МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. Ломоносова

На правах рукописи

Горелов Василий Александрович

ОБ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯХ В ТЕОРИИ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ ЧИСЕЛ

Специальность 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел

Автореферат

диссертации на соискание учёной степени доктора физико-математических наук

Москва – 2020

Работа выполнена на кафедре теории чисел механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова

Официальные оппоненты: **Берник Василий Иванович**,
доктор физ.-мат. наук, профессор,
Институт математики НАН Белоруссии,
отдел теории чисел,
главный научный сотрудник

Салихов Владислав Хасанович,
доктор физ.-мат. наук, профессор,
Брянский государственный технический университет,
зав. кафедрой высшей математики

Добровольский Николай Михайлович,
доктор физ.-мат. наук, профессор,
Тульский государственный педагогический университет,
зав. кафедрой алгебры, математического анализа и геометрии

Защита диссертации состоится 28 августа 2020 г. в 16 час. 45 мин. на заседании диссертационного совета МГУ.01.17 Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова по адресу: РФ, 119234, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, ГЗ МГУ, механико-математический факультет, аудитория 1408.

E-mail: VGChdissovet@yandex.ru

В связи с эпидемиологической обстановкой защита может пройти в дистанционном режиме, ссылка на трансляцию в сети появится на странице диссертации в системе Истина https://istina.msu.ru/dissertations/286451651/

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ им. М.В. Ломоносова (Ломоносовский проспект, д. 27) и на сайте ИАС "ИСТИНА": http://istina.msu.ru/dissertations/.

Автореферат разослан 24 апреля 2020 г.

Учёный секретарь диссертационного
совета МГУ.01.17 ФГБОУ ВО МГУ,
д.ф.-м.н., доцент Чирский В.Г.

Общая характеристика работы

Актуальность темы и степень её разработанности. В теории трансцендентных чисел значительное место занимают исследования арифметической природы значений различных аналитических функций. Одним из основных методов в этой области остаётся опубликованный в 1929 г. метод К. Зигеля[1,2], позволяющий устанавливать трансцендентность и алгебраическую независимость значений в алгебраических точках целых аналитических функций некоторого класса, названных им E-функциями.

Обозначим $\mathbb{A}$, $\mathbb{K}$, $\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$, $\mathbb{Z}^+$, $\mathbb{Z}^-$, соответственно, поле всех алгебраических чисел, произвольное поле алгебраических чисел конечной степени над $\mathbb{Q}$, кольцо целых алгебраических чисел поля $\mathbb{K}$, множества $\mathbb{N}\cup\{0\}$ и $\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}$. Пусть $\overline{|\alpha|}$ — размер числа $\alpha\in\mathbb{A}$ (максимум модулей чисел, алгебраически сопряжённых с α), $H(P)$ и $\overline{|P|}$ — соответственно, высота и размер многочлена $P\in\mathbb{A}[x_1,\ldots,x_m]$ (максимум модулей и размеров его коэффициентов).

Определение 1. *Аналитическая функция*

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\frac{z^n}{n!},\quad c_n\in\mathbb{K},$$

называется E-функцией, если при любом $\varepsilon>0$:

1°. $\overline{|c_n|}=O(n^{\varepsilon n}),\quad n\to\infty.$

2°. *Существует последовательность $\{d_n\}$ общих знаменателей чисел $c_1,\ldots,c_n$, такая, что $d_n=O(n^{\varepsilon n}),\quad n\to\infty.$*

Множество E-функций является дифференциальным кольцом, замкнутым относительно интегрирования в пределах от 0 до z, а также замены аргумента z на αz, где $\alpha\in\mathbb{A}$.

Простейшими E-функциями являются многочлены из $\mathbb{A}[z]$, e^z, $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$, функция Бесселя $J_0(z)$. Более сложные примеры E-функций получаются из (обобщённых) гипергеометрических функций

$${}_{l+1}F_q\left(\begin{matrix}1,\nu_1,\ldots,\nu_l\\ \lambda_1,\ldots,\lambda_q\end{matrix}\middle|\, z\right)={}_l\varphi_q(z)={}_l\varphi_q(\vec{\nu};\vec{\lambda};z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\nu_1)_n\ldots(\nu_l)_n}{(\lambda_1)_n\ldots(\lambda_q)_n}z^n,$$

[1]Siegel C.L. Über einige Anwendungen Diophantischer Approximationen // Abh. Preuss. Acad. Wiss., Phys.-Math. Kl. – 1929–1930. – № 1. – S. 1–70.

