

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Шаров Александр Николаевич

РЕШЕНИЕ МНОГОМЕРНЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ЭЛАСТОГРАФИИ С
АПОСТЕРИОРНОЙ ОЦЕНКОЙ ТОЧНОСТИ

01.01.03 — Математическая физика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Москва

2020

Работа выполнена на кафедре математики физического факультета
МГУ имени М.В.Ломоносова.

Научные руководители - **Леонов Александр Сергеевич**

доктор физико-математических наук, профессор

Ягола Анатолий Григорьевич

доктор физико-математических наук, профессор

Официальные

оппоненты - **Бакушинский Анатолий Борисович**

доктор физико-математических наук, профессор, Федеральный
исследовательский центр «Информатика и управление»

Российской Академии Наук, главный научный сотрудник

Шишленин Максим Александрович

доктор физико-математических наук, Федеральное
государственное бюджетное учреждение науки Институт
вычислительной математики и математической геофизики

Сибирского отделения Российской академии наук,
заведующий лабораторией обратных задач естествознания

Рычагов Михаил Николаевич

доктор физико-математических наук, профессор,

Московский филиал корпорации

«Алаин Текнолоджи Ресерч энд Девелопмент, Инк»,

старший менеджер по разработке программного обеспечения

Защита состоится 21 января 2021 г. в 16 часов 30 мин. на заседании диссертационного совета МГУ.01.06 Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова по адресу: 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, МГУ, дом 1, стр. 2, физический факультет, ауд. 4-46.

E-mail: ff.dissovet@gmail.com.

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М.В.Ломоносова (Ломоносовский просп., д. 27). Со сведениями о регистрации участия в защите в удаленном интерактивном режиме и с диссертацией в электронном виде также можно ознакомиться на сайте ИАС «ИСТИНА»: <https://istina.msu.ru/dissertations/337886314/>.

Автореферат разослан « » декабря 2020 г.

Ученый секретарь

диссертационного совета МГУ.01.06,

доктор физико-математических наук,

профессор

П.А. Поляков

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Работа посвящена решению обратных задач квазистатической эластографии. Эластография – это новый метод исследования в медицине, предназначенный для диагностики рака. Это могут быть исследования щитовидной железы, легких, печени, простаты или молочной железы. Также эластография может быть применена для исследования кровеносных сосудов, мышц и гипертермии тканей. Метод основан на различии упругих свойств здоровой и опухолевой ткани. Кратко, суть метода заключается в поверхностном сжатии исследуемого участка тела с последующей качественной оценкой или количественным определением упругих свойств по измерениям возникающих смещений тканей. Эластография позволяет выявить опухоли на ранних стадиях или в случаях, когда они имеют небольшие размеры, что может быть недоступно при использовании других ультразвуковых методов. При этом качественная эластография, когда определяются только смещения ткани или скорость звука в ней и не решается обратная задача для определения упругих показателей, может не дать эффективных результатов. Так бывает, например, когда контраст показателей здоровой и опухолевой тканей невелик, опухоль имеет небольшие размеры или полученные измерения имеют низкую точность и неоднородности неразличимы. Поэтому важно применение именно количественной эластографии, когда показатели упругости определяются с помощью численного решения обратной задачи. В данной работе рассматривается решение квазистатической задачи эластографии в двумерном и трехмерном пространствах, когда исследуемая ткань рассматривается как линейно-упругое изотропное тело, подверженное малым поверхностным сжатиям. Сложность решения такой обратной задачи связана с ее некорректностью и многомерностью. Поэтому существенным является адекватный выбор пространства решений, определяемый априорной информацией, а также разработка соответствующего устойчивого метода решения обратной задачи, учитывающего специфику эластографии. Принципиально важна также оценка точности решения этой обратной задачи в виде числа, что для некорректных

задач нетривиально.

Актуальность работы обусловлена эффективностью методов эластографии при онкологических исследованиях в случаях, когда другие ультразвуковые методы бессильны, и необходимостью количественной оценки упругих свойств исследуемых биологических тканей при диагностике.

Рассматриваемая обратная задача эластографии заключается в определении распределения модуля Юнга в исследуемой области по известным значениям вертикальных смещений ткани.

Целями работы являются:

- 1) разработка и обоснование алгоритмов решения различных вариантов обратной задачи эластографии в квазистатической постановке в двумерном и трехмерном пространствах;
- 2) вычисление апостериорных оценок точности полученных решений в зависимости от ошибки входных данных;
- 3) апробация и численное исследование разработанных методов на модельных задачах.

