Баран Инна Викторовна. Симметрические субдифференциалы и их приложения: диссертация ... кандидата Физико-математических наук: 01.01.01 / Баран Инна Викторовна;[Место защиты: ФГАОУ ВО «Южный федеральный университет»], 2018.- 129 с.

**Введение к работе**

**Актуальность работы.** Диссертация посвящена построению основ теории симметрических компактных субдифференциалов отображений в банаховых пространствах. Рассмотрены приложения построенной теории к гармоническому анализу теории вероятностей и к теории экстремальных задач.

Симметрические локальные характеристики отображений, с самого их возникновения, занимали особую позицию в вещественном анализе, связанную, в основном, с обобщенным суммированием рядов Фурье. На протяжении многих лет с определением, приложениями и обобщением симметрических производных были связаны имена ряда выдающихся математиков — Б. Риман, Г. Шварц, Г. Кантор, Ш.-Ж. Валле-Пуссен, С. Сакс. Обобщением симметрической производной является производная Валле-Пуссена (1908 г.). Основные свойства обобщенных симметрических производных высших порядков были введены и исследованы в работах Р. Джеймса (1954 г.). Упомянутые работы концентрировались вокруг методов обобщенного суммирования тригонометрических и других рядов.

На протяжении последних десятилетий конечномерный симметрический анализ регулярно привлекает к себе внимание математиков из различных стран. Отметим, в частности, работы C. E. Aull (1967), B. S. Thomson (1994), P. Sahoo, T. Riedel (1998), S. O. Hockett, D. Bock (2005), P. D. Lax, M. S. Terrell (2014), A. M. Brito da Cruz, N. Martins, D. F. Torres (2013), P. R. Mercer (2014) и другие.

Кроме того, в дискретном анализе, как на протяжении XX века, так и в настоящий период получили широкое применение симметрические, или так называемые центральные, разностные отношения (central differences) как первого так и высших порядков.

Однако симметрическое дифференциальное исчисление, в отличие от классического, не получило обобщения на бесконечномерный случай — аналог исчисления Гато-Адамара-Фреше для симметрического случая не был построен. Как представляется, одной из причин этого служит очевидная невозможность обобщить классические условия локального экстремума (начиная с леммы Ферма) на симметрические производные функционалов.

Такая тенденция сохранилась и после появления, в связи с задачами негладкой оптимизации, субдифференциального исчисления. Начиная с классических работ Ж. Моро, Р. Рокафеллара, Ф. Кларка и других авторов в 70-х гг. прошлого века, различные типы субдифференциалов вводились и применялись многими авторами. Отметим, в частности, работы таких отечественных математиков и математиков отечественного происхождения, как В. М. Тихомиров, А. Д. Иоффе, Б. Н. Пшеничный, А. Г. Кусраев, С. С. Кутателадзе, В. Ф. Демьянов, А. М. Рубинов, В. Н. Малоземов, М. Л. Гольдман, Е. С. Половинкин, М. В. Балашов, Б. Ш. Мордухович, А. В. Арутюнов и другие.

В частности, в последнее десятилетие в работах И. В. Орлова и его учеников Ф. С. Стонякина, З. И. Халиловой была построена и нашла значимые применения теория так называемых компактных субдифференциалов, основным моментом которой является использование для отображений в банаховых пространствах в качестве

субдифференциалов многозначных сублинейных и полисублинейных операторов с компактными выпуклыми значениями.

Как общий знаменатель работ по негладкой оптимизации за этот период, отметим обобщение базисных конструкций анализа Гато-Адамара-Фреше — переход от линейных пространств — к конусам, от линейных операторов — к сублинейным, от однозначных локальных характеристик — к многозначным.

Отметим также серьезные трудности в применении субдифференциальных методов высших порядков. Эти трудности связаны, прежде всего, со сложными коническими операторными структурами, возникающими при индуктивном определении субдифференциалов высших порядков.