[2]Siegel C.L. Transcendental numbers. – Princeton: Princeton University Press, 1949.

где $0 \leqslant l \leqslant q$, $(\nu)_0 = 1$, $(\nu)_n = \nu(\nu+1)\ldots(\nu+n-1)$, $\vec{\nu} = (\nu_1, \ldots, \nu_l) \in \mathbb{C}^l$, $\vec{\lambda} \in (\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-)^q$.

Функция ${}_l\varphi_q(\vec{\nu}; \vec{\lambda}; z)$ удовлетворяет (обобщённому) гипергеометрическому дифференциальному уравнению

$$L(\vec{\nu}; \vec{\lambda})\, y = (\lambda_1 - 1)\ldots(\lambda_q - 1), \tag{1}$$

где

$$L(\vec{\nu}; \vec{\lambda}) = L(\vec{\nu}; \vec{\lambda}; z) = \left(\prod_{j=1}^{q}(\delta + \lambda_j - 1) - z\prod_{k=1}^{l}(\delta + \nu_k)\right), \quad \delta = z\frac{d}{dz}.$$

При $l < q$, $\nu_1, \ldots, \lambda_q \in \mathbb{Q}$, $\alpha \in \mathbb{A}$ функции ${}_l\varphi_q(\vec{\nu}; \vec{\lambda}; \alpha z^{q-l})$ являются E-функциями.

К. Зигель[1,2] сформулировал гипотезу, что всякая E-функция, удовлетворяющая линейному дифференциальному уравнению с коэффициентами из $\mathbb{C}(z)$, представляется в виде многочлена с алгебраическими коэффициентами от z и конечного числа гипергеометрических E-функций, а также функций, получающихся из них заменой z на αz при $\alpha \in \mathbb{A}$. До появления статей автора в направлении решения этой задачи не было получено никаких результатов (см. стр. 189 книги[3]).

В 1949 г. К. Зигель[2] изложил свой метод в общей форме, установив некоторое достаточное условие алгебраической независимости значений E-функций

$$f_1(z), \ldots, f_m(z), \tag{2}$$

удовлетворяющих системе линейных однородных дифференциальных уравнений

$$y_k' = \sum_{i=1}^{m} Q_{k,i}\, y_i, \qquad Q_{k,i} \in \mathbb{C}(z), \quad k = 1, \ldots, m, \quad m \geqslant 2 \tag{3}$$

в точке $\alpha \in \mathbb{A} \setminus \{0\}$, неособой для этой системы.

Начиная с середины 50-х годов метод Зигеля получил дальнейшее развитие и обобщение в работах А.Б. Шидловского[3] и его учеников. А.Б. Шидловский доказал, что если E-функции (2) составляют решение системы (3) либо системы

$$y_k' = Q_{k,0} + \sum_{i=1}^{m} Q_{k,i}\, y_i, \qquad Q_{k,i} \in \mathbb{C}(z), \quad k = 1, \ldots, m, \quad m \geqslant 1, \tag{4}$$

[3]Шидловский А.Б. Трансцендентные числа. – М: Наука, 1987.

а $T(z)$ — наименьшее общее кратное знаменателей функций $Q_{k,i}$, то однородная алгебраическая независимость (соответственно алгебраическая независимость) чисел

$$f_1(\alpha), \ldots, f_m(\alpha) \tag{5}$$

при $\alpha \in \mathbb{A}$, $\alpha T(\alpha) \neq 0$ равносильна однородной алгебраической независимости (соответственно алгебраической независимости) функций (2) над $\mathbb{C}(z)$. Заметим, что если E-функции связаны каким-либо дифференциальным или алгебраическим уравнением над $\mathbb{C}(z)$, то коэффициенты этого уравнения можно выбрать из $\mathbb{A}(z)$ (см. леммы 2 и 3 гл. 3 книги[3]).

А.Б. Шидловским была также доказана более общая

Теорема II. *Пусть совокупность E-функций (2), $m \geqslant 2$ ($m \geqslant 1$), является решением системы (3) (системы (4)), степень однородной трансцендентности (соответственно степень трансцендентности) функций (2) над $\mathbb{C}(z)$ равна l, $0 \leqslant l \leqslant m$, а $\alpha \in \mathbb{A}$, $\alpha T(\alpha) \neq 0$. Тогда степень однородной трансцендентности (степень трансцендентности) совокупности чисел (5) также равна l.*

В случае $\alpha = 0$ числа (5) являются алгебраическими (это следует из определения E-функций), а в случае, когда α совпадает с особой точкой рассматриваемой системы дифференциальных уравнений (т. е. когда $T(\alpha) = 0$), никаких общих утверждений доказано не было.

