

На правах рукописи

Аванесов Ашот Сергеевич

**Динамика открытых систем в квантовой теории
информации с использованием вероятностного
представления квантовых состояний**

Специальность 01.04.02 —
«Теоретическая физика»

Автореферат диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д.ф.-м.н.
Манько Владимир Иванович

Москва — 2022

Работа выполнена в на кафедре квантовой радиофизики федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)».

Научный руководитель: доктор физико-математических наук
Манько Владимир Иванович

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Физико-технологический институт имени К.А. Валиева Российской академии наук

Защита состоится 18.03.2022 в 14:00 на заседании диссертационного совета ЛФИ.01.04.02.007 по адресу 141701, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский переулок, д. 9.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте Московского физико-технического института (национального исследовательского университета) <https://mipt.ru/education/post-graduate/soiskateli-fiziko-matematicheskie-nauki.php>.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
к.ф.-м.н.

Кузьмичев Павел Константинович

Актуальность работы

В работе рассматриваются задачи, связанные с одной из формулировок квантовой механики - томографическим вероятностным представлением. Данный подход к рассмотрению квантовых состояний с одной стороны является развитием формализма звёздочного произведения и функций распределений квазивероятностей, а с другой - относится к задачам восстановления квантовых состояний по результатам измерений. Кроме того, в работе уделяется внимание применению квантовоподобного формализма к описанию состояний классических систем.

Томографические вероятностные представления позволяют единым образом описывать и квантовые, и классические системы. В обоих случаях, состояния задаются наборами распределений вероятностей. Таким образом, данный подход позволяет по-новому формулировать основные положения квантовой механики, а также даёт альтернативный взгляд на классически-квантовый переход.

В последнее время направление вероятностных представлений получает значительное развитие. Представляют интерес задачи связанные с построением новых томографических функций, с изучением их особенностей и связей с другими объектами, задающими состояния физических систем. Кроме того, использование дуализма между квантовыми состояниями и каналами позволяет распространить рассматриваемый подход задания состояний на квантовые преобразования.

Степень разработанности

Построение представлений квантовых состояний можно рассматривать в контексте формализма звёздочного произведения, в котором операторам ставится в соответствие алгебра s -числовых функций, называемых символами, с определённой на ней операцией ассоциативного умножения. Преобразования между операторами и соответствующими символами осуществляется при помощи двух операторных базисов - квантайзеров и деквантайзеров. Символы, для которых квантайзеры и деквантайзеры совпадают называются самодуальными. Примером самодуального символа матрицы плотности может служить функция Вигнера [1].

В работах [2; 3] была введена оптическая томограмма, которая получается при помощи преобразования Радона [4] функции Вигнера [1]. В силу обратимости данного преобразования, по значениям томографической функции возможно восстановить значения функции Вигнера. При этом было показано [3], что значения оптической томограммы представляют собой набор распределений вероятностей, которые наблюдаются при гомодинировании.

В работе [5] было построено представление, в котором состояния квантовых систем задавались неотрицательной функцией - симплектической томограммой, представляющей собой обобщение оптической томограммы. Таким образом, квантовая механика может быть сформулирована в терминах условных распределений вероятностей. Исходно, симплектическая томограмма строилась для одномодовых (одночастичных) систем. Для многомодового случая существует несколько способов построения симплектической томограммы: многомерная симплектическая томограмма и томограмма центра масс [6; 7], а также кластерная томограмма [8]. Каждая из этих функций определена на гиперплоскостях определённых размерностей в фазовом пространстве.

Примером вероятностного представления, применимого для описания систем дискретных переменных (кудитов) и получившем в последнее время определённое развитие, может служить дихотомное представление, в котором состояние кудита задаётся набором двумерных распределений вероятностей. В работах [9; 10] рассматривалось использование трёх томографических вероятностей для описания состояния кубита. Данный формализм был расширен на прочие кудитные системы [11], причём состояние произвольного кудита оказалось возможным определять как набор распределений вероятностей дихотомных случайных величин, ассоциированных с фиктивными кубитными подсистемами.

Для описания состояний кудитов можно использовать формализм фазового пространства. В диссертационной работе используется определения дискретной функции Вигнера и дискретного фазового пространства, введенные в [12]. Как и её непрерывный аналог, дискретная функция Вигнера может принимать отрицательные значения. Эта особенность связывалась с проблемой ускорения квантовых вычислений [13; 14].

Формализм квантовой механики может быть использован и для описания классических систем [15; 16]. Данный формализм используется как для исследований в области оснований квантовой механики [17], так и при изучении динамики классических и квантовых систем [18].

В силу известного дуализма между квантовыми состояниями и каналами [19; 20], для описания последних возможно использовать все те же объекты, что и для описания состояний. Так, например, преобразование состояния квантовой систем может задаваться посредством функции Вигнера. При этом её неотрицательность свидетельствует о возможности эффективной симуляции динамики квантовой системы на классическом компьютере [14].

В диссертационной работе представлено развитие некоторых вероятностных представлений квантовых состояний и каналов и использование исследуемого формализма для описания динамики открытых систем на примере модельных задач.

Цель работы

Целью данной работы является развитие предложенного дихотомного вероятностного представления кудитных состояний, а также построение новых томографических функций кудитных состояний, представляющих собой аналоги томограммы центра масс и кластерной томограммы, и определённых на линейных подпространствах дискретного фазового пространства. Кроме того, представляют интерес вопросы, связанные с описанием классических систем квантовоподобным образом.

