На правах рукописи

АЛЬ НАФИЕ ЗАХИР ДОБЕАС АЗАВЕ

МНОГООБРАЗИЯ, МОДЕЛИРУЕМЫЕ В НЕНОРМИРУЕМЫХ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ВЕКТОРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ФРЕШЕ

Специальность: 01.01.01 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Казань – 2017

Работа выполнена в Казанском (Приволжском) федеральном университете.

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук, профессор ФГАОУ ВО «КФУ»

Кац Борис Александрович

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, доцент, ведущий научный сотрудник ФГБУН "Институт математики им. С.Л. Соболева"Сибирского отделения Российской академии наук

Грешнов Александр Валерьевич,

кандидат физико-математических наук, доцент ФГБОУ ВО "Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева"

Миронова Светлана Рафаиловна

Ведущая организация:

ФГАОУ ВО "Волгоградский государственный университет"

Защита состоится 9 ноября 2017 г. в 14.30 на заседании диссертационного совета Д 212.081.10 на базе ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет» по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, д. 35. Институт математики и механики им.Н.И.Лобачевского, ауд. 610.

С диссертацией можно ознакомиться в в научной библиотеке им. Н.И. Лобачевского при Казанском (Приволжском) федеральном университете по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, д. 35. Электронная версия диссертации размещена на сайте Казанского (Приволжского) федерального университета http://kpfu.ru

Автореферат разослан « » 2017 года.

Ученый секретарь

диссертационного совета Д 212.081.10

кандидат физико-математического наук, доцент Е. К. Липачев

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. В последнее время появился ряд работ, посвященных теории дифференцируемых многообразий, моделируемых в ненормируемых пространствах Фреше. Эти многообразия изучались с разных точек зрения. Так, С. Т. Додсон в своих работах [1,2,3,4,5] предложил новый метод для изучения ненормируемых пространств Фреше, рассматривая эти пространства как проективные пределы банаховых пространств. Он показал, что проективные пределы совместимы с алгебраическими структурами на модельных пространствах и с дифференциальными инструментами. Этот метод дал ему возможность изучения широкой подкатегории бесконечномерных небанаховых многообразий, а именно тех пространств, которые можно рассматривать как проективные пределы банаховых многообразий по образцу Фреше. Примеры ненормированных пространств Фреше можно найти в книге [6]

С другой стороны, А. Фрёлихер и А. Кригль в работе [7] ввели пространства, названные ими удобными (convenient) векторными пространствами. Это сопряжённые пространства к векторным пространствам, а их топология — это топология замыкания Макки. Она определяется как финальная топология относительно всех сходящихся последовательностей Макки $S\colon N_\infty = N \cup \{\infty\} \to E$. Подмножество U удобного пространства E от-

[1]Dodson C. T. J., George G., Efstathios V. Geometry in a Frechet Context: A projective limit approach // Cambridge University Press, 2015. - 289 p.

[2]Dodson C. T. J. Some recent work in Frechet geometry // Balkan J. Geometry and Its Applications. - 2012. - V. 17(2). - P. 6-21.

[3]Dodson C. T. J., Radivoiovici M. S. Tangent and frame bundles of order two // PRE. - 1980. - P. 235 -253.

[4]Dodson C. T. J., Radivoiovici M. S. Second-order tangent structures // International Journal of Theoretical Physics. - 1982. - V. 21(2). - P. 151 - 161.

[5]Dodson C. T. J., Galanis G. N. Second order tangent bundles of infinite dimensional manifolds // Journal of Geometry and Physics. - 2004. - V. 52(2). - P. 127 - 136.

[6]Рудин, У. Функциональный анализ // М. : Мир, 1975. - 449 с.

[7]Frolicher A., Kriegl A. Linear spaces and differentiation theory // A Wiley-Interscience series in pure and applied mathematics, 1988. - 259 p.

крыто относительно этой топологии тогда и только тогда, когда выполнено следующее свойство: если $x_\infty \in U$ является пределом сходящейся последовательности Макки в E, то существует индекс $n \in N$ такой, что $x_k \in U$ для всех $k \geqslant n$.

К. Андреас и М. Петер в своих работах [8,9,10] установили, что любое локально выпуклое пространство является удобным пространством, и ввели новые структуры на многообразиях, моделируемых в ненормируемых локально выпуклых пространствах, например, касательные векторы, векторные расслоения и векторные поля, а в бесконечномерной дифференциальной геометрии введены новые геометрические структуры: например, группа Ли, расслоения и связности, главные расслоения, главные связности и линейные связности.

Далее, пусть E и F — два удобных векторных пространства и E' — сопряжённое пространство к E. Кривая $\alpha\colon \mathbb{R} \to E$ называется дифференцируемой, если производная

$$\alpha'(t) = \lim_{s \to 0} \frac{\alpha(t+s) - \alpha(t)}{s}$$

существует при любых t. Она называется C^k-кривой, если её производные вплоть до k-го порядка существуют и являются непрерывными. Она называется гладкой, или C^∞-кривой, если у неё есть производные всех порядков. Эта кривая называется локально липшицевой кривой, если каждая точка $r \in \mathbb{R}$ имеет окрестность U такую, что множество

$$\left\{ \frac{\alpha(t) - \alpha(s)}{t - s} : t \neq s, t, s \in U \right\}$$

ограничено. Это значит, что кривая удовлетворяет условию Липшица на каждом ограниченном промежутке.

