

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

на правах рукописи

Латонов Василий Васильевич

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ
ПОЛУАВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ
ЛИНИЯМИ ВИЗИРОВАНИЯ НА
ПОДВИЖНОМ ОСНОВАНИИ**

01.02.01 — Теоретическая механика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2019

Работа выполнена на кафедре прикладной механики и управления механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Научные руководители: — Тихомиров Владимир Викторович,
доцент, кандидат физико-математических наук
— Александров Владимир Васильевич,
профессор, доктор физико-математических наук

Официальные оппоненты: Локуциевский Лев Вячеславович,
доктор физико-математических наук,
МИАН имени В.А. Стеклова,
ведущий научный сотрудник
Юшков Михаил Петрович,
профессор, доктор физико-математических наук
кафедра теоретической и прикладной механики
математико-механического факультета
СПбГУ, профессор
Локшин Борис Яковлевич,
доцент, кандидат физико-математических наук,
Лаборатория управления и навигации
НИИ Механики МГУ, ведущий научный сотрудник

Защита диссертации состоится 20 декабря 2019 г. в 16 часов на заседании диссертационного совета МГУ.01.10 Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова по адресу: 119991, Москва, ул. Ленинские горы, д.1, стр.1, аудитория 16-24.

E-mail: msu.01.10@mech.math.msu.su

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М.В. Ломоносова (Ломоносовский просп., д. 27) и на сайте ИАС «ИСТИНА»: <https://istina.msu.ru/dissertations/241148301>

Автореферат разослан 12 ноября 2019 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета МГУ 01.10
кандидат физико-математических наук

А.А. Зобова

Общая характеристика работы

Актуальность темы.

Системы целеуказания присутствуют во многих устройствах и приборах, предназначенных для поиска и сопровождения различных целей. Процесс поиска цели, а затем и указания цели часто представим как изменение направления визира или взора на какой-либо объект. В задачах оптического целеуказания направление взора на объект в пространстве часто называется линией визирования. Линия визирования — это математическая абстракция, которая нужна для представления направления визира на некий объект в произвольной системе координат (подвижной или неподвижной). В системах целеуказания часто возникают математические задачи оптимального управления линиями визирования, а также их стабилизации относительно заданного программного движения.

Первая из двух задач, решенных в данной работе, — разработка математического обеспечения тренажера целеуказания и разработка алгоритмов тестирования на этом тренажере. Системами целеуказания обычно пользуется человек-оператор. Часто задачу целеуказания человеку требуется решать, находясь на некоем подвижном объекте — основании. Это создает дополнительные сложности оператору. В связи с этим необходимо готовить оператора к использованию системы целеуказания в условиях каких-либо помех (например, движения основания). Проведение тестирования операторов особенно актуально для систем с высокой ценой риска, а также с высокой опасностью для жизни.

Вторая задача — поиск управления, обеспечивающего оптимальную стабилизацию динамического объекта. В работе рассмотрены задачи опти-

мально стабилизации динамического объекта, установленного на подвижном основании. Построено управление, обеспечивающее минимаксную стабилизацию этого объекта в окрестности желаемой программной траектории.

Цель работы.

Исследование посвящено решению задачи разработки математического обеспечения тренажера целеуказания, а также исследованию задачи оптимальной стабилизации динамического объекта, установленного на подвижном основании, и изучению влияния движения основания на процесс стабилизации.

Для достижения этих целей решаются следующие задачи:

1. Разработка математической модели процесса наведения на цель, расположенной в инерциальном пространстве, относительно подвижного основания.
2. Разработка алгоритмов тестирования на тренажерах наведения на цель в экстремальных условиях. В работе рассматриваются два типа тренажеров:
 - Компьютерный — тренировка оператора, сидящего в неподвижном кресле. Включает только визуальную имитацию;
 - Динамический — тренировка оператора на подвижном стенде опорного типа. Включает визуальную имитацию и имитацию угловых ускорений.
3. Исследование влияния движений подвижного основания на систему стабилизации направляющего цилиндра, установленного на основании.

Основные научные результаты.

1. Сформулирована математическая модель процесса целеуказания относительно подвижного основания. Движение основания моделируется кинематическими уравнениями. Сформулирована общая математическая постановка задачи целеуказания в рамках описанных моделей. Решение сведено к игровой задаче двух лиц;
2. Решена задача минимаксной стабилизации динамического объекта, установленного на подвижном основании. Рассмотрено влияние начальных отклонений системы от нуля и разные функциональные классы действующих в системе возмущений: класс постоянных по времени функций и класс периодических функций;
3. Разработан алгоритм быстрого подсчета множества достижимости системы дифференциальных уравнений, на которую наложены геометрические связи. Полученный алгоритм работает быстрее, чем пиксельный метод;
4. Найдены седловые точки в игровых задачах с невыпуклым множеством стратегий одного из игроков в чистых и смешанных стратегиях;
5. Разработано математическое обеспечение для компьютерного и динамического тренажеров целеуказания. Проведены эксперименты на обоих тренажерах. Проведено сравнение полученных результатов.

