ФГБУН Математический институт им. В.А. Стеклова
Российской академии наук

На правах рукописи
УДК 517.5

Зеленов Евгений Игоревич

Некоторые вопросы
p-адической математической физики

01.01.03 — математическая физика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико–математических наук

Москва 2018

Работа выполнена в отделе математической физики ФГБУН Математический институт им. В.А.Стеклова Российской академии наук.

Официальные оппоненты:

Аветисов Владик Аванесович,
доктор физико–математических наук,
заведующий лабораторией теории сложных систем отдела строения вещества ФГБУН «Институт химической физики им. Н.Н. Семенова РАН»
(специальность – 01.04.17)
E-mail: avetisov@chph.ras.ru

Миссаров Мукадас Дмухтасибович,
доктор физико–математических наук,
заведующий кафедрой анализа данных и исследования операций Института вычислительной математики и информационных технологий ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет»
(специальность – 01.01.03)
E-mail: Moukadas.Missarov@kpfu.ru

Сакбаев Всеволод Жанович,
доктор физико–математических наук,
профессор кафедры высшей математики ФГАОУ ВО «Московский физико-технический институт (государственный университет)»
(специальность – 01.01.02)
E-mail: fumi2003@mail.ru

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова»

Защита диссертации состоится «15» ноября 2018 г. в 15:00 на заседании диссертационного совета Д 002.022.02 при ФГБУН Математический институт им. В.А.Стеклова РАН по адресу: 119991, Москва, ГСП-1, ул. Губкина, д.8, Математический институт им. В.А.Стеклова РАН.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке МИАН и на сайте МИАН по адресу: http://www.mi-ras.ru/dis/ref18/zelenov/dis.pdf

Автореферат разослан «   »   2018 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
доктор физико–математических наук, Дрожжинов Ю.Н.Дрожжинов

Общая характеристика работы

Актуальность темы

p-Адическая математическая физика – раздел современной математической физики, основанный на использовании p-адических чисел, p-адического анализа для построения моделей физических явлений.

Одним из основных мотивов для развития этого направления послужила гипотеза о неархимедовой структуре пространства-времени на планковских масштабах. Первые работы, положившие начало p-адической математической физике, появились в 1987 году и были посвящены неархимедовому подходу к динамике струны на планковских масштабах ([1], [2]).

Другим существенным стимулирующим фактором явилось использование p-адических методов для построения моделей сложных иерархических систем. В частности, было показано, что модели p-адической теории поля есть естественный непрерывный аналог иерархических моделей статистической физики. ([3]. Такого рода модели нашли применение при описании динамики сложных белковых молекул, породив целое направление исследований по применению методов p-адической математической физики в биологии и теории сложных систем ([4], [5], [6],[7]).

Еще одним важным аргументом в пользу использования p-адических чисел для построения физических моделей является гипотеза о том, что результатом физического эксперимента является рациональное число. Вещественные и p-адические числа – это пополнение поля рациональных чисел во вещественной и p-адическим нормам соответственно. При этом, этими нормами исчерпываются все нетривиальные нормы на поле рациональных чисел с точностью до эквивалентности (теорема Островского). С этих позиций весьма естественно рассматривать модели над всеми пополнениями поля рациональных чисел в рамках как локальных теорий, так и адельного подхода ([8], [9]).

Для построения моделей p-адической математической физики был развит соответствующий математический аппарат, представляющий и самостоятельный интерес. В частности, теория обобщенных функций над полем p-адических чисел ([10]), теория p-адических псевдодифференциальных операторов ([11], [12], [13]), теория p-адических вейвлетов ([14], [15]) и многое другое.

Методы p-адического анализа и p-адических динамических систем оказались продуктивными в криптографии ([16]).

Обширная библиография по p-адической математической физике и современное состояние содержатся в книге [17] и обзоре [18].

Цель работы

- Построение p-адического бозонного гауссовского канала и анализ его свойств.
- Определение p-адического индекса Маслова и изучение его свойств.
- Построение p-адического аналога квантования Конна и исследование свойств соответствующего квантового дифференциала.
- Анализ спектральных свойств оператора координаты и импульса в p-адической квантовой механике.
- Исследование связи p-адических и вещественных квантовых теорий.
- Построение модели декогеренции, основанной на адельном подходе.
- Изучение свойств p-адических динамических систем.
- Исследование скорости сходимости сумм p-адических случайных величин.
- Построение модели p-адического винеровского процесса.

Основные результаты

- В каждом из локальных расширений (вещественном или p-адическом) исходного фазового пространства (двумерного пространства на полем рациональных чисел) построена нетривиальная квантовая теория (модель Картье представления коммутационных соотношений). Доказано, что если в построенных таким образом квантовых моделях опять вернуться к рациональным числам, при этом учесть вклады всех квантовых теорий (вещественной и всех p-адических), то вклады различных теорий компенсируются, и система приобретает классические свойства.
- Дано определение p-адического индекса Маслова тройки самодвойственных решеток в двумерном симплектическом пространстве над полем p-адических чисел. С помощью разложения Ивасавы симплектического преобразование определены координаты на множестве решеток и проведены явные вычисления индекса в этих координатах. Доказано, что для двух троек самодвойственных решеток существует симплектическое преобразование, переводящее одну тройку в другую в том, и только в том случае, когда индексы Маслова этих решеток совпадают. Получена формула для коцикла представления Вейля симплектической группы через p-адический индекс Маслова.

- Предложена конструкция фредгольмова модуля, естественным образом связанного с деревом Брюа-Титса и действием группы $PSL_2(\mathbb{Q}_p)$ на этом дереве. В рамках квантового исчисления Конна построен квантовый дифференциал и изучены его свойства. В частности, доказано, что квантовый дифференциал от локально-постоянной функции является оператором конечного ранга (верно и обратное) и квантовый дифференциал от непрерывной функции есть компактный оператор.

