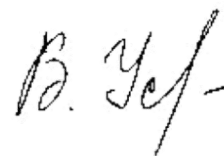


На правах рукописи



Усков Владимир Игоревич

**РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА
МЕТОДОМ КАСКАДНОЙ ДЕКОМПОЗИЦИИ**

01.01.02 — Дифференциальные уравнения, динамические системы и
оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Воронеж — 2019

Работа выполнена на кафедре математического анализа Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Воронежский государственный университет»

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
доцент, *Зубова Светлана Петровна*

Официальные оппоненты: *Нефедов Николай Николаевич*
доктор физико-математических наук,
профессор, Федеральное государственное
бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный университет»,
заведующий кафедрой математики
физического факультета

Ускова Наталья Борисовна
кандидат физико-математических наук,
доцент, Федеральное государственное
бюджетное образовательное учреждение высшего
образования «Воронежский государственный
технический университет»,
доцент кафедры высшей математики и
физико-математического моделирования

Защита состоится 12 ноября 2019 г. в 14 ч. 00 мин. на заседании диссертационного совета БелГУ.01.01 при ФГАОУ ВО «Белгородский государственный национальный исследовательский университет» по адресу: 308015, г. Белгород, ул. Победы 85, корп. 17, ауд. 331.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке ФГАОУ ВО «Белгородский государственный национальный исследовательский университет» и на сайте *library.bsu.edu.ru*

Автореферат разослан «___» _____ 2019 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета



Полунин Виктор Александрович

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ДИССЕРТАЦИИ

Актуальность темы. В диссертации изучается возможность применения метода каскадной декомпозиции, состоящего в поэтапном переходе от исходной задачи к аналогичным задачам в подпространствах уменьшающихся размерностей. Метод каскадной декомпозиции (каскадный метод) направлен на решение задач, в которых получение решения другими методами или невозможно, или затруднительно. К ним относятся задачи для уравнений, неразрешенных относительно старшей производной. Впервые такие уравнения, по-видимому, изучались в работе Пуанкаре (1885). Уравнения, неразрешённые относительно производной называют ещё *дескрипторными* (или *алгебро-дифференциальными*, *дифференциально-алгебраическими*). Одним из классов таких уравнений являются *уравнения соболевского типа*:

$$A \frac{\partial^l u}{\partial t^l} + \sum_{k=0}^{l-1} B_{l-k} \frac{\partial^k u}{\partial t^k} = f, \quad (1)$$

где $A, B_1, \dots, B_l$ — линейные дифференциальные операторы по переменной $x = (x_1, \dots, x_n)$. Работа С.Л. Соболева (1954) положила начало систематическому изучению таких уравнений.

Наиболее активные исследования дескрипторных уравнений велись в г. Воронеже в 60—70 гг. прошлого века под руководством проф. С.Г. Крейна. В настоящее время такие уравнения изучаются в крупнейших математических школах: иркутской (Ю.Е. Бояринцев, Н.А. Сидоров, Б.В. Логинов, В.Ф. Чистяков, А.А. Щеглова, Н.В. Фалалеев и их ученики), новосибирской (А.И. Кожанов, С.Г. Пятков, Г.В. Демиденко, С.В. Успенский и другие), челябинской (Г.А. Свиридюк, В.Е. Федоров и их ученики) и екатеринбургской (И.В. Мельникова и ее ученики). За рубежом школы возглавляют А. Favini, А. Yagi, S. Campbell, R.E. Schouolter, P. Kunkel, V. Mehrmann, März, P. Chen, K.J. Engel, R. Nagel и др.

Ввиду большого прикладного значения актуально решение задач для дифференциальных уравнений, содержащих малый параметр; особенно, если при стремлении параметра к нулю меняется тип уравнения — такие задачи называются *сингулярно возмущенными*. Явление погранслоя возникает в задачах с быстрыми переходами; быстрое изменение решения происходит в узком промежутке изменения переменной — пограничном слое. Системами с малым параметром при старшей производной описывается движение вязкого потока (воздух, вода или кровь в сосудах), поведение тонких и гибких пластин и оболочек, процесс обтекания затупленного тела сверхзвуковым потоком вязкого газа и др. Важно исследование поведения решения при стремлении малого параметра к нулю; выявление наличия явления погранслоя в задаче; построение решения в аналитическом виде и в

виде асимптотического разложения по степеням параметра.

Теорию сингулярно возмущенных уравнений создавали и развивали акад. А.Н. Тихонов, М.М.Вишик, Л.А. Люстерник, А.Б. Васильева, В.Ф. Бутузов, С.А. Ломов, И.С. Ломов, Н.Н. Нефедов и многие другие авторы.

В настоящей работе уравнения вида (1) изучаются с операторами A , наделенными следующими свойствами вырожденности:

- 1) A — фредгольмов оператор с нулевым индексом (далее, Φ -оператор, Φ -свойство оператора);
- 2) A имеет число 0 нормальным собственным числом (далее, 0-НСЧ-оператор, 0-НСЧ-свойство оператора).