[8] Andreas K., Michor P. The convenient setting for real analytic mappings // Acta Mathematica. – 1990. – V. 165(1). – P. 105 – 159.

[9] Andreas K., Michor P. The convenient setting of global analysis // American Mathematical Soc, 1997. – 624 p.

[10] Andreas K., Michor P. Regular infinite dimensional Lie groups // Journal of Lie Theory. – 1997. – V. 7. – P. 61 – 99.

Далее, для $0 \leq k \leq \infty$, функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ называется k раз липшицевой дифференцируемой тогда и только тогда, когда её разностное отношение (разделённая разность) порядка $k+1$ ограничена на ограниченных множествах. Кривая α называется $\mathcal{L}ip^k$-кривой в E, если для любого $l \in E'$ суперпозиция $l \circ \alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ является k раз липшицевой дифференцируемой. В случае конечного k старшая производная (при $k = 0$ — сама функция) предполагается локально липшицевой; такие кривые называются дифференцируемыми по Липшицу.

Отображение $g\colon E \to F$ называется $\mathcal{L}ip^k$-отображением, если для каждой $\mathcal{L}ip^k$-кривой $\alpha\colon \mathbb{R} \to E$ суперпозиция $g \circ \alpha\colon \mathbb{R} \to F$ является $\mathcal{L}ip^k$-кривой в F. На открытом подмножестве U в E эти понятия вводятся следующим образом: отображение $f\colon E \supseteq U \to F$ представляет собой $\mathcal{L}ip^k$-отображение, если $f \circ \alpha$ есть $\mathcal{L}ip^k$-кривая, и это очень слабое условие, поскольку это означает, что прообраз $\alpha^{-1}(U)$ открыт в $\mathbb{R}$ для любой $\mathcal{L}ip^k$-кривой $\alpha\colon \mathbb{R} \to E$.

Кроме того, в работе А. Фрёлихера и А. Кригля дифференциал $\mathcal{L}ip^{k+1}$-отображения $g\colon E \to F$ векторных пространств с топологией замыкания Макки определяется как $\mathcal{L}ip^k$-отображение

$$dg\colon E \times E \to F, dg(x,h) = \frac{d}{dt}(g(x+th))|_{t=0}.$$

Соответственно, дифференциал n-го порядка для $n \leq k+1$ есть

$$d^n g\colon E^{n+1} \to F, d^n g(x, h_1, ..., h_n) = \frac{d}{dt}(d^{n-1}g(x+th_n, h_1, ..., h_{n-1}))|_{t=0}.$$

В случае, когда E, F — банаховы пространства (и, как было отмечено выше, топологии замыкания Макки в E, F совпадают с топологиями, индуцированными нормами), дифференциал dg совпадает с дифференциалом Гато (см., например, определение дифференциала Гато в монографии А. Н. Колмогорова и С. В. Фомина [11]). Мы считаем, что в этом и в более общим

[11] Колмогоров, А. Н., Фомин, С. В. Элементы теории функций и функционального анализа // М. : Наука, 1972. - 496 с.

случае, когда E, F являются пространствами Фреше (при этом топология замыкания Макки на пространстве Фреше совпадёт с топологией пространства Фреше), для наших целей удобнее использовать определение дифференциала (производной) n-го порядка из работы [12]

$$D^n g\colon x \in E \to D^n g(x) \in L_n(E, F), D^n g(x) = D(D^{n-1}g)(x),$$

где E, F —псевдотопологические удобные (« пригодные векторные пространства » в терминологии монографии А. Фрёлихера и В. Бухера, наделённые локально выпуклой топологией, ассоциированной с псевдотопологией). В случае, когда E, F — банаховы пространства, это определение дифференциала совпадает с определением дифференциала Фреше. А если E, F — пространства Фреше, то хотя $L_n(E, F)$ таковым не является, но оно может быть наделено структурой псевдотопологического пространства. При этом на исходных пространствах Фреше E, F, которые одновременно являются и псевдотопологическими, ассоциированная топология совпадает с исходной. Дифференциал Dg, в отличие от dg, обладает многими свойствами классического дифференциала: выполняется « цепное » правило дифференцирования сложного отображения, отображение « вычисления » $(x, f) \in F \times L(F, G) \to f(x) \in G$ дифференцируемо, существует аналог теоремы о конечных приращениях. Определение $\mathcal{L}ip^k$-отображения пространств Фреше мы сохраним таким, каким оно было дано выше. Отметим, что между множествами $\mathcal{L}ip^k$-отображений и C^k-отображений двух пространств Фреше имеются включения: $C^{k+1} \subset \mathcal{L}ip^k \subset C^k$, $k \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, $\mathcal{L}ip^\infty = C^\infty$.

Определения борнологического множества, векторной борнологии, борнологического векторного пространства (векторное пространство вместе с векторной борнологией) и выпукло борнологического пространства (борнологическое векторное пространство, для которого выпуклая оболочка каждого ограниченного множества также ограничена), категории топологических пространств, категории векторных пространств сходимости и категории борно-

---

[12] Фрёлихер, А.,Бухер В. Дифференциальное исчисление в векторных пространствах без нормы // М. : Мир, 1970. - 168 с.

логических векторных пространств сходимости можно найте в работе А. Фрёлихера и А. Кригля.