- Предложено определение иерархической динамической системы как аналитического эндоморфизма p-адического аналитического многообразия в смысле Серра. Доказано, что такие системы не обладают свойством перемешиваемости. Изучены иерархические динамические системы на p-адической проективной прямой и вычислена энтропия таких систем. Построено p-адическое преобразование пекаря (пример не иерархической динамической системы) и доказано свойство перемешиваемости для этой системы.

- Предложена конструкция одномодового p-адического бозонного гауссовского канала. Получены необходимые и достаточные условия существования канала. Исследована структура таких каналов, доказана аддитивность.

- Доказано, что спектр оператора координаты и импульса в p-адической квантовой механике есть канторово множество на вещественной прямой.

- Доказано, что алгебры коммутационных соотношений p-адической и вещественной квантовых механик пересекаются на конечном множестве образующих.

- Исследована скорость сходимости суммы независимых одинаково распределенных случайных величин со сначениями в поле p-адических чисел. Доказан экспоненциальный характер сходимости для величин с локально постоянной плотностью. Показатель экспоненты есть третья степень от параметра постоянности плотности.

- Дано определение p-адического винеровского процесса и построена его явная реализация с использованием базиса Ван дер Пута в пространстве непрерывных p-адичнозначных функций. Доказано, что траектории этого процесса есть липшицевы функции. Построена мера Винера на пространстве траекторий, описан носитель меры и получен аналог пространства Кэмерона-Мартина.

Методы исследования

В диссертации используются методы p-адического анализа, теории представлений, статистической квантовой теории, квантовой теории информации, спектральной теории операторов, теории представлений коммутационных соотношений, теории динамических систем, теории вероятностей и случайных процессов.

Научная новизна

Результаты диссертации являются новыми, получены автором самостоятельно.

Теоретическая и практическая ценность

Результаты диссертации расширяют круг моделей в рамках стандартной статистической квантовой теории. В частности, в рамках стандартной квантовой теории информации предложен новый тип бесконечномерных каналов – p-адические бозонные каналы. В рамках предлагаемого подхода рассматривается новый класс моделей – p-адические квантовые и классические модели. Данные модели находят применения при описании сложных систем типа турбулентности, спиновых стекол или динамики белковых молекул.

Апробация диссертации

Результаты диссертации докладывались на следующих научных семинарах и конференциях.

1. Формула Юзвинского для энтропии, квантовые бозонные каналы и космология. Международная конференция по математической физике памяти академика В. С. Владимирова 9 ноября 2017 г.

2. Топологическая анти-декогерентность в модели спинового бассейна. Семинар отдела математической физики МИАН 13 апреля 2017 г.

3. p-Адические нормальные распределения. Семинар В.П. Михайлова МИАН, 16 марта 2017 г.

4. p–Адические гауссовские случайные величины. Семинар отдела математической физики МИАН, 2 марта 2017 г.

5. Statistical properties of p-adic systems. Международная конференция «Новые направления в математической и теоретической физике», МИАН, Москва, 7 октября 2016 г.

6. p-Адическая квантовая механика и квантовые каналы. Рабочее совещание «Математические вопросы квантовой теории наносистем и фотосинтеза», МИАН, Москва, 17 сентября 2015 г.

7. Non-Archimedean quantum chanels. International conference on p-adic mathematical physics and its applications, Belgrade, September 7-12, 2015.

8. p-Adic Weyl systems and around. International Conference in Honor of Professor V. S. Varadarajan, LA, IPAM, 2014.

9. Центральная предельная теорема для p-адичнозначных случайных величин. Семинар отдела математической физики МИАН, 24 апреля 2014 г.

10. p-адические квантовые каналы. Семинар отдела математической физики МИАН, 7 ноября 2013 г.

11. p-Adic model of quantum mechanics and quantum channels. Международная конференция «QP 34 – Quantum Probability and Related Topics», 19 сентября 2013 г.

12. Дробный квантовый эффект Холла. Семинар отдела математической физики МИАН, 8 ноября 2012 г.

13. 3-я Международная конференция по математической физике и ее приложениям. Самара, 27 августа – 1 сентября 2012 г

14. p-Адическое квантование Конна. Семинар комплексные задачи математической физики МИАН. 23 апреля 2012 г.

15. p-Адическая квантовая механика и некоммутативная геометрия. Общеинститутский семинар «Математика и ее приложения» Математического института им. В.А. Стеклова РАН, 16 февраля 2012 г.

16. Adelic decoherence. Международная конференция «Проблема необратимости в классических и квантовых динамических системах», МИАН, Москва, 8 декабря 2011 г.

17. p-Адические функциональные пространства. Семинар отдела математической физики МИАН, 8 сентября 2011 г.

18. О квантовании Конна p-адических систем. Семинар отдела математической физики МИАН, 8 апреля 2010 г.

19. p-Адические BMO и VMO функции. 2-я Международная конференция по математической физике и ее приложениям. Самара, 29 августа – 4 сентября 2010 г.

20. О самосопряжённых операторах в p-адической квантовой механике. Семинар отдела математической физики МИАН, 8 октября 2009 г.

21. C*-Алгебры коммутационных соотношений. Семинар отдела математической физики МИАН, 25 декабря 2008 г.

22. Квантовая механика и Колмогоровская сложность. Международная конференция по математической физике и ее приложениям. Самара, 8-13 сентября 2008 г.

23. Задача Дирихле для уравнения Лапласа на дереве. Семинар отдела математической физики МИАН, 27 декабря 2007 г.

24. Коммутационные соотношения и когерентные состояния. Семинар отдела математической физики МИАН, 13 сентября 2007 г.

25. Геометрическое квантование p-адической струны. Семинар отдела математической физики МИАН, 13 апреля 2006 г.

26. p-Adic models of turbulence. 2nd International Conference «p-Adic mathematical physics» Belgrade, 15-21 September 2005.

Публикации автора по теме диссертации

1. Е. И. Зеленов. p-Адическая модель квантовой механики и квантовые каналы. Тр. МИАН, **285** (2014), 140–153.

2. Е. И. Зеленов. p-Адический квантовый дифференциал. ТМФ, **168**:2 (2011), 212–218.

