской) норме $\|f\| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$ первое вложение плотно, а два последних пространства банаховы. Для каждых $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$, $f \in C_b(\mathbb{R})$ положим

$$(S(t)f)(x) = \frac{1}{4}f\left(x + 2a(x)\sqrt{t}\right) + \frac{1}{4}f\left(x - 2a(x)\sqrt{t}\right) + \frac{1}{2}f(x+2b(x)t) + tc(x)f(x). \tag{4}$$

Теорема 6. Пусть функции a, b, c лежат в пространстве $UC_b(\mathbb{R})$, наделённом нормой $\|f\| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$. Предположим, что оператор H задан равенством (3) на своей области определения $C_b^\infty(\mathbb{R}) \subset UC_b(\mathbb{R})$, и замыкание этого оператора: а) существует, б) является генератором C_0-полугруппы $(e^{tH})_{t\geq 0}$ в $UC_b(\mathbb{R})$.

Тогда для каждого $u_0 \in UC_b(\mathbb{R})$ существует ограниченное (и равномерное непрерывное по $x \in \mathbb{R}$ при каждом $t \geq 0$) решение u задачи Коши (3), оно зависит от u_0 непрерывно и равномерно по $x \in \mathbb{R}$ для каждого $t \geq 0$. Для каждого $x \in \mathbb{R}$ и каждого $t \geq 0$ это решение задаётся формулой

$$u(t,x) = \left(e^{tH}u_0\right)(x) = \lim_{n\to\infty}\left(\Big(S(t/n)\Big)^n u_0\right)(x), \tag{5}$$

где $S(t/n)$ получается заменой t на t/n в равенстве (4), а n-я степень означает композицию n экземпляров линейного ограниченного оператора $S(t/n)$. Предел (5) при каждом фиксированном $t > 0$ берётся в пространстве $UC_b(\mathbb{R})$ и существует равномерно по $t \in [0, t_0]$ для каждого $t_0 > 0$.

Замечание 7. Формула (5) построена не на основе интегрального оператора, а на основе оператора сдвига, поэтому в такой записи она не является формулой Фейнмана. Однако, равенство (5) можно переписать в терминах обобщённых функций на основе того, что для δ-функции при каждом $w \in \mathbb{R}$ справедливо соотношение $f(w) = \int_{\mathbb{R}} \delta(y-w)f(y)dy$. После замены переменной $y = x + z$ равенство (4) принимает вид

$$(S(t)f)(x) = \int_{\mathbb{R}} \Phi(z,x,t)f(x+z)dz, \text{ где}$$

$$\Phi(z,x,t) = \frac{1}{4}\delta\left(z - 2a(x)\sqrt{t}\right) + \frac{1}{4}\delta\left(z + 2a(x)\sqrt{t}\right) + \frac{1}{2}\delta\big(z - 2b(x)t\big) + tc(x)\delta(z).$$

Тогда (5) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} u(t,x) = \lim_{n\to\infty}(S(t/n)^n f)(x) = \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}\Phi(z_1,x,t/n)\int_{\mathbb{R}}\Phi(z_2,x+z_1,t/n) \\ \int_{\mathbb{R}}\Phi(z_3,x+z_1+z_2,t/n)\dots\int_{\mathbb{R}}\Phi(z_n,x+z_1+\dots+z_{n-1},t/n) \\ u_0(x+z_1+\dots+z_n)dz_n\dots dz_1. \end{aligned}$$

Это равенство является формулой Фейнмана (т.е. представлением функции u в виде предела кратного интеграла, кратность которого стремится к бесконечности), однако под знаком интеграла стоят не гауссовские экспоненты, а дельта-функции.

Третья глава

Символом H обозначим вещественное бесконечномерное сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Линейный, ограниченный, самосопряжённый, положительный, невырожденный оператор $A\colon H \to H$ определён всюду на H и имеет конечный след.

Символом $D = C^{\infty}_{b,c}(H,\mathbb{R})$ обозначим пространство всех таких непрерывных, ограниченных, цилиндрических функций $H \to \mathbb{R}$, что их производные Фреше любого натурального порядка существуют в каждой точке пространства H, ограниченны и непрерывны.

Символ $C_b(H,\mathbb{R})$ обозначает вещественное банахово пространство всех ограниченных непрерывных функций $H \to \mathbb{R}$, наделённое равномерной нормой $\|f\| = \sup_{x\in H} |f(x)|$.

Пусть $F = \overline{C^{\infty}_{b,c}(H,\mathbb{R})}$ это замыкание пространства D в $C_b(H,\mathbb{R})$. Ясно, что F с нормой $\|f\| = \sup_{x\in H} |f(x)|$ является банаховым пространством, поскольку оно является замкнутым линейным подпространством банахова пространства $C_b(H,\mathbb{R})$. Функция f принадлежит классу F тогда и только тогда, когда существует такая последовательность функций $(f_j) \subset D$, $\lim_{j\to\infty} f_j = f$, т.е. $\lim_{j\to\infty} \sup_{x\in H} |f(x) - f_j(x)| = 0$.