В основу поставленных задач в настоящей работе положен метод каскадной декомпозиции, основанный на

- 1) расщеплении уравнения типа $Av = w$ на уравнения в подпространствах;
- 2) получении в одном из подпространств уравнения, аналогичного исходному уравнению;
- 3) получении для новой неизвестной функции условий, аналогичных заданным условиям;
- 4) повторении перечисленных действий с новыми уравнением и условиями.

Расщепления исходных пространств применялись и ранее: М.В. Вишик и Л.А. Люстерник, М.М. Вайнберг и В.А. Треногин при построении собственных значений и векторов возмущенной матрицы; Ю.Е. Бояринцев, S. Campbell для исследования дескрипторного уравнения в конечномерных пространствах. При этом одни авторы ограничивались одним этапом расщепления пространств (М.И. Вишик и Л.А. Люстерник, М.М. Вайнберг и В.А. Треногин, С.Г. Крейн, V. Lovass-Nagy), а в работах других авторов (А. Ailon, В.А. Ильин, А. Ilchmann и V. Mehrmann и др.) исходная система после преобразования матричных коэффициентов обретает гораздо большие размеры.

Метод каскадной декомпозиции разработан в публикациях С.П. Зубовой (в кандидатской диссертации 1973 г., докторской диссертации 2013 г., статьях 1976, 1991, 2013–2015 г.). В этом методе на каждом шаге применяется процедура дифференцирования, что требует определённой гладкости некоторых операторов, построенных с помощью заданных операторных коэффициентов уравнения. Поэтому весьма важна предлагаемая в настоящей работе модификация этого метода для дескрипторного уравнения со стационарным оператором A , при которой на первом шаге не осуществляется процесс дифференцирования, за счет чего понижаются требования на гладкость операторных коэффициентов.

Цель работы. Основная цель диссертации —

- 1) исследование возможности применения метода каскадной декомпозиции

уравнения для решения поставленных задач;

2) исследование задачи Коши и начально-краевых задач для рассматриваемых уравнений: определение условий существования и единственности этих решений; исследование асимптотических свойств при $\varepsilon \rightarrow 0$ решений сингулярно возмущённых уравнений;

3) исследование свойств некоторого матрично-дифференциального оператора; применение этих свойств для решения поставленных задач.

Методы исследования. В диссертационной работе использованы алгебраические методы, методы функционального анализа, спектральная теория линейных операторов, теория полуобращения линейных операторов, теория полугрупп операторов с ядрами, методы теории и асимптотической теории линейных дифференциальных уравнений.

Научная новизна. Модифицируется метод каскадной декомпозиции. Этот метод впервые применяется для решения задач для уравнений соболевского типа. Результаты диссертации являются новыми.

Теоретическая и практическая значимость. Данная диссертация носит теоретический характер. Результаты работы могут применяться при решении задач для уравнений в частных производных и сингулярно возмущённых дифференциальных уравнений. Свойства матрично-дифференциального оператора могут применяться при решении некоторых задач для определенного класса задач для уравнений в частных производных.

Отдельные результаты диссертации использовались при чтении спецкурсов «Сингулярно возмущенные дифференциальные уравнения» и «Дифференциальные уравнения, неразрешенные относительно производной» для магистрантов математического факультета 2-го года обучения в Воронежском государственном университете.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на международных конференциях: «Современные проблемы анализа динамических систем. Приложения в технике и технологиях» (Воронеж, 2014, 2017); «Естественные и математические науки: научные приоритеты ученых» (Пермь, 2016); конференции, посвященной 100-летию со дня рождения С.Г. Крейна (Воронеж, 2017); «Понтрягинские чтения-XXIX», посвященной 90-летию В.А. Ильина (Москва, 2018); международных симпозиумах: молодежном симпозиуме «Современные проблемы анализа динамических систем. Методы, модели, приложения» (Воронеж, 2014, 2015); XII симпозиуме «Фундаментальные и прикладные проблемы науки» (Челябинск, 2017); «Еругинские чтения-2018» (Беларусь, 2018); «Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам 2018» (Суздаль, 2018); «Общие проблемы управления и их приложения.

Колмогоровские чтения-VIII» (Тамбов, 2018); Весенних математических школах: «Современные методы теории краевых задач. Понтрягинские чтения — XXIV, XXVII» (Воронеж, 2013, 2016); Зимних математических школах: «Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна — 2014, 2016, 2018» (Воронеж, 2014, 2016, 2018); «Современные методы теории функций и смежные проблемы» (Воронеж, 2017).

Публикации. Результаты, изложенные в диссертации, опубликованы в работах [1]–[23]. Работы [1]–[5] опубликованы в журналах из перечня рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ; работа [7] как глава в монографии.

Личный вклад автора. Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы. Результаты, опубликованные в совместных работах и включенные в диссертацию, получены автором самостоятельно или при его непосредственном участии. Автор благодарен научному руководителю С.П. Зубовой за предложенную постановку задач и помощь в работе над диссертацией.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, включающего обзор литературы, списка используемых обозначений, пяти глав, заключения и списка литературы. Текст диссертации изложен на 137 страницах, включая 1 рисунок. Главы разбиты на разделы. Нумерация формул по главам и разделам. Список цитируемой литературы состоит из 78 наименований на 10 страницах.