3. Е. И. Зеленов. Об операторах координаты и импульса в p-адической квантовой механике. ТМФ, **164**:3 (2010), 426–434.

4. Е. И. Зеленов. Квантовая механика и Колмогоровская сложность. Вестн. Сам. ГУ. Сер. естественнонаучная, **8/1**(67) (2008), 108-115.

5. Е. И. Зеленов. Модели p-адической механики. ТМФ, **174**:2 (2013), 285–291.

6. Е И. Зеленов. Качественная теория p-адических динамических систем. ТМФ, **178**:2 (2014), 220–229.

7. Е. И. Зеленов. p-Адический закон больших чисел. Изв. РАН. Сер. матем., **80**:3, (2016), 31–42.

8. Е. И. Зеленов. p-Адическое броуновское движение. Изв. РАН. Сер. матем., **80**:6 (2016), 92–102.

9. Е. И. Зеленов. p-Адическая бесконечномерная симплектическая группа. Изв. РАН. Сер. матем., **57**:6 (1993), 29–51.

10. В. С. Владимиров, И. В. Волович, Е. И. Зеленов. p-Адический анализ и математическая физика М.: Физматлит, 1994.—352с.
V. S. Vladimirov, I. V Volovich, E. I. Zelenov. p-Adic analysis and mathematical physics. World Scientific, Singapure, 1994.

11. В. С. Владимиров, И. В. Волович, Е. И. Зеленов. Спектральная теория в p-адической квантовой механике и теория представлений. Изв. АН СССР. Сер. матем., **54**:2 (1990), 275–302.

12. E. I. Zelenov. p-Adic Heisenberg group and Maslov index. Communications in mathematical physics, **155**: 3 (1993), 489-502.

13. E. I. Zelenov. On geometrical interpretation of the p-adic Maslov index. Communications in mathematical physics, **159**:3 (1994), 539-547.

14. E. I. Zelenov. p-Adic Mathematical Physics and Space-Time. Gravitation and Cosmology, **1**:3 (1995), 243-246.

15. E. I. Zelenov. Quantum approximation theorem. p-Adic Numbers, Ultrametric Analysis, and Applications **1**:1 (2009), 88-90.

16. E. I. Zelenov. Adelic decoherence. p-Adic Numbers, Ultrametric Analysis and Applications, **4**:1 (2012), 84-87.

17. B. Dragovich, A. Yu. Khrennikov, S. V. Kozyrev, I. V. Volovich, E. I. Zelenov. p-Adic Mathematical Physics: The First 30 Years. p-Adic Numbers Ultrametric Analysis and Applications, **9**:2 (2017), 87–121.

Структура и объем работы

Диссертация состоит из Введения, девяти Глав и Списка литературы (90 наименований). Объем диссертации составляет 145 страниц.

Благодарности

Автор хочет выразить благодарность академику РАН В. С. Владимирову и члену-корреспонденту РАН И. В. Воловичу за внимание к работе автора и многочисленные плодотворные обсуждения результатов, а также сотрудникам отдела математической физики института им. В. А. Стеклова РАН. Исследования частично поддержаны Российским фондом фундаментальных исследований и Российским научным фондом.

Содержание работы

Введение содержит краткий обзор литературы, формулировку целей иссле-доваия, основные результаты, описание структуры диссертационной работы.

В Главе 1 с использованием представлений канонических коммутационных соотношений в форме Вейля для p-адической квантовой механики предлагается следующая конструкция p-адического одномодового бозонного канала.

Пусть (W, H) – представление канонических коммутационных соотношений над двумерным симплектическим пространством (F, Δ) над полем p-адических чисел (F – двумерное векторное пространство над $\mathbb{Q}_p$, Δ – невырожденная симплектическая форма на F), то есть W – отображение из пространства F в множество унитарных операторов на пространстве H, удовлетворяющее соотношению

$$W(z)W(z') = \chi\left(\frac{1}{2}\Delta(z, z')\right)W(z + z')$$

для всех $z, z' \in F$. Здесь $\chi(x) = \exp(2\pi i\{x\}_p)$, где $\{x\}_p$ - p-адическая дробная часть числа $x \in \mathbb{Q}_p$. Дополнительно будем считать отображение W непрерывным в сильной операторной топологии.

По аналогии с вещественным случаем, линейным бозонным каналом (в представлении Шредингера) будем называть линейное вполне положительное сохраняющее след отображение на пространстве состояний Φ такое, что характеристическая функция π_ρ любого состояния ρ преобразуется по формуле

$$\pi_{\Phi[\rho]}(z) = \pi_\rho(Kz)k(z),$$

для некоторого линейного преобразования K пространства F и некоторой комплекснозначной функции k на F.

Основной результат Главы 1 состоит в следующем.

Теорема 1. *Пусть K – невырожденное линейное преобразование пространства F, L – произвольная решетка в пространстве F, $k(z) = h_L(z)$. В* *этом случае выражение* $\pi_{\Phi[\rho]}(z) = \pi_\rho(Kz)k(z))$ *определяет канал тогда, и только тогда, когда выполнено неравенство*

$$|1 - \mathrm{det}K|_p|L| \leq 1.$$

Другим существенным результатом Главы 1 является доказательство аддитивности построенного канала. Это непосредственно вытекает из полученного явного вида канала (канал является либо классически-квантовым, либо унитарно эквивалентен идеальному измерению фон Неймана).

Глава 2 посвящена унитарной динамике одномерной p-адической квантовой системы. Эта динамика описывается специальным представлением симплектической группы двумерного симплектического пространства над полем p-адических чисел, так называемым метаплектическим представлением или представлением Вейля (см., например, [19], [20]).

Вышеуказанное представление тесно связано с действием симплектической группы на дереве Брюа-Титса. Получены новые явные формулы для коцикла метаплектического представления симплектической группы и описаны орбиты действия этой группы на множестве троек вершин дерева Брюа-Титса через p-адический индекс Маслова.