Символ $C_b(H,H)$ обозначает банахово пространство всех ограниченных непрерывных функций $B\colon H \to H$, наделённое нормой $\|B\| = \sup_{x\in H} \|B(x)\|$.

Мы будем использовать следующее обозначение:

$D_H = \{B\colon H \to H \big| \exists N \in \mathbb{N}, b_k \in H, B_k \in D : B(x) = B_1(x)b_1 + \cdots + B_N(x)b_N\}$.

Оператор $L\colon D \to F$ зададим равенством

$$(L\varphi)(x) = g(x)\mathrm{tr}A\varphi''(x) + \langle \varphi'(x), AB(x)\rangle + C(x)\varphi(x).$$

Пусть F_H это замыкание D_H в $C_b(H,H)$. Здесь и далее пространства D и F наделяются равномерной нормой, индуцированной из $C_b(H,\mathbb{R})$. Пусть $(\overline{L}, D_1)$ это замыкание (L, D) в F. То есть $D_1 = \{f \in F \big| \exists (f_j) \subset D : \lim_{j\to\infty} f_j = f, \exists \lim_{j\to\infty} Lf_j\}$, и для каждой функции $f \in D_1$ по определению $\overline{L}f = \lim_{j\to\infty} Lf_j$.

Если $x \in H$, и линейный оператор $R\colon H \to H$ невырожденный, ядерный и положительный, то символ μ^x_R обозначает гауссовскую вероятностную меру на H с математическим ожиданием x и корреляционным оператором R, т.е. такую единственную сигма-аддитивную меру на борелевской сигма-алгебре в H, что равенство $\int_H e^{i\langle z,y\rangle}\mu^x_R(dy) = \exp\left(i\langle z,x\rangle - \frac{1}{2}\langle Rz,z\rangle\right)$ выполняется при каждом $z \in H$. Для краткости будем писать μ_R вместо μ^0_R.

Ставится задача о нахождении такой функции $u\colon [0,+\infty) \times H \to \mathbb{R}$, что:

$$\begin{cases} u'_t(t,x) = Lu(x,t); & t \geq 0, x \in H, \\ u(0,x) = u_0(x); & x \in H. \end{cases} \tag{6}$$

Главный результат главы выражется следующей теоремой.

Теорема 8. Пусть $g \in F, C \in F, B \in F_H$. Пусть существует такое число $g_0 > 0$, что для всех $x \in H$ выполнено $g(x) \geq g_0$ и $C(x) \leq 0$. Поскольку $C \in$

F, существует последовательность $(C_j) \subset D$, сходящаяся к C равномерно; потребуем дополнительно, что она может быть выбрана так, что $C_j(x) \leq 0$ для всех $j \in \mathbb{N}$ и всех $x \in H$. Тогда:

1. Если существует C_0-полугруппа с генератором $\overline{L}$, то для каждой функции $u_0 \in D_1$ существует сильное решение (strong solution) u задачи (6), для каждой функции $u_0 \in F$ существует mild-решение (mild solution) u задачи (6). Каждое из эти решений единственно в классе $C([0,+\infty),F)$, непрерывно зависит от u_0 и задаётся формулой $u(t,x) = \lim_{n\to\infty}\left(\left(S_{\frac{t}{n}}\right)^n u_0\right)(x)$, где предел существует равномерно по $x \in H$ и равномерно по $t \in [0,t_0]$ для каждого $t_0 > 0$. Оператор S при этом задаётся равенством

$$(S_t\varphi)(x) := e^{tC(x)-t\frac{\langle AB(x),B(x)\rangle}{g(x)}} \int_H \varphi(x+y)e^{\left\langle \frac{1}{g(x)}B(x),y\right\rangle}\mu_{2tg(x)A}(dy).$$

2. Если $B = 0$, то C_0-полугруппа с генератором $\overline{L}$ существует. Формула $u(t,x) = \lim_{n\to\infty}\left(\left(S_{\frac{t}{n}}\right)^n u_0\right)(x)$ в случае $B = 0$ приобретает следующий вид:

$$u(t,x) = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\int_H\int_H \ldots \int_H\int_H}_{n} e^{\frac{t}{n}\left(C(x)+\sum_{k=1}^{n-1}C(y_k)\right)}u_0(y_1)$$
$$\mu^{y_2}_{\frac{2t}{n}g(y_2)A}(dy_1)\mu^{y_3}_{\frac{2t}{n}g(y_3)A}(dy_2)\ldots\mu^{y_n}_{\frac{2t}{n}g(y_n)A}(dy_{n-1})\mu^{x}_{\frac{2t}{n}g(x)A}(dy_n). \quad (7)$$

В этом случае при всех $t > 0$ верно, что $\sup_{x\in H}|u(t,x)| \leq \sup_{x\in H}|u_0(x)|$.

