Московский Физико-Технический Институт
(государственный университет)
Физтех–школа прикладной математики и информатики

На правах рукописи

Акользин Илья Александрович

Задача Эрдеша–Хайнала о раскрасках гиперграфов и смежные вопросы

01.01.09 — дискретная математика и математическая кибернетика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2018

Работа выполнена на кафедре дискретной математики
Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Московский физико-технический институт (государственный университет)».

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
Шабанов Дмитрий Александрович

Работа представлена "__"__________ 2018 г. в Аттестационную комиссию федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Московский физико-технический институт (государственный университет)» для рассмотрения советом по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, доктора наук в соответствии с п. 3.1 ст. 4 Федерального закона "О науке и государственной научно-технической политике".

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования и степень ее разработанности

Диссертационная работа относится к классическому направлению комбинаторного анализа — экстремальным задачам для конечных систем подмножеств и посвящена исследованию ряда известных проблем теории раскрасок гиперграфов. Изучение экстремальных задач о раскрасках гиперграфов началось в работах П. Эрдеша с различными соавторами в 60-70-х годах прошлого века. Типичную задачу подобного вида можно описать следующим образом: требуется найти минимально возможное значение определенной характеристики (числа ребер, максимальной степени вершины и т.п.) гиперграфа в некотором классе n-однородных гиперграфов (например, в классе частичных систем Штейнера или гиперграфов с большим обхватом) с хроматическим числом больше r (или не допускающим других специальных раскрасок в r цветов). Самой известной задачей из данного класса является проблема Эрдеша–Хайнала[1]: требуется найти минимально возможное количество ребер гиперграфа в классе n-однородных гиперграфов с хроматическим числом больше r. Искомую экстремальную величину принято обозначать через $m(n, r)$. Проблема Эрдеша–Хайнала о величине $m(n, r)$ — это, несомненно, центральная задача теории раскрасок гиперграфов, положившая начало целому направлению в экстремальной комбинаторике. Проблема Эрдеша–Хайнала и смежные задачи имеют тесную связь с теорией Рамсея, теорией графов, теорией случайных подмножеств. Большая часть подобных проблем является очень трудной и на сегодняшний день далека даже от асимптотического решения.

Задача Эрдеша–Хайнала о поиске величины $m(n, r)$ привлекала внимание многих ведущих мировых специалистов в области комбинаторики и теории графов. Ей, в частности, посвящены работы таких известных математиков, как Н. Алон[2], Й. Бек[3], Дж. Спенсер[4], П. Сеймур[5], Дж. Радхакришнан и А. Сринивасан[6], А.В. Косточка[7]. В последнее десятилетие в данной задаче и смежных

[1] P. Erdős, A. Hajnal, "On a property of families of sets", *Acta Mathematica of the Academy of Sciences, Hungary*, **12**:1–2 (1961), 87–123.

[2] N. Alon, "Hypergraphs with high chromatic number", *Graphs and Combinatorics*, **1**:1 (1985), 387–389.

[3] J. Beck, "On 3-chromatic hypergraphs", *Discrete Mathematics*, **24**:2 (1978), 127–137.

[4] J. H. Spencer, "Coloring n-sets red and blue", *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, **30**:1 (1981), 112–113.

[5] P. D. Seymour, "A note on a combinatorial problem of Erdős and Hajnal", *J. London Math. Soc.*, **8**:2 (1974), 681–682.

[6] J. Radhakrishnan, A. Srinivasan, "Improved bounds and algorithms for hypergraph two-coloring", *Random Structures and Algorithms*, **16**:1 (2000), 4–32.

[7] A. V. Kostochka, "Coloring uniform hypergraphs with few colors", *Random Structures and Algorithms*, **24**:1 (2004), 1–10.

вопросах удалось добиться качественного прогресса, были разработаны сильные вероятностные подходы и техники, что позволило улучшить большинство ранее известных результатов. Здесь стоит выделить работы А. Плухара[8], Д.А. Шабанова[9], Х. Гебауэр[10], Я. Козика и Д.Д. Черкашина[11].