Конструкция состоит в следующем. Для каждой самодвойственной решетки $L \subset F$ строится неприводимое представление канонических коммутационных соотношений (ККС) в форме Вейля (W_L, H_L). Пусть L_1 и L_2 две самодвойственные решетки. Соответствующие представления ККС неприводимы и, как следствие, унитарно эквивалентны. Следовательно, существует унитарный оператор $F_{12}\colon H_{L_1} \to H_{L_2}$, удовлетворяющий соотношению при всех $z \in F$:

$$F_{21}W_{L_1}(z) = W_{L_2}(z)F_{21},$$

который будем называть сплетающим оператором. Обозначим через $\rho_{21} = [L_2/\left(L_1 \cap L_2\right)]$ число элементов фактор-группы $[L_2/\left(L_1 \cap L_2\right)]$. Не сложно заметить, что ρ_{12} есть обратный объем решетки $L_1 \cap L_2$, следовательно, $\rho_{21} = \rho_{12}$ (мера самодвойственной решетки равна единице).

Теорема 2. *Оператор* $F_{12}\colon H_{L_1} \to H_{L_2}$*, определяемый формулой*

$$\left(F_{21}f\right)(u) = \frac{1}{\sqrt{\rho_{21}}} \sum_{\alpha \in L_2/(L_1 \cap L_2)} \chi\left(\frac{1}{2}\Delta(\alpha, u)\right) f(\alpha + u)$$

является сплетающим оператором.

Пусть L_1, L_2, L_3 – тройка самодвойственных решеток в пространстве, $\left(H_{L_1}, W_{L_1}\right), \left(H_{L_2}, W_{L_2}\right), \left(H_{L_3}, W_{L_3}\right)$ – соответствующие этим решеткам неприводимые представления ККС и F_{21}, F_{32}, F_{31} – канонические сплетающие операторы соответствующих пар представлений. Тогда оператор $\mathcal{F}$, равный произведению сплетающих операторов, $\mathcal{F} = F_{13}F_{32}F_{21}$, действующий на пространстве H_{L_1}, коммутирует со всеми операторами представления (H_{L_1}, W_{L_1}) и, следовательно, пропорционален тождественному оператору. Таким образом, справедливо равенство

$$\mathcal{F} = \mu\left(L_1, L_2, L_3\right) Id.$$

Комплексное число $\mu\left(L_1, L_2, L_3\right)$, равное по модулю единице, будем называть *индексом Маслова* тройки самодвойственных решеток.

Используя явный вид канонического сплетающего оператора, не сложно получить следующее выражение для индекса Маслова.

Теорема 3. *Пусть $L_1, L_2, L_3 \in \Lambda$. Справедлива следующая формула*

$$\mu\left(L_1, L_2, L_3\right) = \sqrt{\frac{\rho_{12}\rho_{23}}{\rho_{31}}} \sum_{\substack{\alpha\in L_2/(L_2\cap L_3)\\ \beta\in L_3/(L_3\cap L_1)\\ \alpha+\beta\in L_1}} \chi\left(\frac{1}{2}\Delta(\alpha,\beta)\right).$$

Рассмотрим множество $\mathcal{T}$ упорядоченных троек решеток с попарными расстояниями между решетками равными 2:

$$\mathcal{T} = \left\{L_1, L_2, L_3, d\left(L_i, L_j\right) = 2, i, j = 1, 2, 3\right\}.$$

Геометрическая интерпретация индекса Маслова дается следующей теоремой.

Теорема 4. *Пусть $\left[L_1, L_2, L_3\right], \left[L_1', L_2', L_3'\right] \in \mathcal{T}$. Симплектическое преобразование $g \in SL_2\left(\mathbb{Q}_p\right)$, переводящее одну тройку в другую $L_1' = gL_1, L_2' = gL_2, L_3' = gL_3$ существует тогда, и только тогда, когда индексы Маслова троек совпадают, $\mu\left(L_1, L_2, L_3\right) = \mu\left(L_1', L_2', L_3'\right)$.*

В Главе 3 в рамках квантового исчисления А. Конна ([21]), предложена конструкция Фредгольмова модуля, естественным образом связанного с деревом Брюа-Титса и действием группы $PSL_2(\mathbb{Q}_p)$ на этом дереве.

Определение 1. *Пусть $\mathcal{A}$ - инволютивная алгебра над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел. Фредгольмовым модулем над $\mathcal{A}$ назовем тройку (H, F, π), где H - сепарабельное гильбертово пространство, F - самосопряженный оператор на H, удовлетворяющий условию $F^2 = 1$, а π - инволлютивное представление алгебры $\mathcal{A}$ в H. При этом, для всех $a \in \mathcal{A}$ коммутатор*

$$[F, \pi(a)]$$

является компактным оператором в H.

В нашем случае в качестве пространства H выступает пространство квадратично суммируемых функций на проективной прямой $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$; в качестве инволютивной алгебры $\mathcal{A} \subset L^\infty\left(\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)\right)$ - подалгебра алгебры измеримых ограниченных функций на $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$. Оператор симметрии определяется формулой $F = P_+ - P_-$, где операторы $P_\pm$ – ортогональные проекторы на подпространства, естественным образом связанные с орбитами действия группы $PSL_2(\mathbb{Q}_p)$ на множестве вершин дерева Брюа-Титса.

Теорема 5. *Пусть $\mathcal{LC}$ - алгебра локально постоянных функций на $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$. Оператор ∂f является оператором конечного ранга тогда, и только тогда, когда $f \in \mathcal{LC}$.*

Следствие. *Пусть $\mathcal{C}$ - алгебра непрерывных функций на $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$. Если $f \in \mathcal{C}$, то оператор ∂f - компактен.*

В Главе 4 рассматриваются операторы координаты и инпульса для p-адической квантовой механики.

Классической p-адической системой назовем тройку (F, Δ, G), где F – двумерное векторное пространство над $\mathbb{Q}_p$, Δ – невырожденная симплектическая форма на F, G – подгруппа группы $SL_2(\mathbb{Q}_p)$, действующая на F линейными преобразованиями.