Обозначим через $\underline{Top}$ категорию топологических пространств, $\underline{LimVS}$ категорию векторных пространств сходимости и $\underline{bLimVS}$ категорию борнологических векторных пространств сходимости.

Функтор $\tau\colon \underline{Lim} \to \underline{Top}$ ограниченный на подкатегорию $\underline{bLimVS} \subset \underline{Lim}$, является левым обратным к функтору вложения $\mathfrak{f}\colon \underline{Top} \to \underline{Lim}$, т.е. $\tau \circ \mathfrak{f} = id$.

В дальнейшем мы будем иметь дело с пространствами Фреше и банаховыми пространствами, которые являются борнологичными. Борнологию на них образуют ограниченные множества. Поэтому если F — пространство Фреше, то $\mathfrak{f}(F) \in \underline{bLimVS}$.

Тогда $\tau(\mathfrak{f}(F)) = F \in \underline{Top}$ и топология замыкания Макки на F совпадает с исходной топологией пространства Фреше F.

Поскольку метризуемость влечет за собой борнологичность, полнота является локальной полнотой. Каждое метризуемое локально выпуклое пространство является борнологическим [13], а удобные топологические пространства обладают этими двумя свойствами (борнологией и локальной полнотой), и поэтому ненормируемые пространства Фреше могут быть рассмотрены как удобные топологические векторные пространства, имеющие все свойства удобных пространств. Это предположение позволяет нам изучать многие свойства бесконечномерных многообразий, не являющихся банаховыми, а именно тех, которые моделируются на ненормируемых многообразиях Фреше класса $\mathcal{L}ip^k$, то есть на $\mathcal{L}ip^k$-многообразиях Фреше.

По нашему мнению, риманова геометрия банаховых и гильбертовых многообразий достаточно развита. Естественным развитием этих исследований является переход к изучению аналогов геометрических структур на бесконечномерных многобразиях, моделируемых в векторных топологических

[13] Jarchow H. Locally convex spaces // Springer Science and Business Media 2012. Mathematische Leitfaden, 1981. – 543 p.

пространствах, не допускающих введения совместимой с их топологией нормы.

Этим вопросам и посвящена данная диссертация. В ней предлагается способ решения вышеуказанных проблем в предположении, что ненормирумые пространства являются удобными топологическими векторными пространствами. Это предположение позволяет нам изучать многие свойства бесконечномерных многообразий, не являющихся банаховыми, а именно тех, которые моделируются на ненормируемых многообразиях Фреше класса $\mathcal{L}ip^k$, то есть на $\mathcal{L}ip^k$-многообразиях Фреше.

Цель работы состоит в обобщении критериев паракомпактности, методов построения разбиений единицы и проектирования связностей в главных расслоениях на многообразия, моделируемые на ненормируемых пространствах Фреше, в том числе на $\mathcal{L}ip^k$ или $\mathcal{L}ip^k$-многообразиях Фреше.

Методы исследований. Известно, что любое ненормируемое топологическое векторное пространство Фреше является удобным векторным пространством. Мы определяем максимальный атлас карт, используя тот же класс дифференцируемости, который имеют удобные векторные пространства, и определяем новый тип многообразия Фреше этими максимальными атласами.

В доказательстве того, что многообразия Фреше, моделируемые в ненормируемых пространствах, являются паракомпактными, использованы метод работы [14] и метод работы[9] для построения разбиений единицы на этих многообразиях.

Для определения связности в главном расслоении над ненормируемыми многообразиями Фреше класса $\mathcal{L}ip^k$ и для построения $\mathcal{L}ip^k$-главных связностей использованы методы работы [9].

Научная новизна. Получены следующие новые научные результаты для $\mathcal{L}ip^k$-многообразий Фреше.

[14]Bonic, R. Smooth functions on Banach manifolds / R. Bonic, J. Frampton // Journal of Mathematics and Mechanic. - 1966. - N. 5. - P. 877 - 898.

1. В работе доказана следующая теорема. Пусть M — паракомпактное дифференцируемое многообразие класса C^n, $n = 1, 2, ..., \infty$, моделируемое в банаховом пространстве B с нормой $\|.\|$. Если существует строго монотонная биективная вещественная функция $f\colon [0,+\infty] \to [0,+\infty]$ такая, что суперпозиция $f \circ \|.\|$ есть вещественнозначная функция класса C^n на B, то на M существует разбиение единицы класса C^n.

2. Доказана теорема о $\mathcal{L}ip^k$-паракомпактности многообразия Фреше класса $\mathcal{L}ip^k$.

3. В работе доказано, что если E есть ненормируемое топологическое пространство Фреше, то оно является $\mathcal{L}ip^k$-нормальным.

4. Доказана теорема о том, что если $\pi\colon \Xi \to \mathcal{B}$ является $\mathcal{L}ip^k$-векторным расслоением со стандартным слоем L и базовое пространство $\mathcal{B}$ моделируется на ненормируемом пространстве Фреше, то тотальное пространство Ξ является $\mathcal{L}ip^k$-паракомпактным.

5. В работе доказана следующая теорема. Пусть M является $\mathcal{L}ip^k$ - многообразием, моделируемым на ненормируемом пространстве Фреше F, тогда $\mathcal{L}ip^k$-кинематическое касательное расслоение TM является $\mathcal{L}ip^k$-паракомпактным.