Для выполнения поставленных целей были решены следующие **задачи**:

- 1) разработан алгоритм и решена модельная обратная задача квазистатической эластографии в двумерной области на классе гладких решений и классе функций ограниченной вариации типа Харди;
- 2) поставлена обратная задача квазистатической эластографии на общем параметрическом классе решений в двумерном и трехмерном пространствах;
- 3) разработан алгоритм решения обратной задачи квазистатической эластографии на общем параметрическом классе решений в двумерном и трехмерном пространствах. Доказана теорема о сходимости получаемых приближенных решений к точному решению задачи;

- 4) численно решены модельные задачи квазистатической эластографии на параметрическом классе решений в двумерном и трехмерном пространствах;
- 5) для всех полученных численных приближенных решений получены апостериорные оценки точности и найдены зависимости этих оценок от уровня ошибки входных данных.

Научная новизна работы:

- 1) в диссертации впервые рассмотрена обратная задача эластографии на пространстве решений – функций ограниченной многомерной вариации. Наиболее интересные случаи в онкологии, когда двумерное или трехмерное решение может быть разрывным, могут быть описаны именно функциями такого класса;
- 2) впервые рассмотрена и поставлена обратная задача эластографии на параметрических классах решений;
- 3) впервые построен и обоснован устойчивый к ошибкам данных алгоритм решения многомерной обратной задачи эластографии на параметрических классах решений общего вида; доказана теорема о сходимости соответствующих приближенных решений к точному решению задачи. Алгоритм апробирован и исследован на двумерных и трехмерных модельных задачах;
- 4) впервые получены апостериорные оценки точности найденных численных решений многомерных обратных задач квазистатической эластографии.

На защиту выносятся следующие результаты, соответствующие пункту 2 паспорта специальности 01.01.03 – математическая физика по физико-математическим наукам:

- 1) предложена и исследована новая постановка обратной задачи квазистатической эластографии на пространстве решений – функций ограниченной многомерной вариации;

- 2) разработан и обоснован алгоритм, который позволяет найти решение обратной задачи квазистатической эластографии в двумерной области на классе гладких решений и классе функций ограниченной вариации типа Харди;
- 3) предложена и исследована новая постановка обратной задачи квазистатической эластографии на параметрических классах решений;
- 4) разработан и обоснован алгоритм, который позволяет найти решение обратной задачи квазистатической эластографии в двумерной и трехмерной областях на параметрических классах решений;
- 5) разработан и обоснован метод апостериорной оценки точности полученных численных решений многомерных обратных задач квазистатической эластографии;
- 6) разработанные алгоритмы решения обратной задачи квазистатической эластографии апробированы на модельных задачах в двумерных и трехмерных областях.

Научная значимость работы заключается в новых постановках многомерных обратных задач квазистатической эластографии, в разработке новых устойчивых методов и алгоритмов решения этих некорректных задач с апостериорной оценкой точности.

Практическая значимость работы заключается в возможности использования ее результатов для количественных онкологических исследований тканей с определением упругих характеристик опухолей даже небольших размеров или на ранних стадиях.

Степень достоверности и обоснованности полученных результатов определяется научно обоснованными в теории упругости математическими моделями эластографических явлений, строгими математическими постановками решаемых обратных задач, математическим обоснованием методов и алгоритмов их решения, а также адекватными результатами решения модельных задач с различными уровнями ошибок входных данных.

Апробация работы. Основные результаты работы были доложены на Международной конференции «Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики 2019» (Новосибирск, 2019), the 5th international symposium on Inverse Problems, Design and Optimization (Tianjin, Китай, 2019), Международной Школе-конференции молодых ученых «Математика, физика, информатика и их приложения в науке и образовании» (Москва, 2016), Международной конференции «International Workshop on Inverse and Ill-Posed Problems» (Москва, 2015), Международной конференции «Бесконечномерный анализ, стохастика, математическое моделирование: новые задачи и методы» (Москва, 2014).

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, шести разделов, заключения, списка рисунков, списка литературы и трех приложений. Полный объем диссертации (без учета приложений) составляет 109 страниц текста с 35 рисунками и одной таблицей. Список литературы включает 80 наименований.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В работе рассматриваются решения двумерных и трехмерных обратных задач квазистатической эластографии - метода в онкологии, основанного на различиях в упругих свойствах здоровой и опухолевой тканях.

В разделе 1 рассматривается физическая постановка задачи эластографии и дается обзор методов эластографических исследований: квазистатического, гармонического и транзиентного. Кроме того, приводятся примеры неединственности и неустойчивости решений обратной задачи квазистатической эластографии, что говорит о ее некорректности в общем случае и необходимости применять регуляризирующие алгоритмы для ее решения.