Краткое содержание диссертации

Во **введении** приводится обзор литературы и описывается содержание диссертации.

В **главе 1** приводятся известные результаты, необходимые для выполнения настоящей диссертации: определения следующих вырожденных линейных операторов, действующих в банаховом пространстве: Φ -оператора и 0-НСЧ-оператора; формулировка утверждения о решении линейного уравнения с Φ -оператором; понятие об интеграле Φ . Рисса; решение задачи Коши для дифференциального уравнения, разрешенного относительно производной в банаховом пространстве; решение задачи Коши для дескрипторного уравнения с Φ -оператором, имеющим одномерное ядро в банаховом пространстве; сведения из теории тригонометрических рядов Фурье; сведения о сингулярно возмущенных уравнениях и явлении погранслоя, наблюдаемом в таких задачах.

В **главе 2** для решения поставленных задач актуально исследование

матрично-дифференциального оператора

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \alpha \\ \beta & \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix}, \quad (2)$$

с областью определения

$$\text{dom } \mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} : y_i(x) \in C^2 \left[0, \frac{2\pi}{\gamma} \right], \quad y_i(0) = y_i \left(\frac{2\pi}{\gamma} \right), \quad i = 1, 2 \right\},$$

действующий в банаховом пространстве

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} : y_i(x) \in C \left[0, \frac{2\pi}{\gamma} \right], \quad i = 1, 2 \right\}, \quad \gamma > 0, \quad \gamma^2 = -\alpha\beta > 0.$$

Частный случай такого оператора с $\alpha = -1$, $\beta = 1$ лишь упоминается как Φ -оператор в кандидатской диссертации К.И. Чернышова.

В п. 2.1 с помощью лемм 2.1.1 – 2.1.5 доказаны теоремы 2.1.1, 2.1.2, утверждающие, что оператор (2) обладает 0-НСЧ-свойствами и Φ -свойствами. Построены подпространства $\text{Ker } \mathcal{A}$, $\text{Coim } \mathcal{A}$, $\text{Coker } \mathcal{A}$, $\text{Im } \mathcal{A}$; корневое подпространство и прямое дополнение к нему, проекторы на эти подпространства и полуобратный оператор. В п. 2.2 находится спектр этого оператора (теорема 2.2.1). В п. 2.3 изучаются свойства оператора $\mathcal{A}_c = \mathcal{A} + c \cdot I$.

В главе 3 исследуется задача Коши для уравнения

$$A \frac{dx}{dt} = B(t)x(t) + F(t), \quad (3)$$

с условием

$$x(0) = x^0 \in E_1 \cap \text{dom } A, \quad (4)$$

где A – стационарный замкнутый линейный Φ -оператор, вообще говоря неограниченный, действующий из банахова пространства E_1 в банахово пространство E_2 ; $B(t): E_1 \rightarrow E_2$ – линейный оператор с $\overline{\text{dom } A} = \overline{\text{dom } B} = E_1$; $F(t)$ – заданная непрерывная функция со значениями в E_2 ; $t \in [0, t_k]$.

В п. 3.1 предлагается модифицированный метод каскадной декомпозиции уравнения (3); получена лемма 3.1.1, сводящая это уравнение к равносильной системе. Предполагается, что операторы $A_j(t)$ ($A_0 = A$), строящиеся по формулам (3.1.3), являются Φ -операторами с квадратными матрицами; $\dim \text{Ker } A_j(t) = \dim \text{Coker } A_j(t) = n_j = \text{const}$ при всех $t \in [0, t_k]$.

В п. 3.2 с помощью леммы 3.1.1 решается задача Коши для уравнения (3).

Исследуется **случай 1**: существует такое число $p < \infty$, что $n_{p-1} > n_p = 0$. В этом случае $A_p(t)$ обратим. По формулам (3.1.4) с помощью $F(t)$ строятся некоторые операторы $F_j(t)$, $\Lambda_j F(t)$, $\hat{F}_j(t)$.

Получен следующий результат.

Теорема 3.2.1. Пусть существует такое число p , что $A_p(t)$ обратим. Пусть $Q_j(t)S_{j-1}(t)$ — сильно непрерывно дифференцируемые операторы, $Q_j(t)F_{j-1}(t)$ — непрерывно дифференцируемые функции, $j = 2, 3, \dots, p-1$. Пусть оператор $T_p(t)(I - P): \text{Coim } A \rightarrow \text{Coim } A$ — ограниченный и сильно непрерывный, а функции $\Lambda_p F(t)$, $\hat{F}_{p-1}(t)$ непрерывны при каждом t . Тогда решение задачи (3), (4) существует в том и только в том случае, когда выполняются условия:

$$\begin{aligned} S_0(0)x^0 + F_0(0) &= 0, \\ Q_j(0)S_{j-1}(0)(I - P)x^0 + Q_j(0)F_{j-1}(0) &= 0, \quad j = 1, 2, \dots, p-1. \end{aligned} \quad (5)$$

При выполнении этих условий решение $x(t)$ единственно, имеет вид

$$x(t) = \hat{S}_{p-1}(t) \left(U_{T_p}(t, 0)(I - P)x^0 + \int_0^t U_{T_p}(t, \theta) \Lambda_p F(\theta) d\theta \right) + \hat{F}_{p-1}(t). \quad (6)$$