6. Доказана теорема о том, что любое $\mathcal{L}ip^\infty$-главное локально тривиальное расслоение $(\mathcal{P}, \pi, \mathcal{B}, G)$ с базой $\mathcal{B}$, моделируемой на ненормируемом пространстве Фреше, допускает $\mathcal{L}ip^\infty$-главные связности.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Ее результаты и методы могут быть использованы при дальнейшем изучении аналитических и геометрических структуры на бесконечномерных многообразиях модилируемых в ненормируемых векторных пространствах Фреше и для более общих случаев, например, для геометрий Римана и Финслера.

Апробация работы. Основные результаты работы представлены на следующих научных конференциях:

- 5-я Международная конференция «Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения» Ростов-на-Дону, Институт математики, механики и компьютерных наук, Южный федеральный университет, 26 Апреля – 1 Мая 2015).
- Международная конференция по алгебре, анализу и геометрии (Казань, Институт математики и механики им. Н. И. Лобачевского, Казанский (приволжский) федеральный университет, 26 Июня – 2 Июля 2016).
- 13-я Международная научно-практическая конференция «Достижения и проблемы современной науки» (Санкт-Петербург, 4 Ноября 2016).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 6 печатных работ, из них 3 в ведущих научных журналах, рекомендованных ВАК, 3 в материалах международных конференций (РИНЦ).

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав основного текста, разбитых на 7 параграфов, списка обозначений и списка литературы. Полный объём диссертации составляет 92 страницы. Списка литературы из 94 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** дан краткий исторический очерк проблематики диссертации, обозначены цели, основные результаты диссертации, методы исследований, научная новизна, теоретическая и практическая ценность и апробация работы. Также во введении указаны публикации автора по теме диссертации, объем и структура работы и обзор литературы.

Первая глава посвящена доказательству паракомпактности бесконечномерных многообразий со счётной базой, моделируемых в топологических векторных пространствах, критерия $\mathcal{L}ip^k$-паракомпактности бесконечномерных многообразий, моделируемых в ненормируемых топологических векторных пространствах Фреше F, и достаточных условий существования разбиения единицы на них.

Глава состоит из двух параграфов:

§1 Разбиение единицы на гладком банаховом многообразии

§2 Разбиение единицы на $\mathcal{L}ip^k$-многообразии Фреше

Целью исследований этой главы являются достаточные условия того, что многообразие допускает разбиение единицы. Топологический аспект этой проблемы несложен. Известно, что каждое метрическое пространство паракомпактно и что на каждом паракомпактном пространстве существует непрерывное разбиение единицы. Однако в случае бесконечномерных многообразий при построении дифференцируемых разбиений единицы возникают трудности.

В §1 сформулировано и доказано достаточное условие существования гладкого разбиения единицы на гладком банаховом многообразии со счётной базой.

Пусть X — топологическое пространство. Покрытие пространства называется локально конечным, если у каждой точки имеется окрестность, пересекающаяся лишь с конечным числом элементов покрытия. Измельчение покрытия пространства X — это другое покрытие, каждый элемент которого содержится в элементе первого. Топологическое пространство называется паракомпактным, если оно хаусдорфово и для каждого его открытого покрытия существует локально конечное измельчение.

Многообразием M будем называть хаусдорфово топологическое пространство со счётной базой, каждая точка $x \in M$ которого обладает открытой окрестностью U, гомеоморфной открытому множеству в топологическом векторном пространстве L. Соответствующий гомеоморфизм $\varphi\colon U \to \varphi(U) \subset L$ вместе с областью его определения U как обычно будем называть картой (U, φ) многообразия M в окрестности точки x. Множество карт $\{(\varphi_i, U_i)\}_{i \in I}$ такое, что $\cup_{i \in I} U_i = M$, будем называть атласом многообразия

M (или L-атласом). При этом будем говорить, что многообразие M моделируется в L, а L назовем пространством моделей[15]

Наличие у многообразия свойства паракомпактности весьма важно, как с точки зрения существования на многообразии разбиения единицы, так и для построения других конструкций, см., например[14]

Теорема 1. *Пусть M — паракомпактное дифференцируемое многообразие класса C^n, $n = 1, 2, ..., \infty$, моделируемое в банаховом пространстве B с нормой $\|.\|$. Если существует строго монотонная биективная вещественная функция $f\colon [0, +\infty] \to [0, +\infty]$ такая, что суперпозиция $f \circ \|.\|$ есть вещественнозначная функция класса C^n на B, то на M существует разбиение единицы класса C^n.*

Для доказательства теоремы 1 мы установили следующие вспомогательные факты.