В разделе 2 рассматривается математическая постановка прямой задачи квазистатической эластографии. Дается вывод системы дифференциальных уравнений в частных производных, связывающих смещения ткани и ее упругие характеристики, приводятся граничные условия для модельной области. Прямая задача, заключающаяся в вычислении смещений ткани по

известным ее упругим характеристикам, ставится как краевая задача для этой системы дифференциальных уравнений на некоторых классах функций. Отмечается существование и единственность решения прямой задачи. Т.к. в онкологии наиболее интересны случаи, когда упругие характеристики ткани, такие как модуль Юнга являются разрывными функциями, то специально рассматривается слабое решение прямой задачи. Слабые решения могут быть найдены с помощью метода конечных элементов. В разделе 2.1 рассматривается прямая задача в двумерной области. При этом используется две модели: модель «plane-strain», или случай плоского деформированного состояния тела, и модель «plane-stress», или случай плоского напряженного состояния тела. Эти две постановки существенно отличаются конечным видом уравнений и краевых условий. В разделе 2.2 прямая задача рассматривается в трехмерной области.

В разделе 3 рассматривается математическая постановка обратной задачи квазистатической эластографии и алгоритм ее решения. Обратная задача заключается в вычислении модуля Юнга по измеренным значениям вертикальных смещений ткани. В разделе 3.1 обратная задача, представляемая в виде нелинейного операторного уравнения, рассматривается на классе гладких функций и классе функций нескольких переменных с ограниченной вариацией типа Харди. Проводится дискретизация задачи по методу конечных элементов, и модуль Юнга ищется в узлах сетки метода. Нелинейное операторное уравнение обратной задачи решается с помощью метода регуляризации А.Н. Тихонова, параметр регуляризации определяется по обобщенному принципу невязки. В разделе 3.2 обратная задача рассматривается на параметрическом классе решений, когда неоднородности в ткани могут быть заданы с помощью модельных функций, которые определяются небольшим числом геометрических параметров, а модуль Юнга внутри и вне неоднородностей является постоянным. В частности, численные эксперименты рассматривались для задач с неоднородностями в виде кругов или эллипсов в двумерном случае и шаров или эллипсоидов в трехмерном случае. При этом считается, что значение модуля Юнга вне неод-

нородностей (фоновое значение) известно. Таким образом, обратная задача сводится к поиску числа неоднородностей в рассматриваемой области, параметров, задающих их геометрическую форму, и значений модулей Юнга внутри неоднородностей. Для решения обратной задачи на параметрическом классе предложен алгоритм, который является специализированной модификацией метода расширяющихся компактов В.К. Иванова и И.Н. Домбровской. Для предложенного алгоритма доказана теорема сходимости найденного приближенного решения к точному решению задачи при стремлении ошибки входных данных к нулю.

В разделе 4 приводятся численные результаты решения модельных обратных задач квазистатической эластографии во всех рассмотренных постановках из предыдущих глав. В разделе 4.1 приводятся результаты решения модельной двумерной обратной задачи в приближении плоского деформированного состояния тела в прямоугольной области на классе гладких решений и классе функций ограниченной вариации типа Харди. Результаты приведены для точных входных данных и данных задачи, имеющих ошибку 5%. В разделе 4.2 приводятся численные решения задач, рассмотренных в разделе 4.1, но на параметрическом классе решений. В разделе 4.3 приводятся результаты решения трехмерной задачи путем сведения ее к решению ряда двумерных задач в нескольких вертикальных разрезах области. При этом двумерные задачи рассматриваются как в приближении плоского деформированного состояния, так и в приближении плоского напряженного состояния. В разделе 4.4 приводятся результаты решения трехмерной обратной задачи на параметрическом классе решений для модельной области, включающей неоднородности в виде шаров и эллипсоидов, в том числе приводится решение трехмерной задачи, рассмотренной в разделе 4.3.

Раздел 5 посвящен апостериорной оценки точности найденных решений. В разделе 5.1 излагается используемый в работе метод апостериорной оценки точности. В разделе 5.2 приводятся результаты апостериорной оценки точности для приближенных решений двумерных задач, получен-

ных в разделе 4.1. В разделе 5.3 приводятся результаты апостериорной оценки точности для приближенных решений трехмерной обратной задачи квазистатической эластографии с одной неоднородностью в виде шара.

В разделе 6 приведено описание численных методов решения экстремальных задач, которые использовались для решения поставленных в работе обратных задач. В разделе 6.1 приводится описание метода доверительной области. При этом важной составляющей метода является вычисление градиента невязки, которая минимизируется при решении обратной задачи. Схема вычисления градиента дана в разделе 6.2 для решения задачи на классе гладких решений и классе функций ограниченной вариации типа Харди, а также в разделе 6.3 для решения задачи на параметрическом классе решений. В разделе 6.4 приводится описание метода минимизации Хука-Дживса, не требующего вычисления градиента.