Для достижения поставленных целей были решены следующие задачи:

1. По теме построения дискретных аналогов томограммы центра масс и кластерной томограммы:
 - а) Построение дискретной томограммы центра масс, поиск соответствующих квантайзеров и деквантайзеров.
 - б) Построение семейства геометрических символов, определённых на линейных подпространствах дискретного фазового пространства, поиск условий неотрицательности и выражений для квантайзеров и деквантайзеров.
 - в) Построение дискретной кластерной томограммы, как частного случая геометрических символов.
2. В области дихотомных вероятностных представлений:
 - а) Описание квантовых наблюдаемых в дихотомном вероятностном представлении.
 - б) Поиск выражений для деквантайзеров и квантайзеров.
 - в) Построение и исследование энтропийных характеристик распределений вероятностей, задающих кудитное состояние.
 - г) Исследование поведения новых энтропийных характеристик в процессе эволюции на примере аналитически разрешимых моделей двухуровневых систем.
3. Построение общей схемы описания динамики кудитных систем с использованием символов состояний и каналов. Вывод кинетического уравнения для символов, соответствующих оператору эволюции. Использование данного подхода на примере вероятностных представлений:
 - а) Внедрение дихотомного вероятностного представления для описания кудитных каналов.

- b) Поиск выражения, описывающего вполне положительное преобразование геометрических символов.
- 4. Изучение поведения взаимной информации фиктивных подсистем при унитарных преобразованиях.
- 5. Исследование эволюции волновой функции классической системы в формализме Купмана-фон Неймана на примере квадратичного гамильтониана. Введение аналога запутанности для классических состояний.

Научная новизна

1. На основе формализма дискретного фазового пространства построены новые томографические функции для описания состояний кудитных систем: дискретная томограмма центра масс и дискретная кластерная томограмма. Введён класс геометрических символов. Найдены условия неотрицательности данных объектов. Все функции построены для случая, когда размерность кудита являлась степенью простого числа.
2. Получены квантайзеры и деквантайзеры для дихотомного представления квантовых состояний. Найдены наибольшие и наименьшие значения для введённых в работе новых энтропийных функций, представляющих собой сумму энтропий Цаллиса распределений вероятностей дихотомных случайных величин, задающих состояние квантовых систем.
3. Построена схема описания динамики кудитных систем через символы состояний и каналов. На примере дихотомного представления продемонстрирован новый подход к заданию квантовых каналов через операторные символы. В случае унитарной эволюции получено кинетическое уравнение, описывающее поведение соответствующих вероятностных параметров.
4. Получено выражение, описывающее вполне положительное отображение квантовых состояний в представлении, где квантовые состояния задаются геометрическими символами, а квантовые каналы - дискретной функцией Вигнера.
5. В формализме Купмана-фон Неймана рассмотрена динамика классической системы, описываемой нестационарным квадратичным гамильтонианом. Для соответствующего волнового уравнения получена функция Грина. Построен аналог запутанности для классических гауссовских состояний.

Теоретическая и практическая значимость

Введённые и изучаемые в работе методы используются для альтернативного описания квантовых систем, более приближенного к классическому. Построено соответствие между состояниями кудитных систем, квантовыми каналами и наборами распределений вероятностей дихотомных случайных величин. Кроме того, данный подход наряду с предложенным в работе дискретным аналогом томограммы центра масс может быть использован при реализации измерений, необходимых для определения состояний и динамики квантовых систем.

Методология и методы исследования

В работе широко используется формализм звёздочного произведения и операторных символов, основные принципы которого описаны в первой главе. При построении вероятностных представлений задавались соответствующие деквантайзеры и квантайзеры. Метод фазового пространства применялся при изучении вводимых в работе дискретных аналогов кластерной томограммы и томограммы центра масс. При получении условий неотрицательности геометрических символов использовался метод стабилизационных групп. При описании дихотомных представлений приведён метод построения представлений с помощью фиктивных подсистем. При построении вероятностных представлений квантовых каналов использовался дуализм между квантовыми состояниями и каналами. При исследовании различных характеристик рассматриваемых в работе моделей производились численные расчёты. Для получения оценок областей допустимых значений вводимых в работе энтропийных функций использовались оптимизационные методы. Для некоторых задач классической механики демонстрируется применение формализма Купмана-фон Неймана.

Положения, выносимые на защиту

1. При построении класса геометрических символов и их частных случаев: дискретной томограммы центра масс и дискретной кластерной томограммы, выяснилось
 - a) Значения дискретной томограммы центра масс есть вероятности исходов измерений в собственных базисах обобщённых паулевских операторов.
 - b) Все возможные значения аргументов геометрического символа, для которых данный объект неотрицателен, соответствуют множеству всех коммутативных групп операторов Вейля.

- с) Построенные дискретные аналоги томограммы центра масс и кластерной томограммы также являются неотрицательными функциями, по значениям которых возможно восстановить матрицу плотности состояния системы. Получены соответствующие квантайзеры и деквантайзеры.
2. Преобразования геометрических символов в квантовых каналах задаются псевдостохастической матрицей, которая представляет собой линейное преобразование дискретной функции Вигнера канала.
 3. Вводимые энтропийные функции, представляющие собой сумму энтропий Шеннона или Цаллиса дихотомных распределений вероятностей, задающих состояние квантовой системы, являются ограниченными, причём ограничение снизу ненулевое. Область значений представлена в работе.
 4. Выражение для функции Грина уравнения эволюции волновой функции классической системы с квадратичным гамильтонианом с точностью до фазового множителя, зависящего от времени, совпадает с функцией Грина, описывающей эволюцию квантовой системы с тем же гамильтонианом.

Апробация работы

Основные результаты диссертации докладывались на следующих конференциях:

- Quantum Theory: from problems to advances (Вёкше, Швеция, 2014).
- Central European Workshop on Quantum Optics (Варшава, Польша, 2015).
- Phystech Quant (Москва, Россия, 2020).
- 63-я Всероссийская научная конференция МФТИ (Москва, Россия, 2020).

По теме диссертации опубликованы в 8 работ, изданных в рецензируемых научных журналах, индексируемых Web of Science и Scopus, и рекомендованных ВАК.

Личный вклад

Все результаты, вошедшие в диссертацию были получены лично автором, либо при его непосредственном участии.

Содержание работы

Первая глава носит характер введения и не содержит оригинальных исследований, проведённых автором. Здесь вводится необходимая терминология, а также даётся описание общей схемы построения представлений квантовых состояний.