Квантование классической системы задается четверкой $(U, V, H, \mathcal{U})$, где H – комплексное Гильбертово пространство, U и V – сильно нерерывные унитарные представления аддитивной группы поля $\mathbb{Q}_p$ в H, удовлетворяющие соотношению $U(x)V(y) = \exp(i\pi\{xy\}_p)V(y)U(x)$ для всех $(x, y) \in F$; $\mathcal{U}$ – унитарное представление группы G в H, удовлетворяющее соотношениям $\mathcal{U}(g)W(z) = W(gz)\mathcal{U}(g)$, где $W(z) = U(x)V(y)$, $z = (x, y) \in F$.

Представление U в координатном представлении реализуется оператором умножения на аддитивный характер поля $\mathbb{Q}_p$.

Теорема 6. *Проекторнозначная мера Q для оператора координаты дается формулой*

$$(Q_\Omega f)(u) = h_\Omega(u) f(u),$$

где $f \in L_2(\mathbb{Q}_p)$, Ω – борелевское множество на $\mathbb{Q}_p$, h_Ω – индикаторная функция множества Ω.

Проекторнозначная мера для оператора импульса дается формулой

$$(P_\Omega f)(u) = \left(\widetilde{h_\Omega} * f\right)(u),$$

где $\tilde{h}$ – преобразование Фурье функции h, а $*$ – оператор свертки.

Следующим естественным шагом в построении p-адического оператора координаты является рассмотрение C^*-алгебры операторов, порожденной семейством проекторов $\{Q_\Omega\}$, где Ω пробегает семейство борелевских подмножеств $\mathbb{Z}_p$. Обозначим эту алгебру через $A_\mathcal{Q}$. Заметим, что в вещественном случае эта алгебра есть алгебра непрерывных функций на спектре оператора координаты.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 7. *Алгебра $A_\mathcal{Q}$ изоморфна алгебре $C(\mathbb{Z}_p)$ непрерывных функций на единичном шаре $\mathbb{Z}_p$.*

Непосредственно из теоремы следует, что спектр оператора координаты есть канторово множество (поскольку $\mathbb{Z}_p$ гомеоморфно канторову множеству на вещественной прямой).

В Главе 5 исследуется связь между p-адической и вещественной квантовыми теориями, делается попытка унификации теорий.

Пусть Ω – некотрое множество. Через $\mathbb{D}$ обозначим множество функций на Ω со значениями в поле рациональных чисел $\mathbb{Q}$, отличных от нуля не более чем в конечном числе точек. $\mathbb{D}$ обладает естественной структурой векторного пространства над полем $\mathbb{Q}$. Существует взаимно однозначное соответствие между элементами пространства $\mathbb{D}$ и множеством конечных наборов рациональных чисел. *Поэтому естественно считать пространство $\mathbb{D}$ пространством результатов эксперимента.* Будем далее считать, что Ω – множество мощности континуум. В этом случае множество $\mathbb{D}$ также имеет мощность континуум. Пространство $\mathbb{D}$ снабдим дискретной топологией и структурой топологического векторного пространства над $\mathbb{Q}$. Через $\mathbb{Q}_p, p = 2, 3, 5, \ldots$ обозначим поля p-адических чисел, $\mathbb{Q}_\infty = \mathbb{R}$ ("∞-адический"всюду будет означать "вещественный"). Пусть $\mathbb{Q}_p^d$ – аддитивная группа $\mathbb{Q}_p$, снабженная дискретной топологией. Справедлива следующая теорема.

Теорема 8. *Аддитивная группа пространства $\mathbb{D}$ изоморфна группе $\mathbb{Q}_p^d$ для всех простых p и $p = \infty$.*

Определение 2. *Функция β, определенная на множестве $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{D}^2$, принимающая значения в поле $\mathbb{C}$ комплексных чисел, $\beta : \mathbb{D}^2 \times \mathbb{D}^2 \mapsto \mathbb{C}$ и обладающая следующими свойствами:*

1. *$\beta(x, y) = \bar{\beta}(y, x)$ для всех $x \in \mathbb{D}^2, y \in \mathbb{D}^2$;*

2. *$\beta_y(x) = \beta(x, y)$ является характером группы $\mathbb{D}^2$ при любом фиксированном $y \in \mathbb{D}^2$;*

3. если $\beta_y(x) = 1$ для всех $y \in \mathbb{D}^2$, то $x = 0$

называется бихарактером группы $\mathbb{D}$.

Замечание. Легко увидеть, что если β непрерывна в p-адической топологии, то $\beta(x, y) = \chi_p(\Delta(x, y))$, где χ_p – некоторый нетривиальный аддитивный характер поля $\mathbb{Q}_p$ (например, $\chi_p(a) = \exp(2\pi i\{a\}_p), a \in \mathbb{Q}_p$), а Δ – невырожденная симплектическая билинейная форма на $\mathbb{Q}_p \times \mathbb{Q}_p$.

Определение 3. *Тройку (W, H, β), где H – комплексное гильбертово пространство, β – бихарактер группы $\mathbb{D}$, W – отображение из $\mathbb{D} \times \mathbb{D}$ в группу унитарных операторов на H, удовлетворяющее условию*

$$W(x)W(y) = \beta(x, y)W(y)W(x), x \in \mathbb{D} \times \mathbb{D}, y \in \mathbb{D} \times \mathbb{D},$$

будем называть представлением коммутационных соотношений над группой $\mathbb{D}$.

Теорема 9. *Пусть $(W_p, H_p, \beta_p), p \neq \infty$ – представление коммутационных соотношений одномерной p-адической квантовой механики. Тогда для любого конечного набора $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ элементов из $\mathbb{D} \times \mathbb{D}, x_i \in \mathbb{D} \times \mathbb{D}, i = 1, 2, \dots, n$ найдется представление коммутационных соотношений вещественной квантовой механики $(W_\infty, H_\infty, \beta_\infty)$ такое, что $W_p(x_i) = W_\infty(x_i)$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$.*

Пусть (W, H, β) – произвольное представление коммутационных соотношений над $\mathbb{D}$. C^*-алгебра A_β, порожденная операторами $\{W(x), x \in \mathbb{D} \times \mathbb{D}\}$ не зависит от выбора представления, а зависит только от бихарактера β. На этом языке теорему можно переформулировать следующим образом. Пусть A_{β_p} – C^*-алгебра p-адических коммутационных соотношений. Тогда для любого конечного числа образующих алгебры A_{β_p} найдется алгебра A_{β_∞} вещественных коммутационных соотношений, совпадающая с алгеброй A_{β_p} на этих образующих.