Оно обладает свойством:

$$\begin{aligned} S_0(t)x(t) + F_0(t) &\equiv 0, \\ Q_j(t)S_{j-1}(t)(I - P)x(t) + Q_j(t)F_{j-1}(t) &\equiv 0, \quad j = 1, 2, \dots, p-1, \quad t \in [0, t_k]. \end{aligned} \quad (7)$$

Кроме того, исходная задача решается в **случае 2**, когда существует такое число p , что $n_{p-1} > n_p = n_{p+1} = \dots$. В этом случае $A_{p+1}(t) = A_{p+2}(t) = \dots = 0$. Получен результат о решении (**теорема 3.2.2**).

Эти результаты отличаются от соответствующих результатов С.П. Зубовой: здесь на первом шаге расщепления исходного уравнения не происходит процесс дифференцирования, что понижает требования на гладкость операторных коэффициентов.

В **главе 4** исследуются начально-краевые задачи для линейных дифференциальных уравнений в частных производных. Задачи решаются сведением равносильными заменами к задаче для дескрипторного уравнения вида (3). Приводятся примеры поставленных задач с конкретными значениями коэффициентов уравнений и условий.

В **п. 4.1** рассматривается задача Гурса для уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = a(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, t) \frac{\partial u}{\partial t} + c(x, t)u(x, t) + \varphi(x, t), \quad (8)$$

с условиями

$$u(x, 0) = g_1(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = g_2(x), \quad u(0, t) = h(t), \quad (9)$$

где $a(x, t)$, $b(x, t)$, $c(x, t)$, $\varphi(x, t)$, $g_1(x)$, $g_2(x)$, $h(t)$ — заданные достаточно гладкие функции; $(x, t) \in \Pi_{x_k, t_k}$.

Получен следующий результат.

Теорема 4.1.1. Пусть выполнены условия: а) функция $a(x, t)$ дифференцируема по x ; б) функции $a(x, t)$, $b(x, t)$, $\varphi(x, t)$ непрерывны в Π_{x_k, t_k} ; в) функции $\frac{\partial a}{\partial x}$, $c(x, t)$ непрерывны по x ; г) функция $h(t)$ непрерывно дифференцируема. Тогда решение задачи (8), (9) существует, единственно и имеет вид:

$$u(x, t) = U_T(x, t, 0)g(x) + \int_0^t U_T(x, t, r)\Phi(x, r) dr, \quad (10)$$

где $U_T(x, t, r)$ — эволюционный оператор, порожденный оператором $T(x, t)$. В настоящей диссертации приведены формулы для нахождения оператора $T(x, t)$ и вектор-функции $\Phi(x, t)$.

Тем самым получен результат задачи в аналитическом виде, отличающийся от соответствующих результатов, полученных в монографии А.Н. Тихонова и А.А. Самарского методом последовательных приближений с введением функции Римана и результатов, полученных в работе А.В. Жибера и Ю.Г. Михайловой с применением каскадного метода Лапласа.

В п. 4.2 изучается задача Гурса для уравнения третьего порядка

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} = a(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + b(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} + d(x, t) \frac{\partial u}{\partial t} + k(x, t)u(x, t) + f(x, t) \quad (11)$$

с условиями

$$u(x, 0) = g_1(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = g_2(x), \quad u(0, t) = h_1(t), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = h_2(t), \quad (12)$$

где $a(x, t)$, $b(x, t)$, $c(x, t)$, $d(x, t)$, $k(x, t)$, $\varphi(x, t)$, $g_1(x)$, $g_2(x)$, $h_1(t)$, $h_2(t)$ — заданные достаточно гладкие функции; $(x, t) \in \Pi_{x_k, t_k}$.

Получен следующий результат.

Лемма 4.2.1, теорема 4.2.1. Пусть выполнены условия: а) функции $a(x, t)$, $b(x, t)$, $\varphi(x, t)$ непрерывны в Π_{x_k, t_k} ; б) $c(x, t)$, $d(x, t)$, $k(x, t)$ непрерывны по x ; в) функции $g_1(x)$, $h_1(t)$, $h_2(t)$ и $b(x, t)$ по x непрерывно дифференцируемы. Тогда

решение $u(x, t) = u_1(x, t)$ задачи (11), (12) существует, единственно и определяется из следующей формулы:

$$\begin{pmatrix} u_1(x, t) \\ u_3(x, t) \end{pmatrix} = U_T(x, t, 0) \begin{pmatrix} g_1(x) \\ \frac{dg_1}{dx} \end{pmatrix} + \int_0^t U_T(x, t, r) \begin{pmatrix} f_1(x, r) \\ f_2(x, r) \end{pmatrix} dr \quad (13)$$

Формулы для нахождения оператора $T(x, t)$ и функций $f_1(x, t)$, $f_2(x, t)$ приведены.