В связи с этим, наше внимание было обращено на то обстоятельство, что классические симметрические производные высших порядков не требуют индуктивного определения и определяются через «однократный» предел. Это позволяет в данном случае переход от дифференциалов к субдифференциалам также осуществлять для любого порядка по единой схеме, минуя «встроенные» проблемы индуктивного подхода.

В прикладном плане целесообразность построения симметрической версии субдифференциального исчисления мы связываем со следующими возможностями приложений, которые реализуются в данной работе. Первая из них связана с заменой в известном методе суммирования Римана второй симметрической производной от функции Римана на второй симметрический субдифференциал, с соответствующим многозначным результатом обобщенного суммирования.

Вторая возможность связана с применением симметрических характеристик в экстремальных задачах «на втором этапе»: для уже найденной точки экстремума определить оптимальное (в некотором смысле) линейное направление движения к точке экстремума. В этой связи следует упомянуть о двух известных подходах в негладком случае. Первый из них (метод Демьянова-Рубинова) известен также как «метод наискорейшего спуска» (по радиусу) к точке минимума, и в вычислительном плане близок к градиентному методу поиска минимума. Второй подход, известный как «метод оврагов Гельфанда», связан с переходом через точку экстремума по диаметру.

В нашей работе понятие оптимальности направления мы связываем с локальными аналогами известных в теории вероятностей понятий асимметрии и эксцесса. Эти характеристики оказываются тесно связанными с симметрическими дифференциалами либо, при соответствующем обобщении, с субдифференциалами, что позволяет применить для исследования подобных экстремальных задач симметрический анализ.

В связи с вышеизложенным диссертационная работа содержит следующие основные блоки:

1. Построение основ симметрического дифференциального исчисления в банаховых  
пространствах (как необходимой базы для следующего этапа работы).

1. Построение основ симметрического субдифференциального исчисления в банаховых пространствах.
2. Приложения в гармоническом анализе, в теории вероятностей и теории экстремальных задач.

При реализации этого плана мы исходили из симметрического аналога компактного субдифференциала, однако, ввиду неиндуктивности симметрического подхода, дальнейшая конструкция симметрического исчисления существенно отличается от

«точного» подхода, рассмотренного в упомянутых выше работах И. В. Орлова, Ф. С. Стонякина, З. И. Халиловой.

**Цель и задачи работы.**

*Объектом исследования* в работе являются симметрические дифференциалы и симметрические субдифференциалы первого и высших порядков в скалярном и векторном случае.

*Предмет исследования.* Основные аналитические свойства симметрических дифференциалов Фреше, основные аналитические свойства симметрически субдиффе-ренцируемых отображений.

*Целью исследования* является построение развитой теории симметрических дифференциалов и субдифференциалов первого и высшего порядков с приложениями к гармоническому анализу и экстремальным задачам.

Для реализации поставленной цели в диссертационной работе были сформулированы следующие *задачи:*

1. Доказать ряд новых свойств классических симметрических производных, вплоть  
до теоремы о среднем и формулы Тейлора.

1. Построить основы теории симметрических дифференциалов в банаховых пространствах.
2. Построить основы теории симметрических субдифференциалов первого и высших порядков в банаховых пространствах.
3. Получить оценки симметрических вариаций и субвариаций первого и высших порядков для одномерного вариационного функционала.
4. Обобщить классический метод Римана суммирования рядов Фурье на случай симметрических субдифференциалов.

6. Рассмотреть применение симметрических характеристик к негладким  
распределениям вероятностей случайных величин.

7. Сформулировать и рассмотреть на примерах общую экстремальную задачу  
поиска оптимальных направлений, минимизирующих локальную асимметрию и  
локальный эксцесс функционала.

*Методы исследования.* В диссертационной работе используются методы выпуклого и негладкого анализа, теории вероятностей, вариационного исчисления, теории многозначных операторов, бесконечномерного дифференциального исчисления, функционального анализа, гармонического анализа.

Методы дифференциального исчисления и негладкого анализа применяются при построении развитого исчисления симметрических субдифференциалов отображений в банаховых пространствах.