Первые две главы диссертационной работы посвящены изучению величины $m(n,r)$ из проблемы Эрдеша–Хайнала, а также ее локальной версии, в главах получены верхние и нижние оценки $m(n,r)$ как при больших, так и при малых значениях параметров. Результаты диссертации улучшают и дополняют результаты из перечисленных выше работ. Важно отметить, что отличительной чертой задачи Эрдеша–Хайнала является тот факт, что изучение ее и ряда близких проблем тесно связано с развитием вероятностных методов в дискретной математике. Был создан целый ряд вероятностных инструментов, таких, например, как Локальная лемма, которые в дальнейшем нашли применения в различных областях математики. В настоящей диссертации развитию вероятностных методов также уделено значительное внимание, здесь удалось совместить и модифицировать разработанные ранее инструменты и подходы для получения новых результатов.

Третья глава диссертации посвящена справедливым раскраскам простых гиперграфов. Класс простых гиперграфов является одним из важнейших, ведь многие из гиперграфов, возникающих в задачах теории Рамсея, либо сразу являются простыми, либо очень близки к ним. Особенно активно это направление исследовалось в последние годы. Раскраскам простых гиперграфов посвящены работы З. Сабо[12], А.В. Косточки и М. Кумбхата[13], Д.А. Шабанова[14], А. Фриза и Д. Мубаи[15], Я. Козика[16] и многих других. Направление же, связанное со справедливыми раскрасками, взяло начало со знаменитой теоремы Хайнала–

[8]A. Pluhár, “Greedy colorings for uniform hypergraphs”, *Random Structures and Algorithms*, **35**:2 (2009), 216–221.

[9]D.A. Shabanov, “On r-chromatic hypergraphs”, *Discrete Mathematics*, **312**:2 (2012), 441-458.

[10]H. Gebauer, “On the construction of 3-chromatic hypergraphs with few edges”, *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, **120** (2013), 1483–1490.

[11]D. Cherkashin, J. Kozik, “A note on random greedy coloring of uniform hypergraphs”, *Random Structures and Algorithms*, **47**:3 (2015), 407–413.

[12]Z. Szabó, “An application of Lovasz Local Lemma – a new lower bound for the van der Waerden number”, *Random Structures and Algorithms*, **1**:3 (1990), 343–360.

[13]A.V. Kostochka, M. Kubmhat, “Coloring uniform hypergraphs with few edges”, *Random Structures and Algorithms*, **35**:3 (2009), 348–368.

[14]D.A. Shabanov, “Random coloring method in the combinatorial problem of Erdős and Lovász”, *Random Structures and Algorithms*, **40**:2 (2012), 227–253.

[15]A. Frieze, D. Mubayi, “Coloring simple hypergraphs”, *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **103** (2013), 767–794.

[16]J. Kozik, “Multipass greedy coloring of simple uniform hypergraphs”, *Random Structures and Algorithms*, **48**:1 (2016), 125–146.

Семереди[17] о справедливых раскрасках графов. И здесь за последние 10-15 лет был произведен качественный прорыв, появилось несколько областей теории графов, связанных с различными обобщениями теоремы Хайнала–Семереди. Подобные результаты позволяют получить качественное представление о возможности разбиения плотного графа на части, в каждой из которых мы можем отыскать копию одного и того же графа G (т.н. G-фактор). В последние годы появляются и работы о справедливых раскрасках гиперграфов. В диссертационной работе доказана теорема типа Хайнала–Семереди о возможности справедливой раскраски простого n-однородного гиперграфа в терминах ограничения на максимальную степень вершины.

Подведем итоги. В диссертации изучаются классические задачи комбинаторного анализа о раскрасках гиперграфов, восходящие к проблеме Эрдеша–Хайнала и активно изучавшиеся в последние годы. Важную роль в исследовании играет развитие и применение вероятностных методов. Все это позволяет говорить о несомненной актуальности темы диссертационных исследований.

Цель работы

Целью диссертационной работы является исследование ряда известных задач экстремальной комбинаторики и теории гиперграфов. Основными задачами работы являются:

- асимптотическое исследование проблемы Эрдеша–Хайнала о раскрасках гиперграфов;
- изучение взаимосвязи хроматического числа однородного гиперграфа с его максимальной степенью ребра (“локальный” вариант проблемы Эрдеша–Хайнала);
- исследование задачи Эрдеша–Хайнала при малых значениях параметров;
- изучение существования справедливой раскраски в два цвета простого однородного гиперграфа.

Научная новизна

Все результаты диссертации являются новыми и получены автором самостоятельно.