Научная новизна работы.

1. Задача гарантирующего тестирования качества действий оператора целеуказания сведена к геометрической игре на плоскости;

2. Методика В.В. Александрова определения оптимальных коэффициентов обратной связи в задаче минимаксной стабилизации впервые применена к динамической системе четвертого порядка;
3. Алгоритм быстрого построения множества достижимости динамической системы, содержащей первые интегралы, использован для разработки программного обеспечения тренажера целеуказания. Разработанный алгоритм позволяет определять множество достижимости динамической системы в режиме реального времени;

Методы исследования.

В задачах минимаксной стабилизации динамического объекта относительно подвижного функционалом качества наведения принимается интеграл квадрата нормы фазового вектора. Этот функционал учитывает рассогласование линий визирования на большом промежутке времени, поскольку время, отведенное на второй этап управления не ограничено. Стабилизирующее управление строится в виде обратной связи по фазовым координатам.

Коэффициенты обратной связи находятся как решение задачи минимизации функционала качества стабилизации. Для их вычисления используется методика В.В. Александрова, созданная с использованием уравнения А.М. Ляпунова и метода шатров В.Г. Болтянского. Этот метод разработан для вычисления коэффициентов линейной обратной связи в линейных стационарных системах дифференциальных уравнений при интервальном квадратичном функционале качества стабилизации.

Для решения задач минимаксного управления и максиминного тестирования используется математический аппарат теории игр.

Теоретическая и практическая значимость.

Постановка задачи оптимального целеуказания в дальнейшем может быть расширена путем усложнения моделей подвижного основания, маркера оператора и движения цели. Методика решения задачи минимаксной стабилизации, построенная на базе матричного уравнения Ляпунова и методе шатров Болтянского, применена впервые. В дальнейшем могут быть рассмотрены и более сложные задачи минимаксной стабилизации.

Рассматриваемые в диссертации игровые задачи используются в теории тестирования. Эта теория была развита с целью создания математического обеспечения подготовки операторов сложных систем. В дальнейшем полученные результаты могут быть использованы при создании тренажеров целеуказания на других, более сложных стендах опорного типа.

Задача минимаксной стабилизации может быть применена в системах автоматической стабилизации видеокамеры в кардановом подвесе. Также полученный результат применим к задаче стабилизации радиотелескопа при его наведении на космический объект.

Основные положения, выносимые на защиту.

1. Задача оптимального управления относительно подвижного основания линией визирования маркера и задача оптимального уклонения линии визирования цели сводятся к геометрической игре на плоскости;
2. Существует управление, обеспечивающее минимаксную стабилизацию цилиндра в кардановом подвесе на подвижном основании в окрестности положения равновесия, причем коэффициенты линейной обратной связи по фазовым переменным могут быть вычислены аналитически как точка минимума кусочно-гладкой функции, если граница области асимптотической устойчивости положения равновесия цилиндра вычислена аналитически;

3. Вычисление множества достижимости управляемой системы, аффинной по управлению и содержащей первые интегралы, сводится к решению двух задач: 1) вычисление проекции множества достижимости на подпространство размерности, совпадающей с размерностью конфигурационного многообразия; 2) построение отображения полученной проекции на дополнение выбранного подпространства до пространства, в котором определен вектор позиционных переменных динамической системы.

Достоверность результатов.

Все теоретические результаты получены путем строгих математических рассуждений. Экспериментальные данные получены в результате корректно поставленных экспериментов. Результаты находятся в соответствии с результатами, полученными другими авторами.

Апробация работы.

Результаты работы были доложены автором на рабочем семинаре лаборатории навигации и управления (2019, НИИ механики МГУ), на семинаре Геометрическая теория оптимального управления кафедры общих проблем управления (2019) механико-математического факультета (МГУ имени М.В. Ломоносова), многократно доложены на научно-исследовательском семинаре имени А.Ю. Ишлинского кафедры прикладной механики и управления (2015-2019) механико-математического факультета (МГУ имени М.В. Ломоносова), на семинаре имени В.В. Румянцева по аналитической механике и теории устойчивости под руководством профессора А.В. Карапетяна и доцента А.А. Зобовой (2019), на заседании кафедры теоретической и прикладной механики (2019) математико-механического факультета (СПбГУ).

Результаты работы были доложены автором на конференциях:

- Латонов В.В. Игровые задачи управления линией визирования на подвижном основании (Устный) // Навигация, наведение и управление ле-

тательными аппаратами — ФГУП «ГосНИИАС», Россия, Москва, 21-22 сентября 2017.

- Александров В.В., Латонов В.В., Тихомиров В.В. Вычисление угловых ускорений для тестирования качества наведения на цель на трехступенном стенде с помощью игровых задач (Устный) // IX Международный аэрокосмический конгресс IAC'18 — МГУ им. М.В. Ломоносова, Россия, Москва, 28-31 августа 2018.
- Александров В.В., Латонов В.В. Задачи минимаксной стабилизации линии визирования инерционного объекта на подвижном основании (Устный) // XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики — БашГУ, Россия, Уфа, 19-24 августа 2019.