В заключении приведены основные результаты работы.

В приложении А дан вывод уравнений теории упругости, которые используются для получения системы дифференциальных уравнений, связывающих смещения ткани и ее упругие характеристики, и постановки прямой и обратной задач. В приложении В приведен вывод уравнений плоского напряженного и плоского деформированного состояний - приближений «plane-strain» и «plane-stress» соответственно, используемых при решении двумерной обратной задачи. В приложении С изложено доказательство единственности решения прямой задачи статики упругого тела.

Заключение

Основные результаты работы заключаются в следующем:

- 1) поставлена двумерная обратная задача квазистатической эластографии на классе гладких решений и классе функций ограниченной двумерной вариации типа Харди, разработан алгоритм ее решения;
- 2) численно решены модельные обратные задачи квазистатической эластографии в двумерной области на классе гладких решений и классе функций ограниченной вариации типа Харди;

- 3) поставлена обратная задача эластографии на параметрических классах решений в двумерном и трехмерном пространствах;
- 4) разработан алгоритм решения обратной задачи эластографии на параметрических классах решений в двумерном и трехмерном пространствах. Доказана теорема о сходимости получаемого приближенного решения к точному решению задачи;
- 5) численно решены модельные задачи эластографии на параметрическом классе решений в двумерном и трехмерном пространствах;
- 6) для всех полученных численных приближенных решений найдены апостериорные оценки точности и построены зависимости этой оценки от уровня ошибки входных данных.

Список работ, опубликованных автором по теме диссертации

Статьи, опубликованные в журналах Scopus, WoS, RSCI

1. *Leonov A.S., Sharov A.N., Yagola A.G.* Solution of the three-dimensional inverse elastography problem for parametric classes of inclusions // Inverse Problems in Science and Engineering. — 2020. — Published online. — P. 1–14. DOI: 10.1080/17415977.2020.1817006. Impact Factor WoS: 1,314.
2. *Леонов А.С., Шаров А.Н., Ягола А.Г.* Решение трехмерной обратной задачи эластографии на параметрическом классе с апостериорной оценкой точности // Вестник Московского университета. Серия 3: Физика, астрономия. — 2019. — № 5. — с. 67–72; *Leonov A.S., Sharov A.N., Yagola A.G.* Solution of the inverse elastography problem in three dimensions for a parametric class with a posteriori error estimation // Moscow University Physics Bulletin, Allerton Press (New York, N.Y., United States). — 2019. — Vol. 74. — № 5. — P. 488–493. Impact Factor WoS: 0,538.
3. *Leonov A. S., Sharov A. N., Yagola A. G.* Solution of the inverse elastography problem for parametric classes of inclusions with a posteriori error estimate // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. — 2017. — Vol. 26. — № 4 — P. 493–499. Impact Factor WoS: 0,926.
4. *Leonov A. S., Sharov A. N., Yagola A. G.* A posteriori error estimates for numerical solutions to inverse problems of elastography // Inverse Problems in Science and Engineering. — 2016. — Vol. 25. — № 1 — P. 114–128. Impact Factor WoS: 1,314.

Иные публикации (сборники тезисов)

1. *Шаров А.Н., Леонов А.С., Ягола А.Г.* // Решение трехмерной обратной

задачи эластографии на параметрическом классе включений. Марчуковские научные чтения – 2019: Тезисы Международной конференции «Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики» /Ин-т вычислительной математики и матем. Геофизики СО РАН. Новосибирск, 1-5 июля 2019 г., ИПЦ НГУ Новосибирск, с. 92.

2. Шаров А.Н. // Численное решение обратной задачи эластографии на параметрических классах решений, Международная Школа-конференция молодых ученых «Математика, физика, информатика и их приложения в науке и образовании», Москва, МИРЭА, Россия, 12-15 декабря 2016, Сборник тезисов докладов, с. 166-168.
3. Шаров А.Н. // Numerical solution of inverse elastography problem for parametric classes of solutions, Международная конференция «International Workshop on Inverse and Ill-Posed Problems», Москва, Россия, 19-21 ноября 2015, Сборник тезисов докладов, с. 157-159.
4. Шаров А.Н. // Решение одной обратной задачи эластографии, Международная конференция «Бесконечномерный анализ, стохастика, математическое моделирование: новые задачи и методы», Москва, РУДН, Россия, 2014, Сборник тезисов докладов, с. 154-155.