[17] A. Hajnal, E. Szemerédi, “Proof of a conjecture of P. Erdős”, *Combinatorial theory and its applications, II (Proc. Colloq., Balatonfüred, 1969)* (1970), 601–623.

Теоретическая и практическая значимость работы

Диссертация носит теоретический характер. Результаты и методы работы могут быть полезны в исследованиях задач экстремальной и вероятностной комбинаторики, связанных с раскрасками гиперграфов.

Методология и методы исследования

В работе используются вероятностные методы комбинаторного анализа, комбинаторные методы теории гиперграфов, теория случайных гиперграфов. Доказательства основных результатов опираются на метод случайной перекраски, критерий Плухара и конструкции турановских систем.

Положения, выносимые на защиту

В диссертационной работе получены новые результаты, которые состоят в следующем:

1. Получены новые оценки в задаче Эрдеша–Хайнала о минимальном числе ребер гиперграфа в классе n-однородных гиперграфов с хроматическим числом больше r в случае, когда $r > n$.

2. Получены новые оценки максимальной степени ребра n-однородного гиперграфа с хроматическим числом больше r в случае, когда $r > n$.

3. Найдена новая нижняя оценка числа ребер 3-однородного гиперграфа с хроматическим числом больше трех.

4. Доказана теорема типа Хайнала–Семереди, дающая достаточное условие существования справедливой раскраски простого однородного гиперграфа в два цвета в терминах ограничения на максимальную степень вершины.

Степень достоверности и апробация результатов

Все результаты строго доказаны.

Результаты диссертации докладывались на следующих научных семинарах:

1. “Кафедральный научно-исследовательский семинар кафедры дискретной математики” ФИВТ МФТИ, руководитель – профессор А.М. Райгородский (октябрь 2014).

Кроме того, результаты диссертации также были представлены на следующих международных конференциях:

1. 54-я научная конференция МФТИ (Долгопрудный, 10–30 ноября 2011 года).

2. 55-я научная конференция МФТИ (Долгопрудный, 19–25 ноября 2012 года).

3. 57-я научная конференция МФТИ, посвященная 120-летию со дня рождения П. Л. Капицы (Долгопрудный, 24–29 ноября 2014 года).

4. European Conference on Combinatorics, Graph Theory and Applications (Eurocomb–2015, Берген, Норвегия, 31 августа – 04 сентября 2015 года).

5. Workshop on Extremal Combinatorics and Combinatorial Geometry (Долгопрудный, 25 марта 2016 года).

Публикации

Результаты диссертации опубликованы в четырех работах [A01]–[A04] списка литературы. Работы [A01] и [A03] опубликованы в изданиях, входящих в Scopus и Web of Science. Работа [A02] — в издании, входящем в Scopus, а работа [A04] — в издании, индексируемом RSCI.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, трех глав и заключения. Полный объем диссертации составляет 72 страницы. Список литературы содержит 45 наименований.

Основное содержание работы

Во **введении** даются основные определения теории гиперграфов, приводится формулировка проблемы Эрдеша–Хайнала о раскрасках гиперграфов и обсуждается ее связь с вероятностными методами в комбинаторике.

Гиперграфом H называется пара $H = (V, E)$, где $V = V(H)$ — некоторое конечное множество, называемое множеством вершин гиперграфа, а $E = E(H)$ – некоторая совокупность различных подмножеств множества V, которые называются ребрами гиперграфа. Раскраской множества вершин V называется отображение f из V в C, где C — произвольное множество (множество цветов). Если $|C| = r$, то раскраска называется r-цветной. Раскраска вершин гиперграфа называется правильной, если в этой раскраске все ребра гиперграфа являются неодноцветными. Хроматическим числом гиперграфа H называется минимальное число цветов, требуемое для правильной раскраски множества вершин. Если хроматическое число H не превосходит r, то H называется r-раскрашиваемым. Гиперграф является n-однородным, если каждое его ребро состоит ровно из n вершин. Так, например, обычный граф – это 2-однородный гиперграф в данной терминологии.