Методы гармонического анализа используются при обобщении классического метода Римана-Шварца суммирования рядов Фурье.

Методы вариационного исчисления и теории вероятностей применяются при вычислении симметрических вариаций и субвариаций вариационных функционалов, а также при поиске оптимального направления, минимизирующего (по модулю) локальную асимметрию, либо локальный эксцесс в негладкой точке экстремума.

**Научная новизна.** В диссертационной работе все результаты, выносимые на защиту, являются новыми. Построена развитая теория симметрических

дифференциалов Фреше и симметрических субдифференциалов Фреше первого и высших порядков, включающая, в частности теорему о среднем и формулу Тейлора. Найдены простые достаточные условия симметрической субдифференцируемости. Рассмотрены некоторые приложения к рядам Фурье и вариационным функционалам.

**Теоретическая и практическая ценность.** В диссертационной работе все результаты относятся к области фундаментальных исследований и имеют в основном теоретическое значение. Полученные результаты развивают теорию симметрических дифференциалов и субдифференциалов для случая скалярного и векторного аргументов, позволяют исследовать обобщение классического метода Римана-Шварца суммирования рядов Фурье и задачу минимизации локальной асимметрии и локального эксцесса в негладкой точке экстремума.

Возможно применение результатов работы в проблематике современной негладкой оптимизации, а также в негладких вариационных задачах.

**Апробация результатов диссертации.** Результаты диссертации докладывались на различных конференциях и семинарах: на семинаре кафедры математического анализа Института математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича Южного федерального университета, 20 октября 2016 г., 14 июня 2017 г., г. Ростов-на-Дону; на семинаре по конструктивному негладкому анализу и недифференцируемой оптимизации «CNSA & NDO» Санкт-Петербургского Государственного университета, 30 ноября 2017 г., г. Санкт-Петербург; на I-II научных конференциях профессорско-преподавательского состава, аспирантов, студентов и молодых ученых «Дни науки Крымского федерального университета им. В. И. Вернадского» (Симферополь, 2015-2016 гг.); на кафедральном семинаре кафедры алгебры и функционального анализа Таврической академии КФУ им. В. И. Вернадского; на международных научных конференциях VIII международной научной конференции для молодых ученых «Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информационных технологиях» (Харьков, Украина, 17-28 апреля, 2013); International Conference Analysis and mathematical physics (Kharkiv, Ukraine, 24-28 June, 2013); «Крымская международная математическая конференция» (КММК-2013), 22 сентября - 4 октября 2013 г., г. Судак; «XXV Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам», г. Судак, 21 сентября - 30 сентября 2014 г.; «Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения-V», 26 апреля - 1 мая 2015 г., г. Ростов-на-Дону; «Современные проблемы теории функций и их приложения», 27 января - 3 февраля 2016 г., г. Саратов; «Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения-VI», 24 - 29 апреля 2016 г., г. Ростов-на-Дону; «Конструктивный негладкий анализ и смежные вопросы», посвященной памяти профессора В. Ф. Демьянова, 22 - 27 мая 2017 г., г. Санкт-Петербург.

**Публикации и личный вклад автора.** По теме диссертации опубликовано пятнадцать работ [1] - [15]: 6 научных статей ([1] - [6]), из которых [1], [2], [3], [4], [6] изданы в журналах, которые входят в международные метрические базы, рекомендованные ВАК Минобрнауки РФ: работа [1] - в журнале, рекомендованном ВАК Украины; [4] и [6] индексированы в Scopus; [2] и [4] индексирована в zbMath; 9 тезисов докладов научных конференций [7] - [15].

Из совместных работ в диссертационную работу вошли результаты, полученные автором самостоятельно. Работы [4], [6] вышли в соавторстве с научным руководителем И. В. Орловым. В работах [4], [6] профессору И. В. Орлову принадлежит общий план исследования и постановка задачи, полученные результаты принадлежат соискателю.

**Структура и объем диссертации.** Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, разбитых на разделы, выводов и списка цитированной литературы. Объем работы составляет 129 страниц, библиография - 190 источников.