Глава 6 посвящена адельному подходу к проблеме декогеренции. В качестве квантовой системы выступает модель Картье представлений коммутационных соотношений.

Пусть L - решетка в пространстве F, то есть свободный $\mathbb{Z}_p$-модуль ранга 2. Заметим, что в случае $p = \infty$ - это дискретное подмножество F_∞, при $p \neq \infty$ - компактное подмножество F_p.

Пусть $L = L^*$ - самодвойственная решетка. Пространство представления Картье H^L состоит из комплекснозначных функций на F, обладающих следующими свойствами

$$f \in H^L \iff f \in L_2\left(F/L\right), f(s+u) = \chi\left(1/2B(s,u)\right) f(s) \forall u \in L.$$

Пространство H^L является гильбертовым пространством относительно нормы $\|f\| = \int_{F/L} |f(s)|^2 ds$. В вещественном случае множество F/L компактно, в p-адическом - дискретно, в этом случае интеграл вырождается в сумму. Заметим также, что квадрат модуля волновой функции инвариантен относительно сдвигов на вектор решетки, поэтому представление Картье можно рассматривать как квантовую систему на множестве F/L.

Операторы представления задаются формулой

$$\left(W^L(z)f\right)(s) = \chi\left(1/2B(z,s)\right) f(s-z).$$

Можно показать, что пара $\left(W^L, H^L\right)$ задает неприводимое представление коммутационных соотношений для любой самодвойственной решетки L.

Теперь построим тензорное произведение представлений $\left(H_p^L, W_p^L\right)$ по всем p, включая $p=\infty$.

Для этого рассмотрим векторное пространство $\mathbb{H}'$ над полем комплексных чисел, натянутое на вектора вида

$$\phi(Z) = \phi_\infty(z_\infty)\prod_p \phi_p(z_p),$$

где $Z = (z_\infty, z_2, z_3, z_5, \dots, z_p, \dots) \in \mathbb{A}^2$, $\mathbb{A}$ - кольцо аделей, и не более чем конечное число сомножителей отлично от $\Omega_p(z_p)$ ($\Omega_p(z_p)$ – индикаторная функция $\mathbb{Z}_p$). На $\mathbb{H}'$ зададим естественным образом скалярное произведение

$$(\phi,\psi) = (\phi_\infty, \psi_\infty)\prod_p (\phi_p, \psi_p).$$

На пространстве $\mathbb{H}'$ определим операторы $\mathbb{W}(Z), Z \in \mathbb{A}^2$

$$\mathbb{W}(Z)\phi = W_\infty(z_\infty)\phi_\infty \prod_p W_p(z_p)\phi_p.$$

Поскольку справедливо равенство $W_p(z_p)\Omega_p = \Omega_p$ для всех $z_p \in L_p$, то операторы $\mathbb{W}(Z), Z \in \mathbb{A}^2$ отображают $\mathbb{H}'$ в $\mathbb{H}'$.

Пространство адельного представления $\mathbb{H}$ определим как замыкание предгильбертова пространства $\mathbb{H}'$ относительно естественной нормы, операторы $\mathbb{W}(Z)$ единственным образом продолжаются до унитарных операторов на $\mathbb{H}$. При этом, справедливы следующие коммутационные соотношения для всех $Z, Z' \in \mathbb{A}^2$:

$$\mathbb{W}(Z)\mathbb{W}(Z') = \chi_\infty\left(B_\infty(z_\infty, z'_\infty)\right)\prod_p \chi_p\left(B_p(z_p, z'_p)\right)\mathbb{W}(Z')\mathbb{W}(Z).$$

Пусть теперь F - двумерное векторное пространство над полем $\mathbb{Q}$ рациональных чисел, Δ - невырожденная симплектическая форма на F, принимающая рациональные значения. Для всякого простого p и $p = \infty$ пространство F пополняется до пространства F_p, форма Δ естественным образом продолжается до невырожденной симплектической формы Δ_p на F_p. Действительно, исходная форма Δ в силу линейности является непрерывной в p-адической топологии на F для всех p. Пусть L - самодвойственная $\mathbb{Z}$-решетка в F. Замыкание L в вещественной или p-адических топологиях на пространстве F дают соответствующие самодвойственные $\mathbb{Z}_p$-решетки L_p. Построим соответствующие представления Картье $\left(W_p^L, H_p^L\right)$ коммутационных соотношений и их тензорное произведение $(\mathbb{W}, \mathbb{H})$.

Рассмотрим произвольные векторы $r, r' \in F$. Через R, R' обозначим векторы в пространстве $\mathbb{A}^2$ вида $R = (r, r, \ldots, r, \ldots), R' = (r', r', \ldots, r', \ldots)$. Справедлива формула

$$\mathbb{W}(R)\mathbb{W}(R') = \mathbb{W}(R')\mathbb{W}(R).$$

Другими словами, операторы $\mathbb{W}(R)$ и $\mathbb{W}(R')$ коммутируют. Утверждение непосредственно вытекает из простой адельной формулы для характеров

$$\chi_\infty(q) \prod_p \chi_p(q) = 1, q \in \mathbb{Q}.$$

Таким образом, исходная квантовая системы при ограничении на рациональные числа приобретает классические свойства.

При этом происходит коллапс волновой функции. Рассмотрим для примера поведение вакуумного вектора при аналогичном ограничении на рациональные числа. Справедлива простая формула

$$\Omega(R) = \Omega_\infty(r) \prod_p \Omega_p(r) = \begin{cases} 1, r = 0, \\ 0, r \neq 0. \end{cases}$$

Таким образом, при ограничении вакуумного состояния на рациональные числа в фундаментальной области решетки вакуумное состояние превращается в функцию, равную единице в начале координат и нулю во всех других точках фундаментальной области. Другими словами, состояние стало классическим (координата и импульс частицы определены однозначно).