Публикации соискателя по теме диссертации

Основные результаты диссертации изложены в семи печатных работах, четыре из которых опубликованы в рецензируемых журналах, индексируемых в международных базах Scopus, WoS, RSCI. Список работ приведен в конце автореферата.

Личный вклад

Постановка задачи и оценка результатов принадлежит первому руководителю, методика решения задач минимаксной стабилизации принадлежит второму руководителю, а решение задач и получение аналитических и численных результатов — соискателю.

Все представленные в диссертации аналитические и численные результаты получены лично соискателем.

Объем и структура работы.

Диссертационная работа состоит из введения, обзора литературы, трех глав, заключения и списка литературы. Полный объем диссертации — **125** страниц, включая **33** рисунка. Список литературы содержит **65** наименований.

Содержание работы

Во введении обосновывается актуальность исследований, проведенных в рамках диссертации. Описывается цель проведенной работы и ставятся задачи, решение которых описано в главах диссертации.

Во введении приводится обзор литературы, касающейся задачи наведения на цель, и задач тестирования качества работы оператора в экстремальных условиях, описываются методы решения задач, рассматриваемых в работе, приводятся результаты, полученные при их решении.

Первая глава посвящена физическому и математическому описанию процесса целеуказания относительно подвижного основания. В этом процессе рассматривается подвижный аппарат,двигающийся по Земле. Он именуется основанием, он совершает поступательные и вращательные движения. С Землей связана инерциальная система координат (ИСК), в которой задается положение аппарата. С основанием в свою очередь жестко связана подвижная система координат. В пространстве расположен неподвижный объект, называемый целью.

На основании жестко закреплена видеокамера для фиксации движения цели. Также на основании расположен монитор, на который поступает изображение с камеры. Перед монитором сидит оператор наведения. Основание закрывает оператору обзор на окружающую среду, и он получает информацию извне только по изображению на мониторе. На экране монитора поверх изображения, поступающего с видеокамеры, изображен маркер опера-

тора — метка, которой управляет оператор. На рис. 1 показано изображение на мониторе, которое видит оператор.

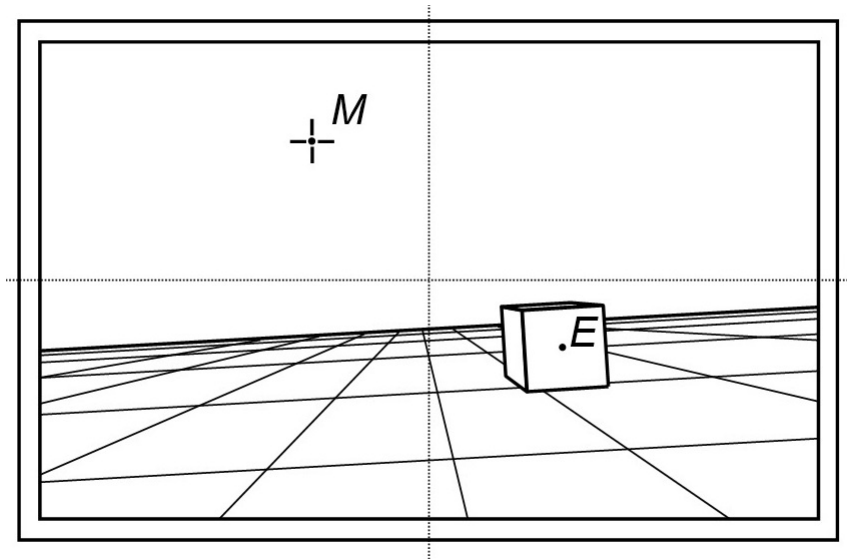


Рис. 1: Изображение на мониторе, которое видит оператор

На основании закреплен объект, обладающий массой и ненулевым тензором инерции. Этот объект в дальнейшем будем называть направляющим цилиндром. Он соединен с основанием при помощи карданова подвеса. Центр масс направляющего цилиндра неподвижен относительно основания. Движением направляющего цилиндра управляет следящая система, которая формирует управляющие моменты сил в зависимости от положения маркера. Можно считать, что оператор управляет направляющим цилиндром посредством следящей системы. У цилиндра есть рабочее направление вдоль оси симметрии цилиндра.

На основании установлена инерциальная навигационная система для отслеживания движения основания. На кольцах карданова подвеса установлены датчики угла для определения положения направляющего цилиндра относительно подвижного основания. Также на основании сидит водитель, управляющий движением основания. Он наряду с формой рельефа Земли

определяет режим поступательных и вращательных движений основания и, следовательно, движение изображения цели на экране монитора.

Таким образом, в задаче фигурируют следующие объекты:

1. Подвижное основание;
2. Земля — инерциальная система координат;
3. Цель (точка E) — неподвижна относительно инерциальной системы координат;
4. Видеокамера фиксации движения цели — жестко зафиксирована на подвижном основании;
5. Экран монитора — жестко зафиксирован на подвижном основании;
6. Оператор по преследованию цели;
7. Маркер на экране монитора (его координаты обозначаются через M);
8. Направляющий цилиндр — тело, обладающее массой и тензором инерции, прикрепленное к подвижному основанию (его координаты обозначаются через P);
9. Водитель — управляет движением основания. В задачах подготовки оператора может выполнять роль инструктора;
10. Бортовые датчики (инерциальные и датчики угла).