Лемма 1. *При условиях теоремы 1 существует такая вещественная функция $\psi\colon B \to \mathbb{R}$ класса C^n, что $\psi(x) = 1$ при $x \in B_1(0)$, где $B_1(0)$ является открытым шаром радиуса 1 с центром в точке 0, и $\psi(x) = 0$ при $\|x\| \geq 1 + \delta$, где $\delta > 0$ мало.*

Лемма 2. *Пусть U — открытый шар в банаховом пространстве B и $V = U \cap \overline{U_1}^c \cap .... \cap \overline{U_m}^c$ — зубчатое открытое подмножество. Тогда в условиях теоремы 1 существует такая вещественная функция $\omega\colon B \to \mathbb{R}$ класса C^n, что $\omega(x) > 0$ при $x \in V$ и $\omega(x) = 0$ при $x \notin V$.*

Лемма 3. *Пусть A_1 и A_2 — непустые замкнутые непересекающиеся подмножества банахова пространства B. Тогда в условиях теоремы 2 существует такая функция $\psi\colon B \to \mathbb{R}$ класса C^n, что $0 \leq \psi(x) \leq 1$, $\psi(x) = 0$ при $x \in A_1$ и $\psi(x) = 1$ при $x \in A_2$.*

---

[15]Ленг, С. Введение в теорию дифференцируемых многообразий / С. Ленг. – М. : Мир, 1967. – 204 с.

В §2 доказывается критерий $\mathcal{L}ip^k$-паракомпактности. Установлено, что для $\mathcal{L}ip^k$-паракомпактности бесконечномерного многообразия, моделируемого в ненормируемом топологическом векторном пространстве Фреше F, необходимо и достаточно, чтобы пространство моделей F было паракомпактно и $\mathcal{L}ip^k$-нормально. Доказывается достаточное условие существования $\mathcal{L}ip^k$-разбиения единицы на $\mathcal{L}ip^k$-многообразии Фреше.

Пусть X — топологическое векторное пространство с топологией τ. X называется метризуемым, если топология τ совместима с некоторой метрикой. X называется нормируемым, если в нем существует такая норма, что индуцированная ею метрика совместима с топологией τ.

Если $\mathscr{P} = \{P_i\}_{i=1}^{\infty}$ — счетное разделяющее семейство полунорм на X, то теорема 1.37 из[6] показывает, что $\mathscr{P}$ индуцирует топологию τ со счетной локальной базой. По теореме 1.24 из[6] топология τ метризуема. В данной ситуации инвариантная относительно сдвигов метрика, совместимая с τ, может быть определена прямо по полунормам $\{P_i\}$ и

$$d(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2^{-i} P_i(x-y)}{1 + P_i(x-y)}, \quad x, y \in X.$$

Мы будем изучать топологическое векторное пространство Фреше, которое не является нормируемым (то есть его топология порождается семейством полунорм $\mathscr{P}$).

Пусть X — хаусдорфово топологическое векторное пространство. Обозначим через $C(X,\mathbb{R})$ алгебру непрерывных функций на X с вещественными значениями. Подалгебра $\mathcal{L}ip^k(X,\mathbb{R}) \subseteq C(X,R)$ состоит из $\mathcal{L}ip^k$-функций из X в $\mathbb{R}$. Её элементы называются $\mathcal{L}ip^k$-функциями, или гладкими функциями класса $\mathcal{L}ip^k$ на X. Если $\gamma = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — открытое покрытие X, то для любого $U_\alpha \in \gamma$ сужение f на U_α принадлежит $\mathcal{L}ip^k(U_\alpha, \mathbb{R})$. Очевидно,

$$\frac{1}{f} \in \mathcal{L}ip^k \ \text{ при } \ f \in \mathcal{L}ip^k, \ \text{ если } \ f > 0.$$

Чтобы убедиться в этом, необходимо выбрать положительные функции $h_n \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, равные $h_n(t) = \dfrac{1}{t}$ при $t \geqslant \dfrac{1}{n}$. Тогда $h_n \circ f \in \mathcal{L}ip^k$ и $\dfrac{1}{f} = h_n \circ f$

на множестве $\left\{x : f(x) > \dfrac{1}{n}\right\}$. Следовательно $\dfrac{1}{f} \in \mathcal{L}ip^k$.

Определение 1. *Хаусдорфово топологическое векторное пространство X называется $\mathcal{L}ip^k$-нормальным, если для его любых двух непересекающихся замкнутых подмножеств A_1 и A_2 существует функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ класса $\mathcal{L}ip^k$ такая, что $f(x) = 0$ при $x \in A_1$ и $f(x) = 1$ при $x \in A_2$.*

Определение 2. *Пусть X — хаусдорфово топологическое векторное пространство. $\mathcal{L}ip^k$-разбиение единицы на X есть множество λ функций $f\colon X \to \mathbb{R}$ класса $\mathcal{L}ip^k$, которые удовлетворяют следующим условиям:*

(1) для любого $f \in \lambda$ $f \geq 0$,

(2) множество $\{supp\, f : f \in \lambda\}$ всех носителей есть локально конечное покрытие X,

(3) $\sum_{f\in\lambda} f(x) = 1$ для любого $x \in X$.

Разбиение единицы называется подчиненным открытому покрытию U пространства X, если носитель любой функции $f \in \lambda$ лежит в каком-либо множестве этого покрытия.

Определение 3. *Хаусдорфово топологическое векторное пространство X называется $\mathcal{L}ip^k$-паракомпактным, если каждое его открытое покрытие $\gamma = \{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ допускает подчиненное ему $\mathcal{L}ip^k$-разбиение единицы.*

Очевидно, что $\mathcal{L}ip^k$-паракомпактное пространство является $\mathcal{L}ip^k$-нормальным.