Полученные здесь в аналитическом виде результаты задачи отличаются от соответствующих результатов, полученных в работе М.Х. Шханукова (1982) методом последовательных приближений с введением функции Римана для слабой задачи; результатов, полученных в работах А.Ф. Чудновского (1969, 1976) при исследовании уравнения Аллера; и результатов, полученных в кандидатской диссертации Х.М. Бештокова (2009) с применением численных методов решения.

В п. 4.3 изучается задача нахождения функции $u(x, t)$, удовлетворяющей уравнению

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} + 2a \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + b^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + cu(x, t) = \varphi(x, t) \quad (14)$$

и условиям

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= h_1(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = h_2(x), \quad u(0, t) = u\left(\frac{2\pi}{b}, t\right), \\ h_1(0) &= h_1\left(\frac{2\pi}{b}\right), \quad h_2(0) = h_2\left(\frac{2\pi}{b}\right) \end{aligned} \quad (15)$$

где a, b, c — постоянные, $a \neq 0$, $b > 0$, $c \in \mathbb{C}$; $\varphi(x, t)$, $h_1(x)$, $h_2(x)$ — заданные достаточно гладкие функции; $(x, t) \in \Pi_{\frac{2\pi}{b}, t_k}$.

При решении задачи использовались свойства оператора $A = \mathcal{A}$, заданного формулой (2). В силу полученного результата (**теорема 4.3.1**): *Оператор A не имеет B -присоединенных элементов к $\text{Ker } A$ и что* (**теорема 4.3.2**) *оператор $A_1 = QBP$ обратим в $\text{Ker } A$ можно использовать результат решения задачи для дескрипторного уравнения в случае $p = 1$ (**теорема 3.2.1**). Он сформулирован в лемме 4.3.1, теореме 4.3.3.*

Эти результаты отличаются от соответствующих результатов, полученных в монографии М.О. Корпусова (2010): установлены условия существования решений, как опрокидывающихся, так и ограниченных на любом промежутке времени. В работе А.И. Аристова (2015) решения получены в видах: бегущей волны, квадратичных многочленов и методом дифференциальных связей.

В главе 5 решаются дифференциальные уравнения в банаховых пространствах и уравнение в частных производных, содержащее малый параметр ε . Асимп-

тотическое разложение решения задач строится методом Васильевой-Вишика-Люстерника. Возможно следующее поведение решения $x(t, \varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$: а) $x(t, \varepsilon) \Rightarrow \bar{x}(t)$, где $\bar{x}(t)$ — некоторое решение предельного уравнения; б) $x(t, \varepsilon) = \bar{x}(t) + v(t, \varepsilon)$, где $v(t, \varepsilon)$ — функция погранслоя; в) $\|x(t, \varepsilon)\| \rightarrow +\infty$; г) предела $x(t, \varepsilon)$ не существует. В случае б) говорят о наличии *явления погранслоя*.

В п. 5.1 рассматривается задача

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} = Ax(t, \varepsilon) + F(t), \quad (16)$$

$$x(0, \varepsilon) = x^0 \in E \cap \text{dom } A, \quad (17)$$

где A — замкнутый линейный оператор: $E \rightarrow E$; E — банахово пространство; $\overline{\text{dom } A} = E$; A — Φ -оператор, вообще говоря, неограниченный, имеющий жорданову цепочку произвольной длины; $F(t)$ — непрерывная функция; $t \in [0, t_k]$; $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$.

Изучается случай $\dim \text{Ker } A \geq 1$ при наличии жордановых цепочек элементов, отвечающих собственному числу 0, вообще говоря, различной длины. Рассматриваются операторы $A, A_j, j = 1, 2, \dots$, строящиеся по формулам (5.1.5). Они являются Φ -операторами с квадратными матрицами. Исследуется случай: существует r такой, что A_r обратим. Обозначается $p = \min r$. Построено разложение решения $x(t, \varepsilon)$ в виде ряда по степеням параметра ε :

$$\begin{aligned} x(t, \varepsilon) &= \bar{x}_m(t, \varepsilon) + \bar{v}_m(t, \varepsilon) + R_m(t, \varepsilon), \\ \bar{x}_m(t, \varepsilon) &= \sum_{i=-p}^m \varepsilon^i x_i(t), \quad \bar{v}_m(t, \varepsilon) = \sum_{i=0}^m \varepsilon^i v_i(\tau), \quad \tau = \frac{t}{\varepsilon}, \end{aligned} \quad (18)$$

где $v_i(\tau)$ — функции погранслоя вблизи точки $t = 0$, $R_m(t, \varepsilon)$ — остаточный член. Найдены формулы для нахождения $x_i(t)$ (**первый итерационный процесс**) при каждом значении p ; определена формула (5.1.25) для нахождения $\bar{v}_m(t, \varepsilon)$ и утверждается (**замечание 5.1.1**), что $\bar{v}_m(t, \varepsilon) \in \text{Coim } A$.

Получены следующие результаты.

Теорема 5.1.1. Пусть сужение оператора A на $\text{Coim } A$ есть производящий оператор полугруппы отрицательного типа, $F(t)$ — $(m+p)$ раз непрерывно дифференцируемая функция при каждом $t \in [0, t_k]$. Тогда имеет место асимптотическое разложение (18).