На рис. 2 схематично изображены объекты, фигурирующие в задаче.

В первой главе показано, как задачи, связанные с управлением маркерами на мониторе, могут быть описаны при помощи векторов. Приводится математическая модель видеокамеры типа стеноп и ее связь с понятием линии визирования. Линия визирования — это единичный вектор, направленный от

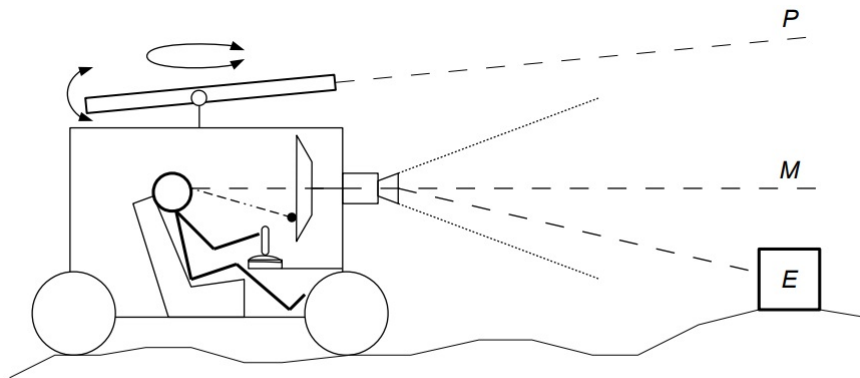


Рис. 2: Схематичное изображение объектов в задаче

начала подвижной системы координат в сторону либо точки в пространстве, либо в сторону, определяемую при помощи точки на мониторе. Направление линии визирования в системе координат, связанной с основанием, которая обозначается через $Cz_1z_2z_3$, определяется двумя параметрами: углом курса φ и углом возвышения θ .

Пусть точка C — центр проекции всех точек трехмерного пространства, попадающих в поле зрения камеры, на плоскость Π . Плоскость Π будем называть изображающей плоскостью. Размеры изображающей плоскости определяются характеристиками видеокамеры. Изображение произвольной точки E в трехмерном пространстве строится путем проведения прямой через точку E и центр проекции C . Изображением точки E будет точка E_Π пересечения такой прямой с изображающей плоскостью (рис. 3). Через f обозначим расстояние от изображающей плоскости до центра проекции. Оптической называется ось камеры, проведенная через центр проекции и перпендикулярная изображающей плоскости. Центром изображения R_Π называется точка пересечения оптической оси с изображающей плоскостью.

Цели ставится в соответствие линия визирования — единичный вектор, направленный от начала подвижной системы координат в сторону цели. Маркеру оператора соответствует линия визирования, которая определяет

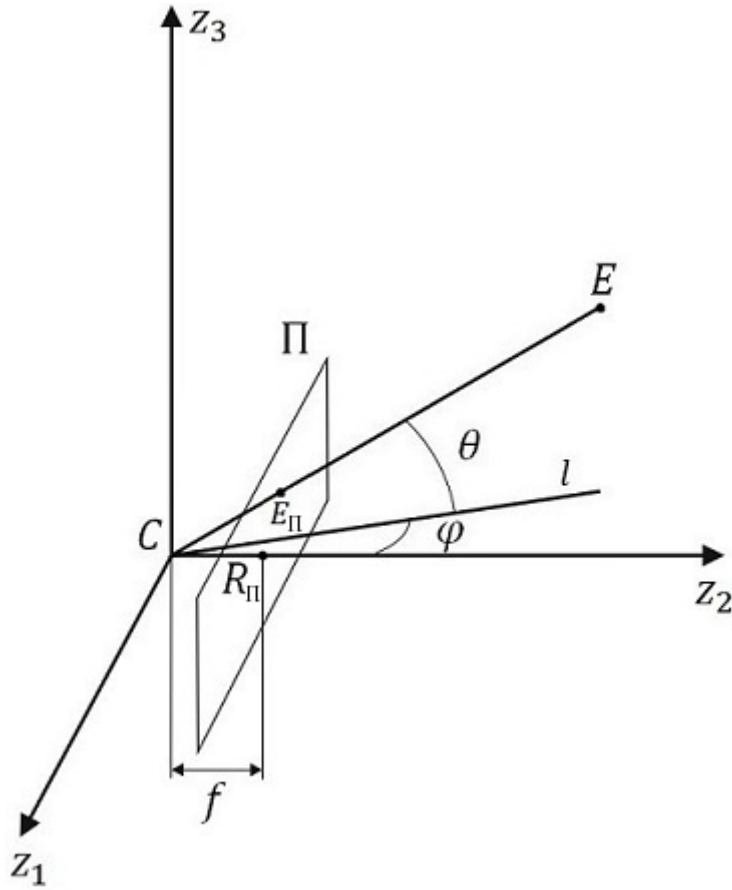


Рис. 3: Приборный трехгранник $Cz_1z_2z_3$: оптическая ось камеры — Cz_2 , изображающая плоскость — Π , фокусное расстояние камеры — f , центр изображения — R_{Π} , точка в инерциальном пространстве — E , ее изображение — E_{Π} , угловые координаты направляющего вектора линии визирования точки E — (φ, θ) .