Первая глава диссертации состоит из пяти параграфов и посвящена классической задаче Эрдеша–Хайнала. В 1961 П. Эрдеш и А. Хайнал[1] поставили следующую задачу: найти величину $m(n,r)$, равную минимально возможному числу ребер в n-однородном гиперграфе с хроматическим числом больше, чем r. Формально, если обозначить через $\mathcal{H}(n,r)$ множество всех n-однородных гиперграфов с хроматическим числом больше, чем r, то

$$m(n,r) = \min_{H \in \mathcal{H}(n,r)} |E(H)|.$$

В параграфе **1.1** обсуждается история проблемы Эрдеша–Хайнала и приводятся известные результаты относительно исследования величины $m(n,r)$. Параграф **1.2** посвящен новым нижним и верхним оценкам величины $m(n,r)$ в случае, когда параметр количества цветов r превышает параметр однородности n. Эти результаты сформулированы в следующих двух теоремах.

Теорема 1. *Пусть $r > n$, тогда*

$$m(n,r) = O\left(n^{7/2}(\ln n)\left(\frac{1}{e}\right)^n \binom{r(n-1)+1}{n}\right) = O\left(n^3(\ln n) r^n\right). \qquad (1)$$

Теорема 2. *Пусть $r > n \geqslant 3$, $a = \lfloor \frac{n-1}{n} r \rfloor$, $b = r - a = \lceil \frac{r}{n} \rceil$. Тогда существует такая абсолютная константа $c > 0$, что*

$$m(n,r) \geqslant c\,(n-1)b\left(\frac{n}{\ln n}\right)^{\frac{a-1}{a}} a^{n-1}.$$

Следствие из теоремы 2 дает более ясное представление об асимптотическом поведении $m(n,r)$ в случае очень большого значения r по сравнению с n.

Следствие 1. *Существует такая абсолютная константа $c_1 > 0$, что при $r > n$ выполнено*

$$m(n,r) \geqslant c_1 \left(\frac{n}{\ln n}\right) r^n. \qquad (2)$$

В 1985 году Н. Алон[2] выдвинул сильную гипотезу о том, что для любого $n > 2$ существует предел отношения значения $m(n,r)$ к r^n при $r \to \infty$, $\lim\limits_{r\to\infty} \frac{m(n,r)}{r^n}$. Полученные в диссертационной работе неравенства (1) и (2) дают полиномиальные ограничения на этот потенциальный предел:

$$c \cdot \frac{n}{\ln n} \leqslant \liminf_{r\to\infty} \frac{m(n,r)}{r^n} \leqslant \limsup_{r\to\infty} \frac{m(n,r)}{r^n} \leqslant C \cdot n^3 \ln n.$$

Новые оценки (1) и (2) улучшают ранее известные результаты Н. Алона[2] и Д.А. Шабанова[18] об асимптотическом поведении величины $m(n, r)$ при $r > n$.

В параграфе **1.3** формулируется локальный вариант задачи Эрдеша–Хайнала, в котором требуется найти величину $d(n, r)$, равную минимально возможному значению максимальной степени ребра в n-однородном гиперграфе с хроматическим числом большим r. Напомним, что степенью ребра в гиперграфе H называется количество других ребер H, имеющих общие вершины с данным ребром. Максимальную степень ребра гиперграфа H будем обозначать через $D(H)$. Снова, если обозначить через $\mathcal{H}(n, r)$ множество всех n-однородных гиперграфов с хроматическим числом больше, чем r, то

$$d(n, r) = \min_{H \in \mathcal{H}(n,r)} D(H).$$

В параграфе приводится история исследования величины $d(n, r)$, впервые начавшегося в 1973 году в знаменитой работе П. Эрдеша и Л. Ловаса[19]. Основные результаты параграфа дают новые нижнюю и верхнюю оценки величины $d(n, r)$.

Теорема 3. *Существует такая абсолютная константа $c > 0$, что для любых $n \geqslant 3$ и $r \geqslant 2$ выполнено неравенство*

$$d(n, r) \geqslant c \left(\frac{n}{\ln n} \right)^{\frac{r-1}{r}} r^{n-1}. \tag{3}$$

Из (3) непосредственно следует, что при $r > n$ мы имеем следующее соотношение для $d(n, r)$:

$$d(n, r) = \Omega \left(\frac{n}{\ln n} \, r^{n-1} \right).$$

Теорема 4. *Если $r > n$, то*

$$d(n, r) = O \left(n^3 r^{n-1} \ln n \right). \tag{4}$$

Полученные соотношения (3) и (4) улучшают ранее известные результаты Д.А. Шабанова[9], а также Д.Д. Черкашина и Я. Козика[11] относительно величины $d(n, r)$ в случае $r > n$.