Замечание 5.1.2. Случай а) имеет место, если все точки спектра оператора A находятся в полуплоскости $\text{Re } \lambda \leq \omega < 0$. Случай в) — если хотя бы одна точка спектра оператора A находится в полуплоскости $\text{Re } \lambda > 0$. Случай г) имеет место, если хотя бы одна точка спектра оператора A находится на оси $\text{Re } \lambda = 0$, а остальные точки — в полуплоскости $\text{Re } \lambda < 0$.

Полученные результаты улучшают результаты, полученные в работе С.Г. Крейна и Нго Зуй Кана (1969) о движении сильно вязкой жидкости, где методом Боголюбова-Крылова рассматривается случай, когда алгебраическая и геометрическая кратности нулевого собственного значения оператора A равны; обобщают результаты, полученные в работе В.А. Треногина (1971) с Φ -оператором A , имеющим одномерное ядро. Эти результаты отличаются от результатов, полученных в монографии (2011) С.А. Ломова и И.С. Ломова, где методом регуляризации сингулярных возмущений с самосопряженным оператором A жордановой структуры, действующим в гильбертовом пространстве и имеющим кратный спектр.

Интересно исследовать задачу (16) с оператором A , возмущенным с помощью добавки $c \cdot I$. В п. 5.2 рассматривается задача для уравнения

$$\varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{A}_c u(x, t, \varepsilon) + F(x, t), \quad (19)$$

с условием

$$u(x, 0, \varepsilon) = u^0(x, \varepsilon) \in \text{dom } \mathcal{A}, \quad (20)$$

где $\mathcal{A}_c = \mathcal{A} + c \cdot I$, оператор $\mathcal{A}$ задан формулой (2); $F(x, t)$ — заданная достаточно гладкая функция; $u^0(x, \varepsilon)$ — голоморфная в окрестности точки $\varepsilon = 0$ и достаточно гладкая по x функция; $c \in \mathbb{C}$; $(x, t) \in \Pi_{\frac{2\pi}{\gamma}, t_k}$; $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$.

Сначала рассматривается однородная задача для уравнения (19). Решение задачи представляется в виде суммы решений в подпространствах с помощью проекторов Рисса. Оно построено в виде тригонометрического ряда

$$T(x, t, \varepsilon) = e^{c\tau} \tilde{T}(x, \tau) u^0(x, \varepsilon), \quad (21)$$

$$\tilde{T}(x, \tau) = \frac{A_0(x)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k(x) \cos(\gamma k \tau) + B_k(x) \sin(\gamma k \tau).$$

Интегральные коэффициенты A_k , B_k приведены в настоящей диссертации.

Имеют место следующие утверждения.

Теорема 5.2.1. Пусть функция $u^0(x, \varepsilon)$ дважды непрерывно дифференцируема, имеет третью кусочно-непрерывную производную при каждом x , и выполняются условия

$$\left. \frac{d^j u^0}{dx^j} \right|_{x=0} = \left. \frac{d^j u^0}{dx^j} \right|_{x=\frac{2\pi}{\gamma}}, \quad j = 0, 1, 2. \quad (22)$$

Тогда ряд (21) сходится равномерно на $\Pi_{\frac{2\pi}{\gamma}, t_k} \times [\varepsilon^*, \varepsilon_0]$, $\forall (\varepsilon^* > 0)$, и допускает двойное почленное дифференцирование по x и одинарное по t и удовлетворяет (19), (20).

Замечание 5.2.1. *Имеет место следующее поведение решения задачи (19), (20) при $\varepsilon \rightarrow 0$: случай b) имеет место при условии $c < 0$; случай c) выполняется при условии $c > 0$; случай d) — при условии $c = 0$.*

Затем рассматривается неоднородная задача для уравнения (19). Для нее строится асимптотическое разложение решения (**теорема 5.2.3**).

В п. 5.3, как приложение к результатам п. 5.2, рассматривается задача для уравнения

$$\varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2\varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\varepsilon c \frac{\partial u}{\partial t} + 2c \frac{\partial u}{\partial x} + (\gamma^2 + c^2)u(x, t, \varepsilon) = \varphi(x, t), \quad (23)$$

с условиями

$$\begin{aligned} u(x, 0, \varepsilon) &= h_1(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = h_2(x), \quad u(0, t, \varepsilon) = u\left(\frac{2\pi}{\gamma}, t, \varepsilon\right), \\ h_1(0) &= h_1\left(\frac{2\pi}{\gamma}\right), \quad h_2(0) = h_2\left(\frac{2\pi}{\gamma}\right), \end{aligned} \quad (24)$$

где $h_1(x)$, $h_2(x)$ — заданные достаточно гладкие функции; $c \in \mathbb{C}$, $\gamma > 0$; $\varphi(x, t)$ — заданная достаточно гладкая функция; $(x, t) \in \Pi_{\frac{2\pi}{\gamma}, t_k}$; $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$.

Задача решается сведением равносильными заменами к задаче для дескрипторного уравнения с малым параметром при производной. Исследуется поведение решения при стремлении параметра к нулю. Изучается возможность наблюдения явления погранслоя и влияние параметра c .