В Главе 7 рассматриваются свойства иерархических динамических систем. В качестве фазового пространства такой системы выступает p-адическое компактное аналитическое многообразие, а в качестве динамического отображения – аналитические эндоморфизмы. Такие эндоморфизмы переводят шары в шары и при этом сохраняют иерархию вложенных шаров.

Для таких систем справедлива усиленная теорема Паункаре о числе возвращений.

Теорема 10. *Пусть* (X, T) *– иерархическая динамическая система,* T *сохраняет меру. Через* $N_B^a(n)$ *обозначим количество возвращений из точки* $a \in B$ *в шар* B *за время* n*. Тогда* $N_B^a(n)$ *не зависит от* a*. Если динамическая система* (X, T) *эргодична, то существует предел*

$$\lim_{n\to\infty} N_B(n)/n$$

и этот предел равен $\mu(B)$*.*

Следствие. *Пусть* (X, T) *– p-адическая динамическая системы, сохраняющая меру . Тогда существует такое натуральное число* N*, что динамическая система* $\left(X, T^N\right)$ *не является эргодической.*

Другими словами, такие системы не являются вполне эргодическими.

Теорема 11. *Иерархические динамические системы не обладают свойством перемешиваемости.*

В качестве примера изучены иерархические динамические системы на p-адической проективной прямой. Проективная прямая является границей дерева Брюа-Титса и преобразование T продолжается до автоморфизма T_G дерева.

Теорема 12. *Пусть* $\left(P^1, T\right)$ *– обратимая динамическая система такая, что автоморфизм* T_G *не имеет неподвижных вершин и инверсий. Тогда* T *имеет ровно две неподвижные точки, одна из которых – притягивающая, другая – отталкивающая. Пара неподвижных точек и энтропия определяют динамическую систему однозначно.*

В иерархических динамических системах шара переводятся в шары. Расширим класс динамических систем и позволим динамическому отображению переводить шары в объединения шаров. В качестве примера такого отображения рассмотрим p-адическое преобразования пекаря.

Пусть $(x, y) \in X$ представлены в виде канонического разложения:

$$(x, y) = (x_0 + x_1 p + \ldots + x_n p^n + \ldots, y_0 + y_1 p + \ldots + y_m p^m + \ldots),$$

где $x_i, y_i, i = 0, 1, \ldots$ принимают значения в множестве $0, 1, \ldots, p-1$. Преобразование пекаря T определим следующим образом:

$$T(x, y) = \left(\frac{x - x_0}{p}, x_0 + py\right).$$

Теорема 13. *Преобразование пекаря обладает свойством перемешиваемости.*

Глава 8 посвящена исследованию предельных теорем для сумм независимых одинаково распределенных случайных величин со значениями в группе целых p-адических чисел. Хорошо известен результат, что такие суммы сходятся по распределению к равномерному распределению. Возникает вопрос об оценке скорости сходимости. Ответ дается следующей теоремой.

Теорема 14. *Пусть $\{\xi_n, n = 1, 2, \dots\}$ последовательность независмых одинаково распределенных центрированных случайных величин с конечной дисперсией D. При этом, эти величины абсолютно непрерывны с плотностью p_ξ, плотность p_ξ локально постоянна с параметром постоянности Δ. Через $p_{S_n}, n = 1, 2, \dots$ обозначим плотность распределения вероятности случайной величины $S_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n, n = 1, 2, \dots$. Тогда справедлива следующая оценка*

$$\sup_{x \in \mathbb{Q}_p} \left| p_{S_n}(x) - \frac{1}{D} h(0, D)(x) \right|_p \leq \left(\frac{D}{\Delta} - 1 \right) e^{-\lambda_\xi n},$$

где вещественное число λ_ξ зависит только от распределения p_ξ и удовлетворяет неравенству

$$\lambda_\xi \geq \inf_{\Delta \leq r < D} \{2Q_\xi(r) (1 - Q_\xi(r)) \sin^2(\pi r / D)\} > 0.$$

Здесь $h(0, D)$ – равномерное распределение с дисперсией D и Q_ξ – функция концентрации величины ξ.

Из последней формулы также вытекает следующая оценка для параметра убывания λ:

$$\lambda_\xi \geq 2Q_\xi(\Delta) (1 - 1/p) \sin^2(\pi\Delta/D) \geq \frac{1}{3} \left(\frac{\Delta}{D} \right)^3.$$

В Главе 9 приводится конструкция p-адического винеровского процесса. Пусть для каждого $t \in \mathbb{Z}_p$ определена случайная величина ξ_t. Таким образом, задано семейство случайных величин, индексированное целыми p-адическими числами $\{\xi_t, t \in \mathbb{Z}_p\}$. Рассмотрим функцию двух переменных $X(t, \omega), t \in \mathbb{Z}_p, \omega \in \mathbb{Z}_p$, которая при каждом фиксированном $t \in \mathbb{Z}_p$ совпадает со случайной величиной ξ_t из нашего семейства, $X(t, \omega) = \xi_t(\omega)$. Функцию $X(t, \omega)$ будем называть p-адическим случайным процессом.

Пусть a, b – произвольные p-адические числа. Через $[a, b]$ обозначим минимальный шар в $\mathbb{Q}_p$, содержащий эти числа. Будем использовать обозначение $a < c < b$, если $c \in [a, b], c \neq a, c \neq b$.

Случайный процесс имеет независимые приращения, если для всех конечных наборов $\{0 = t_0, t_1, \dots, t_n\}$ целых p-адических чисел, $t_0 < t_1 < \dots < t_n$, случайные величины $X(t_0, \cdot), X(t_1, \cdot) - X(t_0, \cdot), \dots, X(t_n, \cdot) - X(t_{n-1}, \cdot)$ независимы в совокупности.