В параграфе **1.4** приводятся доказательства теорем 2 и 1 об асимптотическом поведении величины $m(n, r)$. Доказательство теоремы 1 опирается на тесную связь между $m(n, r)$ и числами Турана, использованный ранее Алоном[2].

---

[18] Д. А. Шабанов, “Об улучшении нижней оценки в комбинаторной задаче Эрдеша–Хайнала”, *Доклады Академии Наук*, **426**:2 (2009), 177–178.

[19] P. Erdős, L. Lovász, “Problems and results on 3-chromatic hypergraphs and some related questions”, *Infinite and Finite Sets*, Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai, **10**, Amsterdam: North Holland, 1973, 609–627.

Улучшение предыдущих известных оценок удалось получить за счет применения более сильной оценки турановской плотности из работы А. Сидоренко[20]. Доказательство нижней оценки представляет собой комбинацию идей из работ Алона[2], Черкашина–Козика[11] и использует известный критерий Плухара[8], который связывает существование правильной r-раскраски гиперграфа с наличием некоторой нумерации вершин, не содержащей, так называемых, упорядоченных r-цепей.

Наконец, параграф **1.5** посвящен доказательству теорем 3 и 4 о величине $d(n, r)$. При доказательстве теоремы 3 в дополнение к техникам, используемым при доказательстве теоремы 2 применяется Локальная лемма Ловаса в несимметричном и полиномиальном вариантах. Доказательство же теоремы 4 заключается в вероятностной регуляризации конструкции Сидоренко[20], использованной при доказательстве верхней оценки $m(n, r)$.

Вторая глава диссертации состоит из трех параграфов и посвящена исследованию значения $m(3, 3)$. Задача Эрдеша–Хайнала имеет богатую историю исследования при малых значениях параметров n и r. Так, в случае графов, $n = 2$, имеет место точное равенство $m(2, r) = \binom{r+1}{2}$. Кроме того, нетрудно установить, что $m(3, 2) = 7$. Наиболее примечательная история исследования величины $m(n, r)$ при $r = 2$. Точное значение $m(4, 2) = 23$ было получено П. Остергардом[21] только с помощью компьютерного перебора, а при других значениях параметров точные значения неизвестны.

Параграф **2.1** посвящен обзору работ, посвященных исследованию задачи Эрдеша–Хайнала при малых значениях параметров. Приведены рекуррентные соотношения из работ Х. Аббота и Л. Мозера[22], Х. Аббота и Д. Хансона[23], Б. Тофта[24], Дж. Мэтьюза с соаторами[25]. Подобные рекуррентные соотношения позволяют получить лучшие на сегодняшний день известные верхние оценки величин $m(n, 2)$ для небольших значений n.

В параграфе **2.2** формулируется новый результат, полученный в диссертационной работе.

---

[20] A. Sidorenko, “Upper bounds for Turán numbers”, *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, **77**:1 (1997), 134–147.

[21] P. Östergard, “On the minimum size of 4-uniform hypergraphs without property B”, *Discrete Applied Mathematics*, **163** (2014), 199–204.

[22] H. L. Abbot, L. Moser, “On a combinatorial problem of Erdős and Hajnal”, *Canadian Mathematical Bullettin*, **7** (1964), 177–181.

[23] H. L. Abbot, D. Hanson, “On a combinatorial problem of ErdSos”, *Canadian Mathematical Bullettin*, **12** (1969), 823–829.

[24] B. Toft, “On color critical hypergraphs”, *Infinite and Finite Sets*, **3** (1975), 1445–1457.

[25] J. Mathews, M. K. Panda, S. Shannigrahi, “On the construction of non-2-colorable uniform hypergraphs”, *Discrete Applied Mathematics*, **180** (2015), 181–187.

Теорема 5. *Выполнены неравенства:*

$$27 \leqslant m(3,3) \leqslant 35.$$

Наконец, параграф **2.3** полностью посвящен доказательству теоремы 5. Если верхняя оценка $m(3,3)$ тривиальна, то обоснование нижней требует тщательного анализа 3-однородных гиперграфов с 26 ребрами. В начале приводится ряд несложных соображений, которые позволяются сразу обосновать результат для многих значений числа вершин. Например, легко показать, что достаточно рассматривать только гиперграфы, в которых любая пара вершин соединена хотя бы одним ребром. Еще одна важная идея — искать требуемую правильную раскраску в 3 цвета только среди сбалансированных, т.е. таких раскрасок, в которых мощности цветовых классов различаются не более, чем на единицу. Наконец, третье замечание состоит в том, что снова можно использовать связь с числами Турана и пользоваться известными оценками для них.