направление в трехмерном пространстве относительно подвижного основания. Управляя маркером оператор изменяет направление, определяемое этой линией визирования. Совмещение маркеров на мониторе означает совмещение линий визирования.

Введем связанную с изображением на мониторе систему координат $R_{\Pi}\chi_1\chi_2$, начало которой находится в центре изображения R_{Π} , а координатные оси лежат в изображающей плоскости. Рассмотрим множество линий визирования, направленных в ту часть полупространства, в которой содержится изображающая плоскость камеры, то есть те, у которых $z_2 > 0$. Углы, (φ, θ) , задающие эти направления, принадлежат множеству $\{-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} \leq$

$\theta \leq \frac{\pi}{2}$. Для этого множества существует взаимно-однозначное соответствие между углами курса и возвышения и координатами на изображающей плоскости:

$$\begin{cases} \chi_{1E} = -f \tan \varphi_E, \\ \chi_{2E} = f \frac{1}{\cos \varphi_E} \tan \theta_E \end{cases} \quad \begin{cases} \varphi_E = \operatorname{arctg} \frac{-\chi_{1E}}{f}, \\ \theta_E = \operatorname{arctg} \left(\frac{\chi_{2E}}{f} \cos \left(\operatorname{arctg} \frac{-\chi_{1E}}{f} \right) \right) \end{cases} \quad (1)$$

Отображение (1) дает возможность в дальнейшем формулировать все задачи, связанные с точками, изображенными на мониторе, в терминах углов линий визирования. Оно взаимно-однозначно в тех областях определения координат, в которых происходит процесс наведения.

Направляющему цилиндру также ставится в соответствие линия визирования — единичный вектор, параллельный оси его симметрии и направленный в одном из двух направлений, которое будем называть рабочим направлением цилиндра.

В первой главе дано математическое описание процесса наведения маркера оператора на изображение цели и описание процесса стабилизации направляющего цилиндра в окрестности заданного оператором положения. Приведены математические формулировки этих задач в терминах оптимального управления. Приведена общая формулировка задачи оптимизации следящей системы, отвечающей за стабилизацию направляющего цилиндра. Показано, как задача целеуказания сводится к игровой задаче.

Вторая глава посвящена решению задач минимаксной стабилизации направляющего цилиндра в окрестности неподвижной точки. Исследуется стабилизация решения системы дифференциальных уравнений четвертого порядка $\dot{x} = A_c x + bu$, где матрица A_c вообще говоря может зависеть от каких-либо параметров или функций времени. Стабилизирующее управление

строится в виде линейной обратной связи с коэффициентами $\mathbf{k}$, что приводит систему к виду $\dot{x} = A(\mathbf{k})x$, где $A(\mathbf{k}) = A_c + b\mathbf{k}^T$. Величина $\mathbf{k}$ может быть в том числе и матричной. Используется интегральный квадратичный функционал качества стабилизации:

$$\Phi(\mathbf{k}, x(t_0)) = \int_{t_0}^{t_1} x^T E_4 x dt,$$

Решаются три задачи минимаксной стабилизации.

В первой задаче рассматривается система линейных дифференциальных уравнений, полученная путем линеаризации уравнений Лагранжа второго рода в окрестности неподвижной точки. Рассмотрены возмущения по начальным условиям системы. В этой задаче рассмотрены два разных функционала качества стабилизации системы — на бесконечном времени и на конечном. Для случая бесконечного времени получены аналитические формулы наихудших возмущений, которые могут возникнуть в системе. Во второй и третьей задачах уравнения содержат билинейные по координатам и возмущениям части. В системе действуют постоянные возмущения. Во второй задаче постоянно действующие возмущения выбираются из множества константных функций. Эта задача решена с помощью теоремы Харитоновой, из которой определяются условия устойчивости системы линейных дифференциальных уравнений с параметрами. Приведен пример решения этой задачи при заданных численных параметрах. В третьей задаче постоянно действующие возмущения выбираются из множества периодических функций. В этой задаче нестационарная система линейных дифференциальных уравнений приведена к стационарному виду с помощью преобразования Ляпунова.

Во всех задачах коэффициенты обратной связи находятся из области устойчивости, которая строится с учетом требований к запасу устойчивости

решений системы уравнений, описывающей колебания направляющего цилиндра.