При $l < m$ теорема II неэффективна (не позволяет указывать примеры алгебраически независимых чисел). А.Б. Шидловский в своих работах неоднократно пытался её эффективизировать. Им было доказано, что если $\alpha \notin \Lambda$, где Λ – некоторое конечное множество, то из однородной алгебраической независимости (алгебраической независимости) над $\mathbb{C}(z)$ любых l функций

$$f_1(z), \ldots, f_l(z)$$

следует однородная алгебраическая независимость (алгебраическая независимость) чисел

$$f_1(\alpha), \ldots, f_l(\alpha)$$

(см. §§ 5, 6 гл. 4 книги[3]). Но применяемый метод позволял давать эффективное описание множества Λ лишь в некоторых специальных случаях. Результаты такого типа имеются также в работе В.Г. Чирского[4].

Общие теоремы К. Зигеля и А.Б. Шидловского послужили мощным стимулом для разработки методов доказательства алгебраической независимости решений дифференциальных уравнений над $\mathbb{C}(z)$. На эту тему имеется большое число публикаций многих авторов (подробную библиографию и историю вопроса см. в книге[3]). Для дифференциальных уравнений произвольных порядков, а также совокупностей систем дифференциальных уравнений наиболее сильные и общие результаты получили Е. Колчин[5], Ю.В. Нестеренко[6], Д. Бертран[7], В.Х. Салихов[8,9,10] , Ф. Бейкерс, В. Браунвелл и Г. Хекман[11], Н. Кац[12].

Поиск необходимых и достаточных условий алгебраической независимости различных совокупностей функций тесно связан с нахождением всех алгебраических тождеств между этими функциями, что представляет интерес также для теории специальных функций и математического анализа в широком смысле слова.

Метод Зигеля вместе с получением результатов качественного характера об алгебраической независимости значений функций позволяет получать и их количественные аналоги.

В статье[1] К. Зигель доказал, что

$$|P(J_0(\alpha), J_0'(\alpha))| > CH^{-123h^3s^2},$$

где $J_0(z)$ — функция Бесселя, $\alpha \in \mathbb{A} \setminus \{0\}$, $P(x, y) \in \mathbb{Z}[x, y]$, $\deg P \leqslant s$, $H(P) \leqslant H$, $h = [\mathbb{Q}(\alpha)\colon \mathbb{Q}]$, $C > 0$ — постоянная, не зависящая от H.

[4]Чирский В.Г. Об арифметических свойствах значений аналитических функций, связанных алгебраическими уравнениями над полем рациональных функций // Матем. заметки. – 1973. – Т. 14, вып. 1. – С. 83 – 94.

[5]Kolchin E. R. Algebraic groups and algebraic dependence // Amer. J. Math. – 1968. – V. 90, № 4. – P. 1151 – 1164.

[6]Нестеренко Ю.В. Об алгебраической независимости значений E-функций, удовлетворяющих линейным неоднородным дифференциальным уравнениям // Матем. заметки. – 1969. – Т. 5. – № 5. – С. 587–598.

[7]Bertrand D. Un analogue différentiel de la théorie de Kummer // Approximations Diophantiennes et Nombres Transcendants / ed. P. Philippon, Luminy,1990, de Gruyter, Berlin. – 1992. – P. 39–49.

[8]Салихов В. Х. Неприводимость гипергеометрических уравнений и алгебраическая независимость значений E-функций // Acta Arith. – 1990. – Т. 53. – № 5 – С. 453–471.

[9]Салихов В. Х. Критерий алгебраической независимости значений одного класса гипергеометрических E-функций // Матем. сборник. – 1990. – Т. 181. – № 2. – С. 189–211.

[10]Салихов В. Х. Критерий алгебраической независимости значений гипергеометрических E-функций (чётный случай) // Матем. заметки. – 1998. – Т. 64. – № 2. – С. 273–284.

[11]Beukers F., Brownawell W.D., Heckman G. Siegel normality // Annals of Math. – 1988. – V. 127. – P. 279–308.

[12]Katz N. M. Exponential Sums and Differential Equations.– Ann. of Math. Stud., V. 124, Princeton Univ. Press, Princeton, 1990.

Постоянная называется эффективной, если её можно вычислить с помощью конечного числа арифметических и других элементарных операций через характеристики рассматриваемого набора функций, точек и другие известные величины. Постоянная называется эффективной по некоторой величине x, если она выражается через x и другие постоянные, не зависящие от x.