3. Пусть $B = 0$, а $g_j \in F$, $B_j \in F_H$ и $C_j \in F$ заданы для всех $j \in \mathbb{N}$. Пусть $B_j = 0$ для всех $j \in \mathbb{N}$. Пусть существует такое число $\varepsilon_0 > 0$, что $g_j(x) \geq \varepsilon_0$ и $C_j(x) \leq 0$ для всех $j \in \mathbb{N}$ и всех $x \in H$, причём каждая из функций C_j является равномерным пределом неотрицательных функций, лежащих в D. Используем символ L_j для обозначения оператора L, построенного по функциям g_j, B_j и C_j. Символ L_0 используем для обозначения оператора L, построенного по функциям g, B и C. Предположим, что имеют место равномерные по $x \in H$ сходимости $g_j(x) \to g(x)$ и $C_j(x) \to C(x)$. Обозначим символом u_j решение задачи (6) для оператора L_j. Для решения задачи (6) с оператором L_0 используем символ u. Тогда $u_j(t,x)$ сходится к $u(t,x)$ при $j \to \infty$ равномерно по $x \in H$ и равномерно по $t \in [0,t_0]$ для каждого $t_0 > 0$.

Заключение

В заключении диссертации дан обзор проведённого исследования. Кратко этот обзор можно изложить так: в диссертации рассмотрены задачи теории операторных полугрупп в применении к эволюционным уравнениям, введено понятие касания по Чернову и начато построение исчисление функций Чернова, с помощью теоремы Чернова и формул Фейнмана получены решения параболических уравнений на прямой и в гильбертовом пространстве.

Также в заключении указаны перспективы и рекомендации по дальнейшей разработке темы, кратко их можно изложить так: рекомендуется построить функции Чернова для дифференциальных операторов порядка выше второго (с переменными коэффициентами) в различных пространствах и изучить свойства соответствующих черновских аппроксимаций.

Благодарности

Автор выражает благодарность своему научному руководителю профессору Олегу Георгиевичу Смолянову за всестороннюю поддержку и постановку задачи, решённой в третьей главе диссертации. Автор также признателен за полезные ссылки и обсуждения, а также за вовремя сказанные добрые слова: профессорам д.ф.-м.н. В.И.Богачеву, к.ф.-м.н. Д.В.Тураеву, д.ф.-м.н. Е.Т.Шавгулидзе, д.ф.-м.н. Т.А.Шапошниковой, научному сотруднику к.ф.-м.н. Е.И.Зеленову и участникам научного семинара «Бесконечномерный анализ и математическая физика» под руководством профессоров О.Г.Смолянова и Е.Т.Шавгулидзе.

Диссертационное исследование И.Д.Ремизова поддержано грантом РНФ 14-41-00044 в ННГУ имени Н. И. Лобачевского.

Публикации автора по теме диссертации

Статьи в научных журналах RSCI, Web of Science, SCOPUS:

[1] Ремизов И.Д. Фейнмановские и квазифейнмановские формулы для эволюционных уравнений // Доклады Академии наук. – 2017. – Т. 476:1. – С. 17-21; Remizov I.D. Feynman and Quasi-Feynman Formulas for Evolution Equations // Doklady Mathematics. – 2017. – Vol. 96:2. – pp. 433-437.

[2] Remizov Ivan D. Quasi-Feynman formulas – a method of obtaining the evolution operator for the Schrödinger equation // Journal of Functional Analysis. – 2016. – Vol. 270:12. – pp. 4540-4557.

[3] Remizov I.D. Solution to a parabolic differential equation in Hilbert space via Feynman formula I // Modeling and Analysis of Information Systems. – 2015. – Vol. 22:3. – pp. 337-355.

[4] Remizov I.D. Solution of a Cauchy problem for a diffusion equation in a Hilbert space by a Feynman formula // Russian Journal of Mathematical Physics. – 2012. – Vol.19:3. – pp. 360-372.

Тезисы докладов на научных конференциях:

[5] Ремизов И.Д. Формулы Фейнмана для эволюционных уравнений относительно функций бесконечномерного аргумента // Сборник тезисов докладов на международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2011». М.: МГУ, 2011. – 2 с.

[6] Ремизов И.Д. Решение задачи Коши для уравнения теплопроводности в гильбертовом пространстве с помощью формулы Фейнмана // Сборник тезисов докладов на международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2012». М.: МГУ, 2012. – 2 с.

[7] Ремизов И.Д. Решение задачи Коши для уравнения диффузии в гильбертовом пространстве с помощью формулы Фейнмана // Сборник тезисов докладов III международной конференции «Математическая физика и её приложения». Самара, Издательство самарского государственного технического университета, 2012. – С. 251-252.

[8] Ремизов И.Д. Представление решения параболического дифференциального уравнения в гильбертовом пространстве в виде формулы Фейнмана // Сборник тезисов докладов международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2013». М.:МГУ, 2011. – 2 с

[9] Ремизов И.Д. Исчисление функций Чернова и задача Коши для эволюционных уравнений // Сборник тезисов докладов на XIV международной научной конференции «Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования (с. Цей, 3-8 июля 2017 г.)». Владикавказ, Издательство владикавказского научного центра РАН, 2017. – С. 121-122.

Отпечатано в центре оперативной полиграфии «Постер-МГУ».
Тираж 100 экз.