В разделе 1.1 приводится краткое изложение формализма операторных символов. Каждому действующему в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ оператору $\hat{O}$ можно поставить в соответствие c -числовую функцию $f_{\hat{O}} : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{C}$ по следующему правилу

$$f_{\hat{O}}(x) = \text{Tr} \left(\hat{C}(x) \hat{O} \right), \quad x \in \mathcal{X}. \quad (1)$$

Обратное преобразование представимо в виде

$$\hat{O} = \sum_x f_{\hat{O}}(x) \hat{G}(x). \quad (2)$$

Операторы $\hat{C}(x)$ и $\hat{G}(x)$ называются деквантайзерами и квантайзерами соответственно.

В разделе 1.2 даны основные сведения о представлении, в котором квантовые состояния описываются функцией, определённой в фазовом пространстве - функцией Вигнера. Также перечисляются основные свойства этого объекта и проводятся аналогии с плотностью распределения вероятностей. Функция Вигнера является функцией плотности распределения квазивероятностей, т.е. она может принимать отрицательные значения. Также, функция Вигнера является символом оператора плотности. При этом соответствующие квантайзеры и деквантайзеры совпадают с точностью до постоянного множителя. Такие схемы называются самодуальными.

В разделе 1.3 даётся небольшое введение в задачу восстановления состояния по результатам измерений ансамбля идентичных квантовых систем. Данная проблема имеет прямое отношение к вопросам построения вероятностных представлений квантовой механики, т.е. представлений, где состояние квантовой системы задаётся набором действительных распределений вероятностей.

В разделе 1.4 приводятся примеры томографический представлений квантовой механики. Дано определение симплектической томограммы, которая получается из функции Вигнера с помощью преобразования Радона.

Также перечислены основные свойства этой функции, такие как: неотрицательность, нормированность, однородность. Отдельно рассматривался случай многомодовых (многочастичных) квантовых систем. Перечислены следующие томографические функции: многомерная симплектическая томограмма, томограмма центра масс и кластерная томограмма.

Вторая глава посвящена представлениям, в которых кудитные состояния описываются функциями, ассоциированными с линейными подпространствами дискретного фазового пространства. Построены дискретные аналоги томограммы центра масс и кластерной томограммы.

В разделе 2.1 в контексте представлений квантовых состояний дан краткий обзор по измерениям во взаимно равнонаклонённых базисах – MUB (mutual unbiased bases).

В разделе 2.2 приводятся основные сведения о дискретном фазовом пространстве и задании кудитных состояний дискретной функцией Вигнера. Особое внимание уделялось случаям, когда размерность гильбертова пространства кудита была равна простому числу или степени простого числа. Фазовое пространство таких кудитов может быть представлено как векторное пространство над конечным полем. Пусть $\mathbb{C}^{d^n}$ есть гильбертово пространство исследуемой системы, и пусть d – простое число. Соответствующее фазовое пространство есть векторное пространство $\mathbb{Z}_d^{2n}$. Деквантаizers для дискретной функции Вигнера будут выражаются через операторы смещения в дискретном фазовом пространстве, которые имеют вид

$$\hat{D}(\vec{k}, \vec{l}) = \bigotimes_{j=1}^n \omega^{-2^{-1}k_j l_j} \hat{Z}^{k_j} \hat{X}^{l_j} \quad (3)$$

если d нечётное простое число. Здесь $\omega = e^{\frac{2\pi i}{d}}$, $\hat{Z}|k\rangle = \omega^k|k\rangle$ и $\hat{X}|k\rangle = |k+1\rangle$. Если же $d = 2$, то полагается, что

$$\hat{D}(\vec{k}, \vec{l}) = \bigotimes_{j=1}^n i^{-k_j l_j} \hat{\sigma}_z^{k_j} \hat{\sigma}_x^{l_j}, \quad (4)$$

где $\hat{\sigma}_x$ и $\hat{\sigma}_z$ – матрицы Паули.

В разделе 2.3 вводится новая томографическая функция для описания кудитных состояний – дискретная томограмма центра масс. Гильбертово пространство кудитов, для которых может быть построен данный объект, имеет размерность, являющуюся степенью простого числа. Соответствующее фазовое пространство есть $\mathbb{Z}_d^{2n}$. По аналогии с непрерывным случаем, значения дискретной томограммы центра масс получается суммированием по линейным подпространствам размерности $2n - 1$

$$w_{cm}(\kappa \mid \vec{\mu}, \vec{\nu}) = \sum_{\vec{q}, \vec{p}} W(\vec{q}, \vec{p}) \delta_{\kappa, \vec{\mu} \cdot \vec{q} + \vec{\nu} \cdot \vec{p}}. \quad (5)$$

В разделе было показано, что функция $w_{cm}(\kappa \mid \vec{\mu}, \vec{\nu})$ неотрицательна и, что отображение (5) обратимо. Была получена формула восстановления дискретной функции Вигнера по значениям томограммы.

В разделе 2.4 построено обобщение дискретной томограммы центра масс – геометрические символы. Здесь также рассматриваются случаи, когда размерность кудита есть d^n , где d есть простое нечётное число. Геометрический символ строится следующим образом

1. Выбирается некоторое подмножество множества всех линейных подпространств размерности $2n - m$. Каждое из подпространств задаётся уравнением $\hat{\Gamma} \cdot \vec{x} = \vec{\kappa}$, где $\vec{x} = \begin{bmatrix} \vec{q} \\ \vec{p} \end{bmatrix}^T$, $\hat{\Gamma} \in \mathbb{Z}_d^m \times \mathbb{Z}_d^{2n}$, $\vec{\kappa} \in \mathbb{Z}_d^m$. При этом $\text{rank } \hat{\Gamma} = m$. Множество соответствующих матриц обозначим, как $\mathfrak{H}_{2n}^m$.
2. Значения геометрического символа получаются суммированием дискретной функции Вигнера по подпространствам из $\mathfrak{H}_{2n}^m$

$$w_{\mathfrak{H}_{2n}^m}(\vec{\kappa}, \hat{\mu}, \hat{\nu}) = \sum_{\vec{q}, \vec{p}} \delta_{\vec{\kappa}, \hat{\mu} \cdot \vec{q} + \hat{\nu} \cdot \vec{p}} W(\vec{q}, \vec{p}). \quad (6)$$

Отметим, что если $m = 1$ и $\mathfrak{H}_{2n}^1$ есть множество всех ненулевых матриц матриц $\hat{\Gamma}$ размера $1 \times 2n$, то геометрический символ совпадает с дискретной кластерной томограммой.