Пусть E — топологическое векторное пространство Фреше. Карта (U, φ) на множестве M представляет собой биективное отображение $U \to \varphi(U) \subseteq E$ подмножества $U \subseteq M$ на открытое подмножество $\varphi(U)$ пространства Фреше E. $\mathcal{L}ip^k$-атлас (или атлас класса $\mathcal{L}ip^k$) на множестве M

представляет собой семейство карт $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}_{\alpha\in A}$ такое, что вместе они покрывают M и для любых двух карт $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ и (U_β, φ_β) на M отображение $\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ является $\mathcal{L}ip^k$-отображением, а множества $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ и $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ открыты.

Два $\mathcal{L}ip^k$-атласа на множестве M называются $\mathcal{L}ip^k$-эквивалентными, если их объединение даст $\mathcal{L}ip^k$-атлас. Класс эквивалентности $\mathcal{L}ip^k$-атласа иногда называется $\mathcal{L}ip^k$-структурой на M. Объединение всех атласов в классе эквивалентности, в свою очередь, является атласом, который называется максимальным атласом для этой $\mathcal{L}ip^k$-структуры.

$\mathcal{L}ip^k$-многообразие с модельным пространством E (или многообразие Фреше класса $\mathcal{L}ip^k$, или $\mathcal{L}ip^k$-многообразие Фреше) есть множество M вместе с его $\mathcal{L}ip^k$-структурой. Другими словами, — это множество M вместе с классом эквивалентности $\mathcal{L}ip^k$-атласов на M или, что эквивалентно, с максимальным $\mathcal{L}ip^k$-атласом.

Определение 4. *Отображение $f\colon M \to N$ двух $\mathcal{L}ip^k$-многообразий M и N называется $\mathcal{L}ip^k$-отображением, если для любого $x \in M$ и для любой карты (V, ψ) на N в $f(x) \in V$ существует карта (U, φ) на M в $x \in U$, $f(U) \subseteq V$, такая, что $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ является $\mathcal{L}ip^k$-отображением. Иначе говоря, $f \circ c$ является $\mathcal{L}ip^k$-функцией для каждой $\mathcal{L}ip^k$-кривой $c\colon \mathbb{R} \to M$. Пространство всех $\mathcal{L}ip^k$-отображений из M в N мы обозначим $\mathcal{L}ip^k(M, N)$.*

Определение 5. *$\mathcal{L}ip^k$-отображение $f\colon M \to N$ называется $\mathcal{L}ip^k$-диффеоморфизмом, если оно биективно, и его обратное также является $\mathcal{L}ip^k$-отображением. Два многообразия называются $\mathcal{L}ip^k$-диффеоморфными, если между ними существует $\mathcal{L}ip^k$-диффеоморфизм.*

Естественной топологией многообразия M является идентификационная топология относительно некоторого $\mathcal{L}ip^k$-атласа $(\varphi_\alpha\colon M \supseteq U_\alpha \to \varphi_\alpha(U_\alpha) \subseteq E_\alpha)$, где подмножество $W \subseteq M$ является открытым в том и только в том случае, когда $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap W)$ является открытым в E_α для любых α.

Эта топология зависит только от структуры, поскольку диффеоморфизмы являются гомеоморфизмами для топологии замыканий Макки. Это также финальная топология всех обратных отображений в некотором атласе и финальная топология всех $\mathcal{L}ip^k$-кривых.

Теорема 2. Пусть E — ненормируемое пространство Фреше и замкнутые непересекающиеся подмножества A, B лежат в E. Тогда существует такая функция $f \in \mathcal{L}ip^k(E, \mathbb{R})$, что $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$ для любого $x \in E$, $f(x) = 0$ при $x \in A$ и $f(x) = 1$ при $x \in B$.

Теорема 3. Если многообразие M моделируемо в ненормируемом пространстве Фреше E, то оно допускает $\mathcal{L}ip^k$-разбиение единицы.

Теорема 4. Пусть M — многообразие Фреше класса $\mathcal{L}ip^k$, а E — ненормируемое пространство Фреше с семейством полунорм $\|.\|_k$, $k = 1, \ldots,$. Если $f \in C^0(M, E)$ и $p > 0$, $p \in C^0(M, \mathbb{R})$, то существует отображение $g \in \mathcal{L}ip^k(M, E)$ такое, что $d(g(x), f(x)) < p(x)$ для всех $x \in M$; здесь $d(\cdot, \cdot)$ — стандартная метрика в E.

Во **второй главе** построены сечение векторных расслоений над $\mathcal{L}ip^k$-многообразиями Фреше и касательное пространство этого многообразия.

Глава состоит из двух параграфов:

§3 Векторные расслоения над $\mathcal{L}ip^k$-многообразиями Фреше

§4 Касательные расслоения $\mathcal{L}ip^k$-многообразий Фреше

В §3 над $\mathcal{L}ip^k$-многообразиями Фреше определены векторное расслоение, сечение этого расслоения и $\mathcal{L}ip^k$- кинематическое касательное расслоение $\mathcal{L}ip^k$-многообразия Фреше.