Приводится методика вычисления коэффициентов линейной обратной связи, при которых функционал $\Phi(\mathbf{k}, x(t_0))$ принимал бы наименьшее значение при возмущениях, стремящихся его максимизировать:

$\max_{\|x(t_0)\| \leq 1} \Phi(\mathbf{k}, x(t_0)) \rightarrow \min_{\mathbf{k} \in Q_0}$. Здесь Q_0 — область асимптотической устойчивости решений. Эта методика разделяется на три этапа.

На первом этапе интегральный функционал сводится к терминальному: $\max_{\|x(t_0)\|=1} x^T(t_0)H(\mathbf{k})x(t_0) = \max_{1 \leq i \leq n} \mu_i$, где через μ_i обозначаются собственные числа матрицы H , которая является решением матричного уравнения Ляпунова: $A^T(\mathbf{k})H(\mathbf{k}) + H(\mathbf{k})A(\mathbf{k}) = -S(\mathbf{k})$. Здесь $S(\mathbf{k}) = E_4 - e^{A^T(\mathbf{k})t_1}E_4e^{A(\mathbf{k})t_1}$.

На втором этапе вычисляется область асимптотической устойчивости Q_0 в пространстве коэффициентов обратной связи. Это делается с помощью критерия Гурвица с учетом введенного запаса устойчивости.

На третьем этапе осуществляется поиск оптимальных коэффициентов обратной связи с помощью метода шатров Болтянского среди внутренних и граничных точек множества Q_0 (рис. 4).

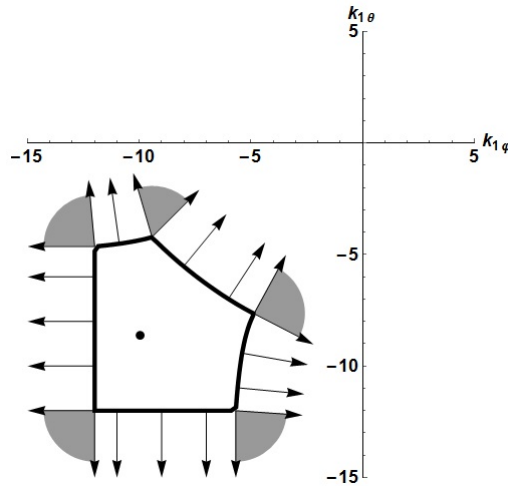


Рис. 4: Шатры вдоль границы (Q_0) и точка, на которой достигается минимакс

Решены задачи минимаксной стабилизации линии визирования инерционного объекта. Первая задача стабилизации решена в линейном приближении. Во второй и третьей задачах получены уравнения, содержащие билинейные части по отклонениям и возмущениям. В этих двух задачах рассмотрены постоянно действующие возмущения: константное и периодическое.

В третьей главе рассматриваются примеры задачи целеуказания. Во всех задачах используется кинематическая модель уравнений линии визирования маркера оператора:

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_M = u_1, \\ \dot{\theta}_M = u_2, \end{cases} \quad (2)$$

В первых двух примерах рассматривается движение основания по гладкой горизонтальной плоскости. Это позволяет описывать ориентацию корпуса подвижного основания с помощью одной угловой координаты — угла курса. Критерием $J(u, w)$ качества наведения в этих задачах берутся функционалы качества наведения и функционал быстродействия наведения.

В третьей задаче используется модель, допускающая произвольную ориентацию подвижного основания. В этом случае ориентация основания описывается тремя углами — курса, тангажа и крена. В этой модели на угловые координаты и угловые скорости наложены ограничения. Уравнения движения линии визирования цели имеют вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{p}} = \omega_\alpha V_\alpha(\mathbf{p}, \alpha, \beta, \gamma) + \omega_\beta V_\beta(\mathbf{p}, \alpha, \beta, \gamma) + \omega_\gamma V_\gamma(\mathbf{p}, \alpha, \beta, \gamma), \\ \dot{\alpha} = \omega_\alpha, \\ \dot{\beta} = \omega_\beta, \\ \dot{\gamma} = \omega_\gamma, \\ \dot{w}_\alpha = w_\alpha, \\ \dot{w}_\beta = w_\beta, \\ \dot{w}_\gamma = w_\gamma, \end{array} \right. \quad (3)$$

где $\mathbf{p}$ — вектор-столбец переменных $\mathbf{p} = (\varphi_E, \theta_E)^T$, который характеризует положение линии визирования цели в системе координат, связанной с основанием, а $V_\alpha(\mathbf{p}, \alpha, \beta, \gamma)$, $V_\beta(\mathbf{p}, \alpha, \beta, \gamma)$, $V_\gamma(\mathbf{p}, \alpha, \beta, \gamma)$ — известные вектор-функции.

В третьей задаче используется функционал точности наведения, который имеет геометрический смысл косинуса угла раствора между линиями визирования, взятый со знаком минус: $J(u, w) = -\langle \mathbf{e}_E(t_1), \mathbf{e}_M(t_1) \rangle$.