При выводе оценок многочленов от значений E-функций (т. е. мер алгебраической независимости таких значений), содержащих только эффективные постоянные, обычно используют

Определение 3. *Функция $f(z)$ называется E-функцией в узком смысле, если в определении 1 для величин $\overline{|c_n|}$, d_n справедливы оценки*

$$\overline{|c_n|} \leqslant c^n, \qquad d_n \leqslant c^n.$$

Все известные E-функции, удовлетворяющие линейным дифференциальным уравнениям с коэффициентами из $\mathbf{C}(z)$, являются E-функциями в смысле определения 3. Заметим, что из справедливости вышесформулированной гипотезы Зигеля следовала бы эквивалентность определений E-функции.

E-функции, у которых $c_n \in \mathbb{K}$, называют $\mathbb{K}$E-функциями.

А.И. Галочкиным[13] и А.Б. Шидловским (см. §2 гл. 12 книги[3]) доказана

Теорема V. *Пусть $\mathbb{K}$E-функции (2) составляют решение системы (4) и алгебраически независимы над $\mathbb{C}(z)$, $\alpha \in \mathbb{A}$, $\alpha T(\alpha) \neq 0$, $P \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}[x_1, \ldots, x_m]$, $\deg P \leqslant s$, $H(P) \leqslant H$, $[\mathbb{K}(\alpha)\colon \mathbb{Q}] = h$. Тогда*

$$|P(f_1(\alpha), \ldots, f_m(\alpha))| > CH^{-\rho s^m}, \tag{6}$$

где $\rho = 2^{m+1} m^m h^{m+1}/m!$, $C > 0$ — постоянная, не зависящая от H.

Впервые оценка типа (6) была получена С. Ленгом[14].

В 1977 г. Ю.В. Нестеренко[15] опубликовал оценку, аналогичную (6), где $\rho = 4^m h^m (mh^2 + h + 1)$, $C > 0$ — постоянная, эффективная по s.

В работах А.Б. Шидловского (см. §§ 3, 4 гл. 12 книги[3]) и А.И. Галочкина[16] также доказывается

[13] Галочкин А.И. Оценка меры взаимной трансцендентности значений E-функций // Мат. заметки. – 1968. – Т. 3. – № 4. – С. 377 – 386.

[14] Lang S. A transcendence measure for E-functions // Mathematika. – 1962. – V. 9. – P. 157 – 161.

[15] Нестеренко Ю.В. Оценки порядков нулей функций одного класса и их приложение в теории трансцендентных чисел // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1977. – Т. 41. – № 2. – С. 253–284.

[16] Галочкин А.И. Оценки снизу многочленов от значений алгебраически зависимых E-функций // Фундаментальная и прикладная математика. – 1995. – Т. 1. – Вып. 1. – С. 305 – 309.

Теорема VI. *Пусть $\mathbb{K}E$-функции (2), $m \geqslant 2$, составляют решение системы (4),* $\deg tr_{\mathbb{C}(z)}\{f_1(z), \ldots, f_m(z)\} = l$, $\alpha \in \mathbb{A}$, $\alpha T(\alpha) \neq 0$, $P \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}[x_1, \ldots, x_m]$, $\deg P \leqslant s$, $H(P) \leqslant H$, $[\mathbb{K}(\alpha)\colon \mathbb{Q}] = h$. *Тогда либо* $P(f_1(\alpha), \ldots, f_m(\alpha)) = 0$, *либо*

$$|P(f_1(\alpha), \ldots, f_m(\alpha))| > CH^{-\rho h^{l+1} s^l}, \tag{7}$$

где ρ, $C > 0$ — постоянные, не зависящие от H. Если $l = m - 1$, то $\rho = k(2m)^m/m!$, где k — степень неприводимого уравнения, связывающего функции (2).

Цели и задачи работы. Главными целями диссертации являются:

1. Дальнейшая разработка метода Зигеля для получения возможности его применения к исследованию значений Е-функций в особых точках систем дифференциальных уравнений.

2. Получение эффективного аналога теоремы II А.Б. Шидловского.

3. Исследование гипотезы Зигеля о представимости Е-функций многочленами от гипергеометрических функций.

4. Дальнейшая разработка методов доказательства алгебраической независимости гипергеометрических функций над $\mathbb{C}(z)$. Применение полученных результатов к исследованию арифметической природы значений аналитических функций.