Основная задача в разделе 2.4 состояла в поиске условия на множество $\mathfrak{H}_{2n}^m$, чтобы функция $w_{\mathfrak{H}_{2n}^m}(\vec{\kappa}, \hat{\mu}, \hat{\nu})$ была неотрицательна, а отображение (6) обратимым. При этом рассматривался случай $d \neq 2$. Было показано, что условие неотрицательности имеет вид

$$\hat{\Gamma} \hat{V} \hat{\Gamma}^T = \hat{0}. \quad (7)$$

Таким образом, если множество $\mathfrak{H}_{2n}^m$ есть множество $\mathfrak{P}_{2n}^m$, то функция $w_{\mathfrak{P}_{2n}^m}(\vec{\kappa}, \hat{\mu}, \hat{\nu})$ неотрицательна. Более того, было показано, что в таком случае отображение (6) обратимо, и была найдена формула восстановления дискретной функции Вигнера, а также деквантайзеры и квантазеры. При этом

$$\hat{G}(\vec{\kappa} \mid \hat{\Gamma}) = \alpha \hat{I} + \beta \hat{C}(\vec{\kappa} \mid \hat{\Gamma}), \quad (8)$$

где $C(\vec{\kappa} \mid \hat{\Gamma})$ и $\hat{G}(\vec{\kappa} \mid \hat{\Gamma})$ – деквантайзеры и квантайзеры геометрических символов, а α и β коэффициенты, зависящие от n и m .

Следует отметить, что обратимость справедлива только для случаев $m \geq n$, в противном случае множество матриц $\hat{\Gamma}$, удовлетворяющих условию (7), пусто.

Также в разделе 2.4 был построен дискретный аналог кластерной томограммы. За основу была взята схема построения геометрических символов. Множество матриц $\hat{\Gamma}$ в этом случае должно состоять из матриц вида $\hat{\Gamma} = \begin{bmatrix} \hat{\mu} & \hat{\nu} \end{bmatrix}$, где матрицы $\hat{\mu}$ и $\hat{\nu}$ размерами $m \times n$ являются блочно

диагональными, причём блоки представляют собой строки $\vec{\mu}_1^T, \dots, \vec{\mu}_m^T$ и $\vec{\nu}_1, \dots, \vec{\nu}_m^T$ длины $n_1, \dots, n_m$. Как можно видеть $n_1 + \dots + n_m = n$, а дискретная кластерная томограмма имеет вид

$$w_{cl}(\vec{\kappa}, \vec{\mu}, \vec{\nu}) = \sum_{\vec{q}, \vec{p}} W(\vec{q}, \vec{p}) \prod_{k=1}^m \delta_{\vec{\mu}_k \cdot \vec{q}_k + \vec{\nu}_k \cdot \vec{p}_k}, \quad \vec{\mu} = (\vec{\mu}_1, \dots, \vec{\mu}_m), \quad \vec{\nu} = (\vec{\nu}_1, \dots, \vec{\nu}_m). \quad (9)$$

Соответствующее множество матриц $\hat{\Gamma}$ обозначалось как $\mathfrak{C}_{2n}^m$. Очевидно, что для всех $\hat{\Gamma} \in \mathfrak{C}_{2n}^m$ выполняется условие (7), а значит функция $w_{cl}(\vec{\kappa}, \vec{\mu}, \vec{\nu})$ неотрицательна. Также было показано, что отображение (9) обратимо и были найдены квантайзеры.

В разделе 2.5 продолжается исследование введённых в разделе 2.4 геометрических символов. Здесь рассматривается случай, когда размерность гильбертова пространства кудита является степенью двойки. Такие системы для краткости в работе назывались «многокубитные». Если в случае $m = 1$, т.е. когда геометрический символ совпадает с дискретной томограммой центра масс, никаких сложностей не возникает, и не требуется специального описания, то при $m > 1$ это не так. Как мы показывали, в случае $d > 2$ (размерность кудита d^n , а d – простое число) условие (7) было достаточным для того, чтобы геометрические символы были неотрицательными. Это происходит вследствие того, что множество операторов $\mathcal{D}_{\hat{\Gamma}} = \{\hat{D}(\hat{S}\hat{\Gamma}^T \cdot \vec{h}), \vec{h} \in \mathbb{Z}_d^{2n}\}$ образует группу, если матрица $\hat{\Gamma}$ удовлетворяет соотношению (7). Однако, при $d = 2$ выполнение условий (7) недостаточно для того, чтобы $\mathcal{D}_{\hat{\Gamma}}$ было замкнутым относительно операции матричного умножения. Это приводит к тому, что даже, если матрица $\hat{\Gamma}$ удовлетворяет (7), то соответствующее значение геометрического символа может быть отрицательным. На Рис. 1 изображены все возможные разбиения фазового пространства кукварта на множество линейных подпространств размерности $2n - m$ вида $\hat{\Gamma} \cdot \vec{x} = \vec{\kappa}$, $\vec{\kappa} \in \mathbb{Z}_d^m$ $((2n - m)$ -расслоения). Все $\hat{\Gamma}$ лежат в множестве $\mathfrak{P}_4^2$, но для некоторых матриц $\hat{\Gamma}$ группа $\langle \hat{D}(\vec{\gamma}_1), \hat{D}(\vec{\gamma}_2) \rangle$ содержит элементы, не являющиеся операторами смещения (4) (эти элементы отличаются знаком).