За этим следует непосредственно разбор случаев, параметризуемых числами v, числом вершин гиперграфа, и α, максимальным размером независимого множества. Напомним, что подмножество вершин гиперграфа называется независимым, если оно не содержит внутри себя ни одного ребра гиперграфа полностью. Для каждой пары значений (v, α) устанавливается, что число ребер гиперграфа при заданных ограничениях должно быть не меньше, чем 27.

Третья глава диссертации состоит из четырех параграфов. В ней исследуется задача типа Хайнала–Семереди о справедливых раскрасках гиперграфов. Параграф **3.1** начинается с определения: *справедливой* называется правильная раскраска вершин гиперграфа, в которой мощности цветовых классов отличаются не более, чем на единицу. Напомним, что степенью вершины в графе или гиперграфе называется количество ребер, содержащих эту вершину. Один из базовых фактов теории графов состоит в том, что для любого графа G выполнено

$$\chi(G) \leqslant \Delta(G) + 1,$$

где $\Delta(G)$ — это максимальная степень вершины графа G, а $\chi(G)$ – его хроматическое число. В 1970 году Хайнал и Семереди[17] доказали гипотезу Эрдеша о том, что в тех же самых условиях каждый граф допускает справедливую раскраску в $\Delta(G) + 1$ цвет. Получение аналогичных результатов для справедливых раскрасок гипергафов весьма затруднительно. Так, для общего класса n-однородных гиперграфов мы имеем лишь утверждение, аналогичное классической теореме Эрдеша–Ловаса. Оно вытекает из результатов работы Лу и Секеи[26] об упаков-

[26] L. Lu, L. Székely, “Using Lovász Local Lemma in the space of random injections”, *Electronic Journal of Combinatorics* **13** (2007), Research paper №63.

ках гиперграфов: если число вершин n-однородного гиперграфа H делится на r и максимальная степень вершины $\Delta(H)$ ограничена:

$$\Delta(H) \leqslant \frac{r^{n-1}}{2en},$$

то для H существует справедливая раскраска в r цветов. Никаких улучшений данной оценки до сих пор нет. Однако можно получить более сильные результаты при рассмотрении класса так называемых *простых* гиперграфов. Напомним, что гиперграф называется простым, если любые два его ребра имеют не более одной общей вершины. Так, для класса простых гиперграфов результат Лу и Секеи был усилен в работе Шабанова[27], где было показано, что если H – простой n-однородный гиперграф с условием

$$\Delta(H) \leqslant c\frac{2^{n-1}}{\sqrt{n \ln n}},$$

где $c > 0$ – некоторая абсолютная константа, то для H существует справедливая раскраска в два цвета.

Основной результат третьей главы диссертации заметно улучшает оценку на максимальную степень вершины простого n-однородного гиперграфа, которая обеспечивает существование справедливой раскраски вершин в два цвета.

Теорема 6. *Существуют такие $n_0 \in \mathbb{N}$ и $c > 0$, что при $n > n_0$ для любого n-однородного простого гиперграфа $H = (V, E)$ с максимальной степенью вершины, не превосходящей $c \cdot 2^{n-1}$, существует справедливая раскраска H в 2 цвета.*

Отметим, что теорема 6 усиливает и недавний результат Я. Козика и Д.А. Шабанова[28], в котором в аналогичных условиях было обосновано лишь наличие у простого гиперграфа правильной, но не обязательно справедливой раскраски в два цвета.

В параграфе **3.2** приведена основная часть доказательства теоремы 6, основанная на методе случайной перекраски. Пусть мощность множества вершин исходного гиперграфа $H = (V, E)$ равна N, тогда любую раскраску множества вершин в два цвета можно представить как биекцию между множеством V и объединением двух непересекающихся множеств R и B размера $\lceil N/2 \rceil$ и $\lfloor N/2 \rfloor$, соответственно. Нам необходимо показать наличие такой биекции, что

[27] D.A. Shabanov, “Equitable two-colorings of uniform hypergraphs”, *European Journal of Combinatorics*, **43** (2015), 185–203.