Определение 6. Пусть $\pi\colon \Xi \to \mathcal{B}$ является $\mathcal{L}ip^k$-отображением $\mathcal{L}ip^k$-многообразий Фреше Ξ и $\mathcal{B}$, и пусть U — открытое подмножество в $\mathcal{B}$, $\varphi\colon \pi^{-1}(U) \to U \times S$, где S — фиксированное $\mathcal{NF}$-пространство (S называется *стандартным слоем*). Тогда пара (U, φ) называется $\mathcal{L}ip^k$-картой векторного расслоения $(\Xi, \pi, \mathcal{B})$, если отображение φ является сохраняющем слои $\mathcal{L}ip^k$- диффеоморфизмом согласно следующей коммутативной диаграмме:

$$\begin{tikzcd} \Xi \mid U := \pi^{-1}(U) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] & U \times S \arrow[dl, "pr_1"] \\ U & \end{tikzcd}$$

Определение 7. Две $\mathcal{L}ip^k$-карты $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, $(U_\delta, \varphi_\delta)$ векторного расслоения называются согласованными, если $\varphi_\alpha \circ \varphi_\delta^{-1}$ является линейным изоморфизмом стандартного слоя, то есть

$$\varphi_\alpha \circ \varphi_\delta^{-1}(x, v) = (x, \lambda_{\alpha\delta}(x)v)$$

для некоторого $\mathcal{L}ip^k$- отображения

$$\lambda_{\alpha\delta}\colon x \in U_\alpha \cap U_\delta \to \lambda_{\alpha\delta}(x) \in GL(S) \subseteq \mathscr{L}(S, S)$$

где $\lambda_{\alpha\delta}(x)$– линейный непрерывный изоморфизм стандартного слоя S. Он называется отображением склейки двух $\mathcal{L}ip^k$-карт векторного расслоения.

Определение 8. Пусть $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ является открытым покрытием $\mathcal{B}$. Множество попарно согласованных $\mathcal{L}ip^k$-карт $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ векторного расслоения называется $\mathcal{L}ip^k$-атласом векторного расслоения $\pi\colon \Xi \to \mathcal{B}$ и обозначается $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$.

$\mathcal{L}ip^k$-векторное расслоение $\pi\colon \Xi \to \mathcal{B}$ состоит из многообразия Ξ (тотального пространства), $\mathcal{B}$ (базы) и $\mathcal{L}ip^k$-отображения $\pi\colon \Xi \to \mathcal{B}$ (проекции), а также из класса эквивалентности $\mathcal{L}ip^k$-атласов векторных расслоений.

Сечение $\mathcal{L}ip^k$-векторного расслоения $\pi\colon \Xi \to \mathcal{B}$ — это такое $\mathcal{L}ip^k$-отображение $\zeta\colon \mathcal{B} \to \Xi$, что $\pi \circ \zeta = id_{\mathcal{B}}$.

Определение 9. $\mathcal{L}ip^k$-кинематическим касательным расслоением многообразия M назовем соответствующее фактор-множество, обозначим его TM. Пусть $\Lambda_M\colon TM \to M$ задается формулой $\Lambda_M([x, v, \alpha]) = x$, пусть

$TU_\alpha = \Lambda_M^{-1}(U_\alpha) \subset TM$, и пусть $T\varphi_\alpha \colon TU_\alpha \to \varphi_\alpha(U_\alpha) \times E_\alpha$ задано формулой $T\varphi_\alpha([x, v, \alpha]) = (\varphi_\alpha(x), v)$. Таким образом,

$$T\varphi_\alpha([x, w, \delta]) = (\varphi_\alpha(x), d(\varphi_{\alpha\delta})(\varphi_\delta(x))w).$$

В §4 определено касательное пространство $\mathcal{L}ip^k$-многообразий Фреше и доказана теорема о $\mathcal{L}ip^k$-паракомпактности кинематического касательного расслоения $\mathcal{L}ip^k$-многообразия Фреше.

Теорема 5. Пусть $\pi \colon \Xi \to \mathcal{B}$ является $\mathcal{L}ip^k$-векторным расслоением со стандартным слоем S. Тогда тотальное пространство Ξ является $\mathcal{L}ip^k$-паракомпактным, если базовое пространство $\mathcal{B}$ моделируется на ненормируемом пространстве Фреше.

В третьей главе построена группа Ли класса $\mathcal{L}ip^\infty$ и определена связность на $\mathcal{L}ip^k$-расслоениях $\mathcal{L}ip^k$-многообразий Фреше; определена $\mathcal{L}ip^\infty$-главная связность.

Глава состоит из трех параграфов:

§5 Построение группы Ли класса $\mathcal{L}ip^\infty$

§6 Связность на $\mathcal{L}ip^k$-расслоениях

§7 $\mathcal{L}ip^\infty$-главные связности

В §5 построена группа Ли класса $\mathcal{L}ip^\infty$ и доказаны несколько лемм, посвященных построению связности и главной связности.

Определение 10. Группой Ли G класса $\mathcal{L}ip^\infty$ называется многообразие, моделируемое на удобном векторном пространстве с групповой структурой такой, что операции умножения $m \colon G \times G \to G$ и взятия обратного элемента $i \colon G \to G$ являются $\mathcal{L}ip^\infty$-отображениями.

В §6 определено $\mathcal{L}ip^k$-локально тривиальное расслоение и определена связность на $\mathcal{L}ip^k$-локально тривиальных расслоениях.