В работе было предложено определять неотрицательный геометрический символ следующим образом: матрицы $\hat{\Gamma}$ из области определения геометрического символа должны выбираться так, чтобы множество $\mathcal{D}_{\hat{\Gamma}}$ являлось группой. Было показана обратимость отображения (6) при таком образом задаваемом множестве $\mathfrak{H}_{2n}^m$. Также отдельно обговаривался случай дискретной кластерной томограммы. Было показано, что для всех матриц $\hat{\Gamma} \in \mathfrak{C}_{2n}^m$ множество $\mathcal{D}_{\hat{\Gamma}}$ является группой.

Третья глава содержит исследования по теме дихотомного вероятностного представления кудитных состояний и наблюдаемых. В данном пред-

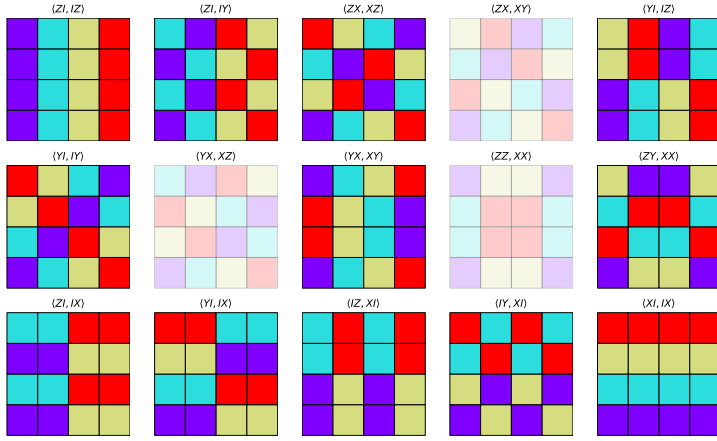


Рисунок 1 2-расслоения фазового пространства кукварта. Надписи обозначают генератор коммутативной группы. Для полупрозрачных изображений группа содержит элемент, который не является оператором смещения, определенным в (4). Нумерация столбцов идет слева направо и задается значениями пар (q_1, q_2) . Нумерация строк идет снизу вверх и задается (p_1, p_2) .

ставлении состояние кудита задаётся набором двумерных распределений вероятностей, которые соответствуют измерениям наблюдаемых в фиктивных кубитных подсистемах.

В разделе 3.1 рассматривается простейший случай – случай кубитных систем. Дан краткий обзор и уточнены некоторые соотношения.

Состояние кубита в дихотомном представлении задаётся набором из трёх двумерных распределений вероятностей $\Xi_2 = \{\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3\}$, соответствующих измерениям наблюдаемых $\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z$.

Если состояние кубита в описываемом представлении задаётся набором двумерных распределений вероятностей, то кубитные наблюдаемые представляются как наборы случайных величин. Так произвольной наблюдаемой $\hat{A}$ ставится в соответствие набор $\left\{ \xi_1 = \begin{bmatrix} X \\ -X \end{bmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{bmatrix} Y \\ -Y \end{bmatrix}, \quad \xi_3 = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix} \right\}$.

При этом $\hat{A} = \begin{bmatrix} Z_1 & X - iY \\ X + iY & Z_2 \end{bmatrix}$.

В разделе 3.2 рассматривался случай кутритных систем. Здесь уже может быть применён метод фиктивных подсистем, который и описывается в самом начале раздела. Данный метод позволяет выделить фиктивную кубитную подсистему у кудита, размерность гильбертова пространства которого нечётная. Для этого исходное гильбертово пространство $\mathbb{C}^d$ вкла-

дывается в $\mathbb{C}^d \oplus \mathbb{C}$. Размерность нового пространства получается чётной, и оно представимо в виде $\mathbb{C}^d \oplus \mathbb{C} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$, где $\mathcal{H}_A = \mathbb{C}^2$. Пространство $\mathcal{H}_A$ есть гильбертово пространство фиктивного кубита. Матрица плотности состояния этого кубита получается следующим образом: добавляется нулевые строка и столбец, а затем производится операция частичного следа по степеням свободы подсистемы B . Можно различным образом проводить описанные выше вложения и разбиения, и получать различные кубитные подсистемы. Набор матриц плотности этих кубитов задаёт состояние исходной систем. Переходя от кубитных матриц плотности к соответствующим наборам двумерных распределений вероятностей, получим набор двумерных распределений вероятностей, задающий состояние всей системы. В представленной в работе схеме также использовалось одно трёхмерное распределение. В итоге, состояние кутрита задаётся набором

$$\hat{\rho} \leftrightarrow \Xi_3 = \left\{ \begin{bmatrix} p_3^{(1)} + p_3^{(2)} - 1 \\ 1 - p_3^{(1)} \\ 1 - p_3^{(2)} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} p_i^{(k)} \\ 1 - p_i^{(k)} \end{bmatrix}, i \in \{1, 2\}, k \in \{1, 2, 3\} \right\} \quad (10)$$

В построенном представлении кутритная наблюдаемая описывалась семью классическими случайными величинами: одной трёхмерной и шестью двумерными. Были получены выражения для первого и второго момента.

В разделе 3.3 был дан обзор построения дихотомного представления для кудитов произвольной размерности, а также были получены выражения для деквантаizersов и квантаizersов.

Четвёртая глава посвящена проблеме представлений квантовых каналов. Было показано, что дуализм между квантовыми каналами и состояниями позволяет ввести понятие символа квантового канала. В таком случае, описание динамики проводится в терминах символов каналов и состояний. Все построения производились для кудитов.

В разделе 4.1 дан небольшой обзор по теме квантовых каналов и строится общая схема описания динамики квантовых систем на основе введённых в работе понятий канальных символов.