Определение 4. *p-адическим винеровским процессом* $W(t, \cdot) = W_t, t \in \mathbb{Z}_p$ *будем называть случайный процесс, удовлетворяющий условиям*

- $W_0 = 0$ *почти наверное;*
- W_t *– процесс с независимыми приращениями;*
- *случайные величины* $W_t - W_s$ *являются абсолютно непрерывными с плотностью* $\frac{1}{|t-s|_p} h\left(0, |t-s|_p\right)$.

Явная реализация процесса дается следующей теоремой.

Теорема 15. *Пусть* $\xi_n(\omega), n \in \mathbb{Z}_+, \omega \in \mathbb{Z}_p$ *– последовательность независимых одинаково распределенных абсолютно непрерывных случайных величин с плотностью* $h(0,1)$. *Тогда ряд*

$$W(\omega, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n(\omega) \gamma_n e_n(t) \tag{1}$$

сходится при каждом $t \in \mathbb{Z}_p$ *почти наверное и определяет p-адический винеровский процесс.*

Здесь $\{e_n, n = 0, 1, \dots\}$ – базис Ван дер Пута в пространстве непрерывных функций $C\left(\mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p\right)$.

Свойства траекторий построенного процесса даются теоремой.

Теорема 16. *Траектории p-адического винеровского процесса принадлежат пространству 1-липшицевых функций* $\mathrm{Lip}_1\left(\mathbb{Z}_p \to \mathbb{Q}_p\right)$ *почти наверное.*

Траектории p-адического винеровского процесса не дифференцируемы ни в одной точке почти наверное.

Винеровский процесс определяет меру Винера на пространстве непрерывных функций $C\left(\mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p\right)$.

Обозначим через L_0 множество функций, удовлетворяющих условию Липшица порядка 1 с постоянной Липшица, равной 1, обращающихся в нуль в нуле. Доказывается, что L_0 есть компактный $\mathbb{Z}_p$-подмодуль пространства непрерывных функций.

Справедлива следующая Теорема.

Теорема 17. *Носитель p-адической меры Винера содержится в множестве* L_0. *При ограничении на* L_0 *p-адическая мера Винера совпадает с мерой Хаара на* L_0.

Список литературы

[1] |. V. Volovich. p-Adic strings. Class. Quant. Grav. **4**, (1987), L83-L87.

[2] P. G. O. Freund, E. Witten. Adelic string amplitudes. Phys. Lett. B 199, (1987), 191-194.

[3] Э. Ю. Лернер, М. Д. Миссаров. Скалярные модели p-адической квантовой теории поля и иерархическая модель. ТМФ, **78**:2, (1989), 248–257.

[4] В. А. Аветисов, А. Х. Бикулов. Об ультраметричности флуктуационной динамической подвижности белковых молекул. Тр. МИАН, 265, (2009), 82–89.

[5] В. А. Аветисов, А. Х. Бикулов, А. П. Зубарев. Ультраметрическое случайное блуждание и динамика белковых молекул, Избранные вопросы математической физики и анализа, Сборник статей. К 90-летию со дня рождения академика Василия Сергеевича Владимирова, Тр. МИАН, 285, МАИК «Наука/Интерпериодика», М., 2014, 9–32.

[6] В. А. Аветисов, А. Х. Бикулов, В. А. Осипов. p-Адические модели ультраметрической диффузии в конформационной динамике макромолекул. Тр. МИАН, 245, Наука, М., 2004, 55–64.

[7] С .В. Козырев. Ультраметричность в теории сложных систем. ТМФ **185**(2), (2015), 46–360.

[8] Yu. Manin. Reflections on arithmetical physics. Conformal invariance and string theory, 293–303, Academic Press, Boston, MA, 1989.

[9] Б. Драгович. p-Адическая и адельная квантовые механики. Тр. МИАН, 245, (2004), 72–85.

[10] В. С. Владимиров. Обобщенные функции над полем p-адических чисел. УМН, **43**:5 (263), (1988), 17-53.

[11] В. С. Владимиров, И. В. Волович, Е. И. Зеленов. Спектральная теория в p-адической квантовой механике и теория представлений. Изв. АН СССР. Сер. матем., **54**:2 (1990), 275–302.

[12] В. С. Владимиров. О спектре некоторых псевдодифференциальных операторов над полем p-адических чисел. Алгебра и анализ, 2:6 (1990), 107–124.

[13] А. Н. Кочубей. Оператор типа Шрёдингера над полем p-адических чисел. ТМФ, **86**:3 (1991), 323–333.

[14] С. В. Козырев. Всплески и спектральный анализ ультраметрических псевдодифференциальных операторов. Матем. сб., 198:1 (2007), 103–126.

[15] С. В. Козырев, А. Ю. Хренников, В. М. Шелкович. p-Адические всплески и их приложения. Избранные вопросы математической физики и анализа, Сборник статей. К 90-летию со дня рождения академика Василия Сергеевича Владимирова, Тр. МИАН, 285, МАИК «Наука/Интерпериодика», М., 2014, 166–206.

[16] V. Anashin, A. Khrennikov. Applied Algebraic Dynamics. de Gruyter Expositions in Mathematics, de Gruyter, 2009.

[17] В. С. Владимиров, И. В. Волович, Е. И. Зеленов. p-Адический анализ и математическая физика М.: Физматлит, 1994.—352с.
V. S. Vladimirov, I. V Volovich, E. I. Zelenov. p-Adic analysis and mathematical physics. World Scientific, Singapure, 1994.

[18] B. Dragovich, A. Yu. Khrennikov, S. V. Kozyrev, I. V. Volovich, E. I. Zelenov. p-Adic Mathematical Physics: The First 30 Years. p-Adic Numbers Ultrametric Anal. Appl., **9**:2 (2017), 87–121.

[19] В. С. Владимиров, И. И. Волович. p-Адическая квантовая механика. ДАН СССР, **302**, (1988), 320-322.

[20] G. Lion, M. Vergne. The Weil representation, Maslov index and theta-series. Boston: BirkHauser, 1980.

[21] A. Connes. Noncommutative geometry. Academic Press, 1994.

Подписано в печать 14.06.2018 г.
Тираж 100 экз.