Определение 11. $\mathcal{L}ip^k$-локально тривиальное расслоение $(\Xi, \pi, \mathcal{B}, \mathcal{W})$ состоит из $\mathcal{L}ip^k$-многообразий $\Xi, \mathcal{B}, \mathcal{W}$ и $\mathcal{L}ip^k$-отображения $\pi\colon \Xi \to \mathcal{B}$. Более того, любая точка $x \in \mathcal{B}$ обладает открытой окрестностью U такой, что $\Xi|U := \pi^{-1}(U)$ диффеоморфно $U \times \mathcal{W}$ и соответствующий диффеоморфизм сохраняет слои : $pr_1 \circ \varphi = \pi$

$$\begin{tikzcd} \Xi \mid U \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"] & U \times \mathcal{W} \arrow[dl, "pr_1"] \\ U & \end{tikzcd}$$

Определение 12. Ξ называется тотальным пространством, $\mathcal{B}$ — базовым пространством или базой, π является сюръектиным $\mathcal{L}ip^k$- отображением, называемым проекцией, и $\mathcal{W}$ называется стандартным слоем. (U, φ) называется $\mathcal{L}ip^k$-картой расслоения.

Определение 13. Связность на $\mathcal{L}ip^k$-локально тривиальном расслоении $(\Xi, \pi, \mathcal{B}, \mathcal{W})$ — это векторнозначная 1-форма $\Delta \in \Omega^1(\Xi, V\Xi)$ со значениями в вертикальном расслоении $V\Xi$ такая, что $\Delta \circ \Delta = \Delta$ и $im\Delta = V\Xi$, откуда Δ — просто проекция $T\Xi \to V\Xi$.

В §7 определено $\mathcal{L}ip^\infty$-локально главное тривиальное расслоение и построена $\mathcal{L}ip^\infty$-главная связность на $\mathcal{L}ip^\infty$-локально главных тривиальных расслоениях.

Определение 14. $\mathcal{L}ip^\infty$- главное локально тривиальное расслоение $(\mathcal{P}, \pi, \mathcal{B}, G)$ — это $\mathcal{L}ip^\infty G$-расслоение со стандартным слоем, являющимся группой G, где левое действие G на G — это просто левый перенос.

Пусть $(\mathcal{P}, \pi, \mathcal{B}, G)$ является $\mathcal{L}ip^\infty$-главным локально тривиальным расслоением. Напомним, что (общая) связность на $\mathcal{P}$ — это проекция слоев $\Delta\colon T\mathcal{P} \to V\mathcal{P}$, рассматриваемая как 1-форма в $\Omega^1(\mathcal{P}, V\mathcal{P}) \subset \Omega^1(\mathcal{P}, T\mathcal{P})$. Такая связность Δ называется $\mathcal{L}ip^\infty$-главной связностью, если она является G-эквивариантной для главного правого действия $r\colon \mathcal{P} \times G \to \mathcal{P}$, таким образом, $T(r^g) \cdot \Delta = \Delta \cdot T(r^g)$ и Δ являются r^g-связанными с самими собой.

Теорема 6. Любое $\mathcal{L}ip^{\infty}$-главное локально тривиальное расслоение $(\mathcal{P}, \pi, \mathcal{B}, G)$ с базой $\mathcal{B}$, моделируемой на ненормируемом пространстве Фреше, допускает $\mathcal{L}ip^{\infty}$-главные связности.

Публикации по теме диссертации в изданиях, рекомендованных ВАК

[1] Аль Нафие, Захир Добеас. О паракомпактности бесконечномерных многообразий / Захир Добеас Аль Нафие, С. Б. Климентов // Известия вузов. Северо-кавказский регион. – 2014. – Т. 180. – Вып. 2 – С. 5 – 7.

[2] AL-Nafie, Z. D. Vector bundles over a non normable Frechet manifolds via $\mathcal{L}ip^k$-Structures / Z. D. AL-Nafie // Успехи современной науки и образования. – 2016. – Т.7 – Вып. 10 – С. 151 – 154.

[3] Аль Нафие, З. Д. Разбиение единицы на бесконечномерном многообразии класса $\mathcal{L}ip^k$ / З. Д. Аль Нафие // Известия вузов. Математика. Вышла из печати. - 2017. N 10.

Другие публикации автора по теме диссертации

[4] Аль Нафие, З. Д. Паракомпактность липшицевых многообразий над пространствами Фреше / З. Д. Аль Нафие // Международная конференция по алгебре, анализу и геометрии: материалы конф., / Казанский (Приволжский) федеральный университет. Казань. – 2016. – С. 87 – 88.

[5] Климентов, С. Б. О паракомпактности бесконечномерных многообразий / С. Б. Климентов, З. Д. Аль Нафие // 5-ая Международная конференция.Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения / Южный федеральный университет. Ростов-на-Дону. – 2015. – С. 37.

[6] AL-Nafie, Z. D. Some notes on a tangent space of a non normable Frechet manifold via $\mathcal{L}ip^k$-Structures / Z. D. AL-Nafie // 13-я Международная научно-практическая конференция Достижения и проблемы современной науки: материалы конф. / Научный журнал Globus. Санкт-Петербург. – 2016. – С. 101 – 105.

Подписано в печать 15.09.2017.
Бумага офсетная. Печать цифровая.
Формат 60x84 1/16. Гарнитура «Times New Roman». Усл. печ. л. 1,16.
Уч.-изд. л. 1,12. Тираж 100 экз. Заказ 164/9

Отпечатано с готового оригинал-макета
в типографии Издательства Казанского университета

420008, г. Казань, ул. Профессора Нужина, 1/37
тел. (843) 233-73-59, 233-73-28

20