Как известно, произвольное линейное отображение квантовой системы $\mathcal{H}$ может задаваться положительно полуопределённой матрицей $\hat{D}$, действующей в пространстве $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$. Динамическая матрица $\hat{D}$ (матрица Чои) с точностью до множителя будет являться матрицей плотности. С другой стороны можно задавать динамику квантовой системы посредством канального символа $f_{\hat{D}}(\vec{x})$, который будет представлять собой символ динамической матрицы

$$\hat{D} \rightarrow f_{\hat{D}}(\vec{x}) = \text{Tr} \left(\hat{C}(\vec{x}) \hat{D} \right), \quad (11)$$

$$f_{\hat{D}}(\vec{x}) \rightarrow \hat{D} = \sum_{\vec{x}} f_{\hat{D}}(\vec{x}) \hat{G}(\vec{x}). \quad (12)$$

В данном разделе получено уравнение, описывающее вполне положительные отображения в случае, когда используются различные представления квантовых состояний и каналов

$$f_{\hat{\rho}}(\vec{x}) \rightarrow \sum_{\vec{X}, \vec{x}_0} f_{\hat{D}}(\vec{X}) f_{\hat{\rho}}(\vec{x}_0) K(\vec{x}, \vec{x}_0 | \vec{X}), \quad (13)$$

где ядро $K(\vec{x}, \vec{x}_0 | \vec{X})$ имеет вид

$$K(\vec{x}, \vec{x}_0 | \vec{X}) = \sum_{i, j, i_0, j_0} \hat{C}_{ij}^T(\vec{x}) \hat{G}_{i_0, j_0}(\vec{X}) \hat{G}_{i_0 j_0}(\vec{x}_0). \quad (14)$$

Здесь $\hat{C}(\vec{X})$ и $\hat{G}(\vec{X})$ – деквантайзеры и квантайзеры представления состояний, а $\hat{C}(\vec{x})$ и $\hat{G}(\vec{x})$ – деквантайзеры и квантайзеры представления каналов. Также в разделе 4.1 было выведено уравнение унитарной эволюции канального символа

$$i \frac{d\vec{P}}{dt} = \hat{C} \hat{Q} \hat{G} \cdot \vec{P}, \quad (15)$$

где $\hat{Q} = \hat{H} \otimes \hat{I}_{d^3} - \hat{I}_{d^3} \otimes \hat{H}$.

В разделе 4.2 строилось вероятностное представление квантовых каналов на основе введённой в разделе 4.1 схемы и дихотомного представления, подробнее о котором говорилось в главе 3. Было показано, что как и матрице плотности, так и динамической матрице вполне положительного отображения можно поставить в соответствие набор распределений вероятностей.

В качестве примера приводилось построение представления кубитного канала. Состояние кубита также задавалось в дихотомном представлении. Был построен вектор из вероятностных параметров состояния $\vec{\pi}$, а также матрица $\hat{P}$ и вектор β из вероятностных параметров канала. При этом преобразование состояния $\vec{\pi}$ представимо в виде

$$\vec{\pi} \rightarrow \hat{P} \cdot \vec{\pi} + \beta. \quad (16)$$

В разделе 4.3 рассматривался ещё одна схема описания квантовых каналов, в которой канальный символ представлял собой дискретную функцию Вигнера. Данное представление квантовых каналов использовалось

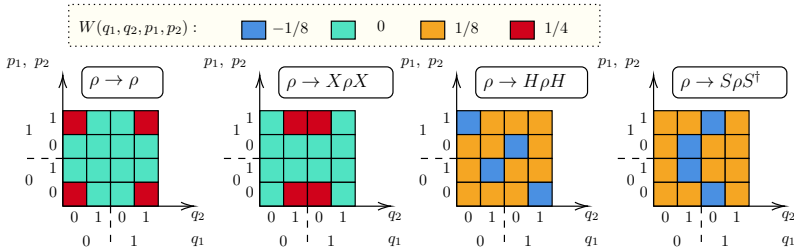


Рисунок 2 Примеры дискретных функций Вигнера некоторых унитарных кубитных каналов. Слева направо: тождественное преобразование, X -канал, гейт Адамара, фазовый сдвиг.

для описания вполне положительных отображений геометрических символов.

На Рис. 2 приведены дискретные функции Вигнера некоторых унитарных кубитных каналов.

Отметим, что дискретная функция Вигнера канала может быть представлена в виде псевдостохастической матрицы. Если состояния также задаются функцией Вигнера, то описание динамики сводится к псевдостохастическим преобразованиям векторов квазираспределений.

Геометрические символы могут использоваться для описания состояний кудитов размерности d^n , где d – простое число. Задавая квантовый канал при помощи дискретной функции Вигнера, для элементов псевдостохастической матрицы вполне положительного преобразования геометрических символов получим

$$F(\vec{\kappa}, \hat{\Gamma}; \vec{\kappa}_0, \hat{\Gamma}_0) = d^n \sum_{\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in \mathbb{Z}_d^{2n}} \delta_{\hat{\Gamma}_1 \vec{x}_1, \vec{\kappa}_1} \left(\alpha + \beta \delta_{\hat{\Gamma}_0 \vec{x}_2, \vec{\kappa}_0} \right) W(\vec{x}_1, \vec{x}_2), \quad (17)$$

где α и β – коэффициенты, зависящие от n и m , а $\vec{x}_i = \begin{bmatrix} \vec{q}_i \\ \vec{p}_i \end{bmatrix}$.

В работе в качестве примера были построены псевдостохастические матрицы преобразований томограммы центра масс двухкубитовых состояний. Были вычислены коэффициенты α и β : $\alpha = -\frac{7}{30}$, $\beta = \frac{1}{2}$. Стоит отметить, что для клиффордовских каналов (т.е. унитарных каналов, задающихся произвольной композицией гейтов Адамара и фазовых гейтов), соответствующие матрицы могут быть сведены к матрицам перестановок.

Пятая глава содержит различные задачи, связанные с новыми энтропийными функциями. Также, в этой части работы разбирается проблема построения аналога запутанности для классических систем на основе формализма Купмана-фон Неймана.

В разделе 5.1 приводятся краткий обзор по квантовым корреляциям, запутанности и квантовым энтропийным характеристикам.