Сначала решается однородная задача для уравнения (23). Оно приводится к виду тригонометрического ряда с обоснованием его сходимости (**теорема 5.3.1**, **замечание 5.3.1**).

Затем решается неоднородная задача для уравнения (23). Строится асимптотическое разложение решения (**теорема 5.3.2**).

Полученные результаты отличаются от соответствующих результатов, полученных в дипломной работе С.М. Никольского для уравнения вида (23) с однородными условиями, и результатов, полученных в работе А.Б. Васильевой (2003) методом дифференциальных неравенств.

В п. 5.4 рассматривается задача

$$A \frac{dx}{dt} = (B + \varepsilon C)x(t, \varepsilon) + F(t), \quad (25)$$

$$x(0, \varepsilon) = x^0 \in E_1 \cap \text{dom } A, \quad (26)$$

где A , B , C — линейные операторы: $E_1 \rightarrow E_2$, E_1 , E_2 — банаховы пространства, $\overline{\text{dom}} A = \overline{\text{dom}} B = \overline{\text{dom}} C = E_1$, A — замкнутый Φ -оператор с одномерным ядром;

A, B, C , вообще говоря, неограниченные; $F(t)$ — заданная непрерывная функция; $t \in [0, t_k]$; $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$.

Интересно, что несмотря на то, что уравнение задается с регулярной по малому параметру правой частью, возникают особенности при стремлении малого параметра к нулю. Исследуется поведение решения при стремлении параметра к нулю. Изучается возможность наблюдения явления погранслоя; при наличии явления погранслоя строится разложение решения методом Васильевой-Вишика-Люстерника в виде ряда по степеням малого параметра в частном случае регулярной пары (A, B) :

$$\begin{aligned} x(t, \varepsilon) &= \bar{x}_m(t, \varepsilon) + \bar{v}_m(t, \varepsilon) + R_m(t, \varepsilon), \\ \bar{x}_m(t, \varepsilon) &= \sum_{i=0}^m \varepsilon^i x_i(t), \quad \bar{v}_m(t, \varepsilon) = \sum_{i=0}^m \varepsilon^i v_i(\tau), \quad \tau = \frac{t}{\varepsilon^n}. \end{aligned} \quad (27)$$

Устанавливается асимптотичность решения. Для нахождения компонент разложения решения используется метод каскадной декомпозиции уравнения. В **теореме 5.4.1** сформулирован результат о решении предельной задачи. Справедливы следующие результаты.

Теорема 5.4.5. Пусть операторы QB, QC, A^-B, A^-C ограничены, вектор-функция $\tilde{F}_0(t)$ непрерывна, вектор-функция $F(t)$ — непрерывно дифференцируема p раз. Пусть выполнено условие

$$\operatorname{Re} \frac{d_{p-10}}{d_{p-2n}} > 0. \quad (28)$$

Тогда имеет место асимптотическое разложение (27).

Замечание 5.4.1. Имеет место следующее поведение $x(t, \varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$: случай *b*) имеет место, если выполнено (28); случай *c*) имеет место, если $\operatorname{Re} \lambda^* > 0$; случай *d*) имеет место, если $\operatorname{Re} \lambda^* = 0$.

Полученные результаты дополняют результаты, полученные в работе С.П. Зубовой и Е.В. Раецкой (2015), где исследовались качественные свойства решения задачи в терминах жордановых цепочек.

В качестве примера в п. 5.5 приводятся решения задачи (25) с матрично-дифференциальным оператором A (формула (2)) и различными операторами B, C . Полученные результаты сформулированы в **теореме 5.5.1** и **замечании 5.5.2**.

В **заключении** приводятся основные выводы и положения работы, выносимые на защиту.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи в журналах, рекомендованных ВАК

[1] Зубова С. П., **Усков В. И.** Асимптотическое решение задачи Коши для уравнения первого порядка с малым параметром в банаховом пространстве. Регулярный случай / С. П. Зубова, В. И. Усков // Математические заметки. — 2018. — Т. 103, вып. 3. — С. 393-404.

[2] Баев А. Д., **Усков В. И.** Решение задач для дескрипторных уравнений методом декомпозиции / А. Д. Баев, С. П. Зубова, В. И. Усков // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. — 2013. — № 2. — С. 134-140.

[3] Зубова С. П., **Усков В. И.** Асимптотическое решение сингулярно возмущённой задачи Коши для уравнения первого порядка в банаховом пространстве / С. П. Зубова, В. И. Усков // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика, 2016. — № 3. — С. 147-155.

[4] **Усков В. И.** Решение задачи Коши для дескрипторного уравнения первого порядка / В. И. Усков // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. — 2019. — № 1. — С. 150-157.

[5] **Усков В. И.** Асимптотическое решение уравнения первого порядка с малым параметром при производной с возмущенным оператором / В. И. Усков // Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. — 2018. — Т. 23, № 124. — С. 784-796.

Прочие публикации

[6] Зубова С. П., **Усков В. И.** Решение задачи Коши для дескрипторного уравнения в случае двухшаговой декомпозиции / С. П. Зубова, В. И. Усков // Вестник Ижевского государственного университета им. М.Т. Калашникова. Серия: Математика. — 2015. — № 1 (65). — С. 120-122.