[28] J. Kozik, D.A. Shabanov, “Improved algorithms for colorings of simple hypergraphs and applications”, *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **116** (2016), 312–332.

образ любого ребра не лежит целиком ни в одном из множеств R или B. Для этого рассматривается случайная биекция из V в $R \sqcup B$, а затем запускается определенный алгоритм перекраски одноцветных ребер, представляющий собой модификацию алгоритма из работы[28]. В параграфе производится разбор возможных случаев, при которых алгоритм случайной перекраски не приводит к построению правильной биекции и оценивается вероятность каждого из таких событий.

Для обоснования того, что с положительной вероятностью алгоритм приведет к успеху, применяется специальный вариант Локальной леммы. Причем в отличие от первой главы, в рамках случайной биекции нет независимости между случайными цветами вершин, и поэтому необходимо использовать вариант с отрицательной коррелированностью. Все это обсуждается в параграфе **3.3**, где и формулируется применяемый вариант Локальной леммы.

Лемма 1. *Пусть $A_1, ..., A_M$ – это события на вероятностном пространстве. Пусть для каждого события A_i выделено некоторое конечное множество $dom(A_i)$ с таким условием, что для любого $J \subset \{j\colon dom(A_j) \cap dom(A_i) = \emptyset\}$ выполнено*

$$\mathsf{P}\left(A_i \middle| \bigcap_{j \in J} \bar{A}_j\right) \leqslant \mathsf{P}(A_i). \tag{5}$$

Обозначим через $DOM = \bigcup\limits_{i=1}^{M} dom(A_i)$ и для каждого $v \in DOM$ введем полином

$$w_v(z) = \sum_{i\colon v \in dom(A_i)} \mathsf{P}(A_i) z^{|dom(A_i)|}.$$

Если существует такой полином $w(z)$ с условием $w(z) \geqslant w_v(z)$ для любых $v \in DOM$ и $z \geqslant 1$, а также $y \in (0,1)$, такое, что $w(1/(1-y)) \leqslant y$, то

$$\mathsf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{M} \bar{A}_i\right) > 0.$$

Далее используются результаты из работы Лу и Секеи[26] относительно отрицательной корреляции событий в пространстве случайных биекций, что обосновать возможность применить приведенный вариант Локальной леммы.

Параграф **3.4** завершает доказательство теоремы 6. Определяется мажорирующий полином как удвоенная сумма локальных полиномов плохих случаев из параграфа 3.2, а также осуществляется подходящий выбор параметров.

В **заключении** приведены основные результаты диссертационной работы.

Основные результаты работы

В диссертационной работе получены следующие результаты:

1. Получены новые оценки в задаче Эрдеша–Хайнала о минимальном числе ребер гиперграфа в классе n-однородных гиперграфов с хроматическим числом больше r в случае, когда $r > n$.

2. Получены новые оценки максимальной степени ребра n-однородного гиперграфа с хроматическим числом больше r в случае, когда $r > n$.

3. Найдена новая нижняя оценка числа ребер 3-однородного гиперграфа с хроматическим числом больше трех.

4. Доказана теорема типа Хайнала–Семереди, дающая достаточное условие существования справедливой раскраски простого однородного гиперграфа в два цвета в терминах ограничения на максимальную степень вершины.

Благодарности

Автор выражает благодарность своему научному руководителю и соавтору профессору Дмитрию Александровичу Шабанову за многочисленные плодотворные обсуждения задач и результатов диссертации.

Список работ автора по теме диссертации

[A01] I.A. Akolzin, D.A. Shabanov, “Colorings of hypergraphs with large number of colors”, *Discrete Mathematics*, **339**:12 (2016), 3020–3031.

[A02] I.A. Akolzin, D.A. Shabanov, “Colorings of hypergraphs with large number of colors”, *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, **49** (2015), 441–445.

[A03] И. А. Акользин, “О задаче Эрдеша–Хайнала для 3-однородных гиперграфов”, *Математические заметки*, **94**:6 (2013), 933–935.

[A04] И. А. Акользин, “О справедливых раскрасках простых гиперграфов”, *Труды МФТИ*, **9**:4 (2017), 161–173.