В разделе 5.2 вводится новая энтропийная функция, представляющая собой сумму энтропий Цаллиса распределений вероятностей, задающих состояние в дихотомном представлении (этому представлению посвящена глава 3). Рассматривался случай кубитных систем. Состояние кубита задаётся тремя двумерными распределениями вероятностей $\vec{P}_k = [p_k \ 1 - p_k]^T$, $k = 1, \dots, 3$. Обобщённая энтропия Цаллиса (именно так была названа новая функция) имеет вид

$$W_q(\Xi^{(2)}) = \sum_{i=1}^N S_q(\vec{P}_i), \quad (18)$$

где $S_q(\vec{P}_i) = \frac{1}{1-q} ((1 - p_i)^q + p_i^q - 1)$ и $\Xi^{(2)} = \{\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3\}$. Была найдена область возможных значений, которые принимает данная функция. Максимум функции $W_q(\Xi^{(2)})$ достигается для абсолютно смешанного состояния

$$\max W_q(\Xi^{(2)}) = \frac{1}{1-q} \left(3 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^q - 1 \right). \quad (19)$$

Для поиска минимума была решена оптимизационная задача и в итоге

$$\min W_q(\Xi^{(2)}) = \min \left(W_q(\Xi_1^{(2)}), W_q(\Xi_2^{(2)}), W_q(\Xi_3^{(2)}) \right), \quad (20)$$

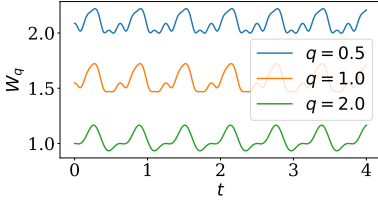
где $\Xi_1^{(2)}$, $\Xi_2^{(2)}$ и $\Xi_3^{(2)}$ можно выбрать следующим образом

$$\Xi_1^{(2)} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \quad (21)$$

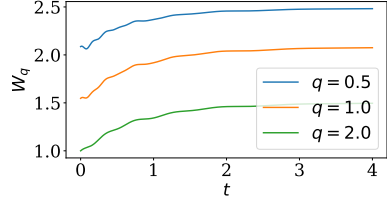
$$\Xi_2^{(2)} = \left\{ \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + \frac{(-1)^m}{\sqrt{2}} \\ 1 - \frac{(-1)^m}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{2}} \\ 1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \right\}, \quad m, n \in \mathbb{Z}, \quad (22)$$

$$\Xi_3^{(2)} = \left\{ \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + \frac{(-1)^l}{\sqrt{3}} \\ 1 - \frac{(-1)^l}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}, \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + \frac{(-1)^m}{\sqrt{3}} \\ 1 - \frac{(-1)^m}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}, \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{3}} \\ 1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}, \right\}, \quad l, m, n \in \mathbb{Z}. \quad (23)$$

В разделе 5.3 изучались свойства квантовой взаимной информации фиктивных подсистем кукварта. Рассматривалось поведение данной величины в процессе унитарной эволюции. Квантовая взаимная информация



а)



б)

Рисунок 3 Зависимость обобщённой энтропии Цаллиса от времени: а) модель Раби, б) модель Демкова.

обычно вводится для составных систем, однако метод фиктивных подсистем позволяет использовать её и для несоставных, таких как кукварт.

В разделе 5.4 изучалась эволюция обобщённой энтропии Цаллиса на примере некоторых аналитически разрешимых моделей. Рассматривалось всего две: модель Раби и модель Демкова в присутствии процессов затухания фазы. Первая из них является примером унитарной эволюции. Вторая модель, как можно судить из названия, описывает неунитарную эволюцию. В обоих случаях изучаемая квантовая система являлась двухуровневой, т.е. кубитом. Для каждой модели были зафиксированы задающие их параметры.

Кроме того, для обозначенных моделей были получены графики, описывающие эволюцию спиновой томограммы.

В разделе 5.5 приводится описание основных принципов формализма Купмана-фон Неймана и обсуждается возможность построения аналога запутанности для классических систем. В представленном в разделе подходе функция плотности распределения вероятностей была связана с матрицей плотности классического состояния посредством отображения

$$f(q, p; t) = \frac{1}{2\pi} \int du \, \rho \left(q + \frac{u}{2}, q - \frac{u}{2}; t \right) e^{-ipu}, \quad (24)$$

где t – временной параметр. Для демонстрации данного подхода в работе рассматривалась задача эволюции классической системы с квадратичным гамильтонианом $H = \sum_{\alpha, \beta=1}^N \frac{1}{2} Q_{\alpha} B_{\alpha\beta} Q_{\beta}$, где $Q_{\alpha} = (p_1, p_2, \dots, p_N, q_1, q_2, \dots, q_N)$, а N – размерность системы. Была получена соответствующая функция Грина.

В задаче о введении аналога запутанности для классических состояний рассматривался следующий подход. Известно, что для гауссовских квантовых состояний справедлив критерий Переса-Городецкого. Данный факт использовался следующим образом для классического состояния: если после операции частичного транспонирования PT произведённой над оператором плотности классического состояния справедливо соотношение неопре-

делённостей, то такое классическое состояние считалось сепарабельным, в противном случае - запутанным.

В заключении приведены основные результаты работы.

- Построены новые томографические функции, описывающие состояния кудитных систем и являющиеся аналогами томограммы центра масс и кластерной томограммы.
 - Построен общий класс геометрических символов, определённых на множестве линейных подпространств дискретного фазового пространства.
 - Найдены условия неотрицательности геометрических символов
 - В случаях $d \neq 2$, $m > 1$, а также для всех простых d при $m = 1$ найдены квантайзеры и деквантайзеры.
- Построена схема описания динамики кудитных систем через символы состояний и каналов.
- Получена псевдостохастическая матрица преобразования геометрических символов в квантовых каналах.
- Получены квантайзеры и деквантайзеры для дихотомного представления квантовых состояний. Найдены наибольшие и наименьшие значения для введённых в работе новых энтропийных функций, представляющих собой сумму энтропий Цаллиса распределений вероятностей дихотомных случайных величин, задающих состояние квантовых систем.
- Построена схема описания динамики кудитных систем через символы состояний и каналов. Новый подход продемонстрирован на примере дихотомного представления.
- В формализме Купмана-фон Неймана рассмотрена динамика классической системы, описываемой нестационарным квадратичным гамильтонианом. Для соответствующего волнового уравнения получена функция Грина. Построен аналог запутанности для классических гауссовских состояний.