[7] Зубова С. П., **Усков В. И.** Приложения матрично-дифференциального оператора к решению задач для уравнений в частных производных / С. П. Зубова, В. И. Усков // Итоги науки: Избранные труды Международного симпозиума по фундаментальным и прикладным проблемам науки. — Москва, 2017. — Выпуск 31. — С. 3-24.

[8] Зубова С. П., **Усков В. И.** Решение задачи для уравнения третьего порядка соболевского типа методом каскадной декомпозиции / С. П. Зубова, В. И. Усков // Вестник факультета прикладной математики, информатики и механики. — 2015. — Вып. 11. — С. 70-83.

[9] **Усков В. И.** Решение одной задачи для уравнения в частных производных третьего порядка методом каскадной декомпозиции / В. И. Усков // Материалы международной конференции «Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна - 2014» – Воронеж, 2014. – С. 352-355.

[10] Зубова С. П., **Усков В. И.** Решение гиперболического уравнения методом декомпозиции / С. П. Зубова, В. И. Усков // Актуальные направления научных исследований XXI века: сборник научных трудов по материалам международной научно-практической конференции «Современные проблемы анализа динамических систем. Приложения в технике и технологиях». – Воронеж, 2014. – № 4, ч. 1 (9-1). – С. 83-85.

[11] Зубова С. П., **Усков В. И.** Асимптотическое решение сингулярно возмущённой задачи Коши для уравнения первого порядка в банаховом пространстве / С. П. Зубова, В. И. Усков // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика: сборник научных трудов по материалам международной научно-практической конференции. – Воронеж, 2015. – № 5, ч. 1 (16-1). – С. 36-38.

[12] Зубова С. П., **Усков В. И.** Асимптотическое решение задачи Коши для дескрипторного уравнения с малым параметром в банаховом пространстве / С. П. Зубова, В. И. Усков // Материалы международной конференции «Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна – 2016». – Воронеж, 2016. – С. 175-177.

[13] **Усков В. И.** Приложения одного фредгольмовского дифференциального оператора / В. И. Усков // Современные методы теории краевых задач: материалы воронежской весенней математической школы «Понтрягинские чтения-XXVII». – Воронеж, 2016. – С. 240-241.

[14] Зубова С. П., **Усков В. И.** О свойствах вырожденности некоторого матричного дифференциального оператора / С. П. Зубова, В. И. Усков // Естественные и математические науки: научные приоритеты учёных: сборник научных трудов по итогам международной научно-практической конференции. – Пермь, 2016. – Вып. 1. – С. 9-12.

[15] **Усков В. И.** Асимптотическое решение системы А.Н. Тихонова / В. И. Усков // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика : сборник научных трудов по материалам международной научно-практической конференции «Современные проблемы математики. Методы, модели, приложения». – Воронеж, 2017. – № 7, ч. 1 (33-1). – С. 47-48.

[16] **Усков В. И.** О погранслое для дескрипторного уравнения с малым параметром / В. И. Усков // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика : сборник научных трудов по материалам международ-

ной научно-практической конференции «Прикладная математика. Математическое моделирование систем и механизмов». — Воронеж, 2017. — № 10, ч. 5 (36). — С. 541-543.

[17] **Усков В. И.** Решение уравнения в частных производных четвертого четвертого порядка / В. И. Усков // Материалы Международной конференции, посвященной 100-летию С.Г. Крейна. — Воронеж, 2017. — С. 181-183.

[18] Зубова С. П., **Усков В. И.** Исследование эллиптического уравнения в частных производных второго порядка с малым параметром / С. П. Зубова, В. И. Усков // Фундаментальные и прикладные проблемы науки: Материалы XII Международного симпозиума. — Москва, 2017. — С. 27-30.

[19] **Усков В. И.** Асимптотическое решение задачи Коши для уравнения первого порядка с малым параметром и некоторым параметром в правой части / В. И. Усков // Материалы международной конференции «Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна — 2018». — Воронеж, 2018. — С. 333-336.

[20] Зубова С.П., **Усков В. И.** Решение уравнения в частных производных второго порядка с малым параметром / С. П. Зубова, В. И. Усков // Современные методы теории краевых задач: материалы международной конференции «Понтрягинские чтения-XXIX», посвященной 90-летию В.А. Ильина. — Москва, 2018. — С. 104.

[21] **Усков В. И.** Асимптотическое решение уравнения в частных производных второго порядка с малым параметром / В. И. Усков // Современные методы теории краевых задач: материалы международной конференции «Понтрягинские чтения-XXIX», посвященной 90-летию В.А. Ильина. — Москва, 2018. — С. 222-223.

[22] **Усков В. И.** Уравнение ветвления для сингулярно возмущенного дифференциального уравнения в банаховом пространстве / В. И. Усков // Материалы XVIII Международной научной конференции по дифференциальным уравнениям «Еругинские чтения-2018». — Минск, 2018. — С. 73-74.

[23] **Усков В. И.** Задача Гурса для дескрипторного уравнения в частных производных / В. И. Усков // Материалы научной конференции «Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам 2018». — Владимир, 2018. — С. 206-208.