В третьей главе описывается, как использовать эти задачи для разработки тренажера обучения оператора целеуказания. Поскольку тренажер предполагает обучение оператора оптимально наводить маркер на цель в наилучших для этого условиях, необходимо вычислить оптимальную стратегию для оператора, которой его в дальнейшем будет необходимо обучить, а также оптимальную стратегию его противника — водителя, чтобы использовать эту стратегию в процессе обучения. Поэтому решение игровой задачи — это решение двух задач оптимизации. В игровой задаче оператор стремится минимизировать функционал:

$$\max_{w \in W} J(u, w) \rightarrow \min_{u \in U}, \quad (4)$$

в свою очередь возмущение стремится максимизировать функционал:

$$\min_{u \in U} J(u, w) \rightarrow \max_{w \in W}. \quad (5)$$

Решение двух экстремальных задач (4) и (5) сводится к геометрической игре на плоскости угловых параметров линий визирования маркера оператора и цели. Для такой редукции требуется вычисление множеств достижимости систем (2) и (3). Поэтому функционал $J(u, w)$ заменяется на функционал $J(M, E)$, где M и E — точки на плоскости (φ, θ) принадлежащие соответствующим множествам достижимости. Поиск оптимального управления для каждого из двух участников процесса сводится к поиску пары точек на множествах достижимости двух систем (рис. 5).

Если выполняется соотношение $\max_{w \in W} \min_{u \in U} J(u, w) = \min_{u \in U} \max_{w \in W} J(u, w) = J(u^*, w^*)$, то говорят, что в игре существует седловая точка, которая достигается на паре стратегий (u^*, w^*) . Существование седловой точки означает, что первый игрок может гарантировать себе выигрыш не хуже, чем $J(u^*, w^*)$, если будет придерживаться стратегии u^* . В то же время второй игрок может гарантировать себе выигрыш $-J(u^*, w^*)$, если не будет отклоняться от стратегии w^* . Седловая точка важна для задач тестирования, поскольку ее существование гарантирует, что оператор будет обучаться потенциально выполнимому заданию, и в ходе обучения будет получать объективную оценку своих действий.

Для проверки существования седловой точки в геометрической игре используется следующий результат. Через $D(r, M)$ будем обозначать геометрическое место точек, равноудаленных от точки P на расстояние r по метрике $J(M, E)$. Оно представляет собой кривую, отделяющую множество более

удаленных точек $\{E \in (\varphi, \theta) : J(M, E) > r\}$ от множества менее удаленных точек $\{E \in (\varphi, \theta) : J(M, E) < r\}$. Обозначим через $ImD(r, M)$ множество $\{E \in (\varphi, \theta) : J(M, E) \leq r\}$. Это множество замкнуто.

Теорема Пара стратегий (M_0, E_0) является седловой точкой игры $\Gamma(pr_{\varphi\theta}(\Omega_E^{t_1}), \Omega_M^{t_1}, J(\mathbf{e}_E, \mathbf{e}_M E))$ с ценой игры r тогда и только тогда, когда существуют две кривые $D(r, M_0)$ и $D(r, E_0)$, такие что:

1. $M_0 \in D(r, E_0)$, $E_0 \in D(r, M_0)$;
2. Множество $pr_{\varphi\theta}(\Omega_E^{t_1})$ содержит точку E_0 и принадлежит множеству $ImD(r, M_0)$;
3. Множество $\Omega_M^{t_1}$ содержит точку M_0 , и M_0 — единственная общая точка $\Omega_M^{t_1}$ и множества $ImD(r, E_0)$.

На рисунке 5 изображены замкнутые кривые $D(r, M_0)$ и $D(r, E_0)$.

Любое управление, приводящее одну из систем из начального положения в выбранную точку множества вычисляется как аналитические решения алгебраических уравнений. Эти решения имеют вид:

$$u_1 = \frac{\varphi'_M - \varphi_M^0}{t_1 - t_0}, \quad u_2 = \frac{\theta'_M - \theta_M^0}{t_1 - t_0},$$

$$w_\alpha = \frac{2(\alpha' - \alpha^0 - \dot{\alpha}^0(t_1 - t_0))}{(t_1 - t_0)^2}, \quad w_\beta = \frac{2(\beta' - \beta^0 - \dot{\beta}^0(t_1 - t_0))}{(t_1 - t_0)^2}, \quad w_\gamma = \frac{2(\gamma' - \gamma^0 - \dot{\gamma}^0(t_1 - t_0))}{(t_1 - t_0)^2},$$

где $(\varphi_M^0, \theta_M^0)$, $(\varphi_E^0, \theta_E^0, \alpha^0, \beta^0, \gamma^0, \dot{\alpha}^0, \dot{\beta}^0, \dot{\gamma}^0)$ — начальные положения, а (φ'_M, θ'_M) , $(\varphi'_E, \theta'_E, \alpha', \beta', \gamma')$ — положения, которые линии визирования должны принять в момент окончания процесса наведения, согласно решению геометрической игры.