Список публикаций по теме диссертации

1. Avanesov, A.S., Manko, V.I., 2021. Geometrical and group properties of discrete analogs of the center-of-mass and the cluster tomograms. AIP Conference Proceedings 2362.
2. Avanesov, A., Man'ko, V.I., 2020. The Discrete Center-of-Mass Tomogram. Int J Theor Phys. 59, 2404-2424.
3. Avanesov, A., Man'ko, V.I., 2019. Statistical properties of qutrit in probability representation of quantum mechanics. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications 533, 121898.
4. Avanesov, A.S., Manko, V.I., 2019. Unitary and Nonunitary Evolution of Qubit States in Probability Representation of Quantum Mechanics. Int J Theor Phys 58, 2054–2067.
5. Avanesov, A.S., Man'ko, V.I., 2019. Probability Representation of Quantum Channels. Lobachevskii J Math 40, 1444–1449.
6. Avanesov, A.S., Man'ko, V.I., 2017. Dissipative Evolution of the Qubit State in the Tomographic-Probability Representation. Journal of Russian Laser Research 38, 311–323.
7. Avanesov, Ashot S., Man'ko, V.I., 2015. Unitary Transform and Subadditivity Condition for Composite and Noncomposite Systems. Journal of Russian Laser Research 36, 430–439.
8. Avanesov, A. S., Man'ko, V.I., 2015. Classical and quantum correlations in the system of interacting electromagnetic modes. Bulletin of the Lebedev Physics Institute 42, 260–263.

Список литературы

1. *Wigner E.* On the Quantum Correction For Thermodynamic Equilibrium // *Physical Review*. — 1932. — June 1. — Vol. 40, no. 5. — P. 749–759.
2. *Bertrand J., Bertrand P.* A tomographic approach to Wigner's function // *Foundations of Physics*. — 1987. — Apr. 1. — Vol. 17, no. 4. — P. 397–405.
3. *Vogel K., Risken H.* Determination of quasiprobability distributions in terms of probability distributions for the rotated quadrature phase // *Physical Review A*. — 1989. — Sept. 1. — Vol. 40, no. 5. — P. 2847–2849.
4. *Radon J.* Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten // *Akad. Wiss.* — 1917. — Vol. 69. — P. 262–277.
5. *Mancini S., Man'ko V. I., Tombesi P.* Symplectic tomography as classical approach to quantum systems // *Physics Letters A*. — 1996. — Apr. 15. — Vol. 213, no. 1. — P. 1–6.
6. *Arkhipov A. S., Lozovik Y. E., Man'ko V. I.* Tomography for Several Particles with One Random Variable // *Journal of Russian Laser Research*. — 2003. — May 1. — Vol. 24, no. 3. — P. 237–255.
7. *Arkhipov A. S., Man'ko V. I.* Quantum transitions in the center-of-mass tomographic probability representation // *Physical Review A*. — 2005. — Jan. 4. — Vol. 71, no. 1. — P. 012101.
8. *Dudinets I., Man'ko V.* Center of mass tomography and Wigner function for multimode photon states // *International Journal of Theoretical Physics*. — 2018. — June. — Vol. 57, no. 6. — P. 1631–1644.
9. *Chernega V. N., Man'ko O. V., Man'ko V. I.* Triangle Geometry for Qutrit States in the Probability Representation // *Journal of Russian Laser Research*. — 2017. — Sept. 1. — Vol. 38, no. 5. — P. 416–425.
10. *Chernega V. N., Man'ko O. V., Man'ko V. I.* Probability Representation of Quantum Observables and Quantum States // *Journal of Russian Laser Research*. — 2017. — July 1. — Vol. 38, no. 4. — P. 324–333.
11. *Chernega V. N., Man'ko O. V., Man'ko V. I.* Quantum suprematism picture of Malevich's squares triada for spin states and the parametric oscillator evolution in the probability representation of quantum mechanics // *Journal of Physics: Conference Series*. — 2018. — Aug. — Vol. 1071. — P. 012008.
12. *Wootters W. K.* A Wigner-function formulation of finite-state quantum mechanics // *Annals of Physics*. — 1987. — May 15. — Vol. 176, no. 1. — P. 1–21.
13. *Galvão E. F.* Discrete Wigner functions and quantum computational speedup // *Physical Review A*. — 2005. — Apr. 1. — Vol. 71, no. 4. — P. 042302.
14. *Mari A., Eisert J.* Positive Wigner Functions Render Classical Simulation of Quantum Computation Efficient // *Physical Review Letters*. — 2012. — Dec. 4. — Vol. 109, no. 23. — P. 230503.
15. *Koopman B. O.* Hamiltonian Systems and Transformation in Hilbert Space // *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*. — 1931. — Mar. 23. — Vol. 17, no. 5. — P. 315–318.
16. *Neumann J. v.* Zur Operatorenmethode In Der Klassischen Mechanik // *Annals of Mathematics*. — 1932. — July. — Vol. 33, no. 3. — P. 587–642.
17. *Wigner phase-space distribution as a wave function / D. I. Bondar [et al.]* // *Physical Review A*. — 2013. — Nov. 11. — Vol. 88, no. 5. — P. 052108.
18. *Sen A., Silagadze Z.* Ermakov-Lewis invariant in Koopman-von Neumann mechanics // *International Journal of Theoretical Physics*. — 2020. — July. — Vol. 59, no. 7. — P. 2187–2190.
19. *Choi M.-D.* Completely positive linear maps on complex matrices // *Linear Algebra Its Appl.* — 1975. — Vol. 10, no. 3. — P. 285–290.
20. *Jamiolkowski A.* Linear transformations which preserve trace and positive semidefiniteness of operators // *Rep. Math. Phys.* — 1972. — Vol. 3, no. 4. — P. 275–278.