Решена задача максиминного тестирования скорости наведения на цель при имитации движения основания классической машиной Дубинса. Решена задача максиминного тестирования точности наведения на цель за отведенное время при кинематической модели подвижного основания с тремя

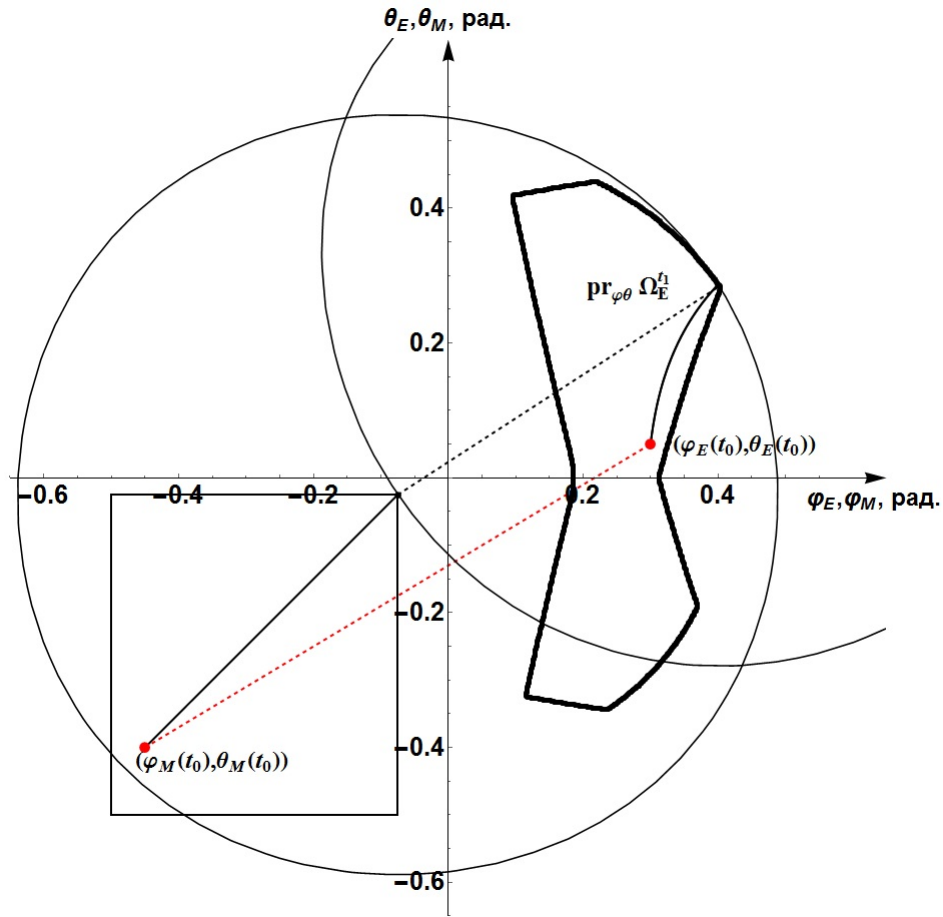


Рис. 5: Пример решения двух экстремальных задач с помощью геометрической игры на плоскости. На этом примере седловая точка существует в чистых стратегиях.

угловыми степенями свободы. Последняя задача сведена к геометрической игре и решена в программных и смешанных стратегиях.

Разработан алгоритм тестирования качества целеуказания на компьютерном и динамическом тренажерах. Проведены эксперименты, которые демонстрируют обучаемость людей на этих тренажерах.

В заключении приводится краткий обзор полученных результатов, отмечается их значимость и актуальность.

Публикации соискателя по теме диссертации

Научные статьи, опубликованные в рецензируемых журналах, индексируемых в международных базах Scopus, WoS, RSCI:

1. Латонов В.В., Тихомиров В.В. Управление линией визирования цели по видеоизображению // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. — 2018. — № 1. — С. 53–59. IF по WoS: 0.116
2. Латонов В.В. Программные стратегии тестирования качества управления линией визирования по видеоизображению // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. — 2018. — № 6. — С. 51–56. IF по WoS: 0.116
3. Бурлаков Д. С., Латонов В. В., Чертополохов В. А. Идентификация параметров модели подвижной платформы опорного типа // Фундаментальная и прикладная математика. — 2018. — Т. 22, № 2. — С. 57–73. IF по WoS: 0.284
4. Латонов В.В. Задача минимаксной оптимизации системы стабилизации линии визирования // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. — 2019. — № 6. — С. 64–68. IF по WoS: 0.116

В сборниках трудов конференций:

1. Латонов В. В. Игровые задачи управления линией визирования на подвижном основании // Тезисы докладов Третьей Всероссийской научно-технической конференции Навигация, наведение и управление летательными аппаратами. — Т. 1. — Научтехлитиздат, М.: Москва, 2017. — С. 107–108.

2. Александров В. В., Латонов В. В., Тихомиров В. В. Вычисление угловых ускорений для тестирования качества наведения на цель на трехстепенном стенде с помощью игровых задач // Тезисы докладов Девятого международного аэрокосмического конгресса IAC'18. — Москва, 2018. — С. 131–132.
3. Александров В. В., Латонов В. В. Задачи минимаксной стабилизации линии визирования инерционного объекта на подвижном основании // XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Аннотации докладов. — РИЦ БашГУ Уфа, 2019. — С. 17–17.