5. Получение новых алгебраических тождеств, связывающих гипергеометрические функции.

6. Получение новых оценок многочленов от значений Е-функций.

Методы исследования. В диссертации развиваются и совершенствуются классические методы, берущие начало в работах К. Зигеля и А.Б. Шидловского, в которые вносится ряд новых идей. Доказательство некоторых теорем использует методы аналитической теории дифференциальных уравнений, дифференциальной алгебры, преобразования Лапласа, а также отдельные результаты, полученные другими математиками в этой области.

Научная новизна. Все основные результаты диссертации являются новыми и полученными автором самостоятельно. Их описание приведено в разделах "Содержание диссертации" и "Заключение".

Некоторые вспомогательные результаты о свойствах дифференциальных уравнений, которым удовлетворяют E-функции, были получены независимо и примерно в одно и то же время И. Андрэ[17]и Ф. Бейкерсом[18]. При этом Андрэ и Бейкерс использовали значительно более сложные методы.

Положения, выносимые на защиту.

1. Обобщение и уточнение общих теорем А.Б. Шидловского об алгебраической независимости значений E-функций.

2. Доказательство гипотезы Зигеля для случая линейных дифференциальных уравнений 1-го порядка, линейных однородных дифференциальных уравнений 2-го порядка и некоторых видов линейных неоднородных дифференциальных уравнений 2-го порядка.

3. Решение вопроса об алгебраической независимости над $\mathbb{C}(z)$ множества всех гипергеометрических E-функций, удовлетворяющих линейным дифференциальным уравнениям не выше 2-го порядка, а также о возможных алгебраических связях между ними.

4. Доказательство теорем общего характера с необходимыми и достаточными условиями об алгебраической независимости над $\mathbb{C}(z)$ решений произвольных совокупностей гипергеометрических уравнений различных порядков.

5. Получение новых алгебраических тождеств, связывающих гипергеометрические функции.

6. Получение новых оценок многочленов от значений E-функций.

Практическая и теоретическая значимость. Диссертация носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы в теории трансцендентных чисел, теории диофантовых приближений, теории специальных функций, дифференциальной алгебре, аналитической теории дифференциальных уравнений.

Степень достоверности и апробация результатов. Результаты диссертации многократно докладывались на научно-исследовательском семинаре по теории чисел механико-математического факультета

[17]Andre Y. Séries Gevrey de type arithmétique // Annals of Mathematics. – 2000. – V. 151. – S. 705 – 756.

[18]Beukers F. A refined version of the Siegel-Shidlovskii theorem // Annals of Mathematics. – 2006. – V. 163. – S. 369 – 379.

МГУ, на научно-исследовательском семинаре по теории дифференциальных уравнений МЭИ, на Всесоюзных конференциях "Теория трансцендентных чисел и её приложения" в Москве в 1983 г., "Теория чисел и её приложения" в Тбилиси в 1985 г., на конференциях по теории чисел в Минске в 1989 г., в Ташкенте в 1990 г., в Туле в 1993, 1996 и 2001 гг., в Воронеже в 1995 г., в Саратове в 2004 г., на международных конференциях "Трансцендентные числа" в Москве в 2000 г., "Diophantine and analytic problems in number theory" в Москве в 2007 г., "Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории" в Туле в 2019 г., "Transcendence and diophantine problems" в Москве в 2019 г.

Структура и объём работы. Диссертация состоит из введения, шести глав, заключения и списка литературы. Объём диссертации — 244 страницы. Библиография — 137 наименований.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1] – [20]. Среди них работ, написанных в соавторстве, нет.

Содержание диссертации

Во введении кратко описана история вопроса и изложены полученные автором результаты.

Сформулируем основные теоремы, доказанные в диссертации.

Глава 1. Общие теоремы об алгебраической независимости значений E-функций

Теорема 1. *Пусть совокупность E-функций (2), $m \geqslant 2$ ($m \geqslant 1$), является решением системы (3) (системы (4)), степень однородной трансцендентности (степень трансцендентности) функций (2) над $\mathbb{C}(z)$ равна l, $0 \leqslant l \leqslant m$, а $\alpha \in \mathbb{A} \setminus \{0\}$. Тогда степень однородной трансцендентности (степень трансцендентности) совокупности чисел*

$$f_1(\alpha), \ldots, f_m(\alpha), f_1'(\alpha), \ldots, f_m'(\alpha), \ldots, f_1^{(k)}(\alpha), \ldots, f_m^{(k)}(\alpha), \ldots$$

также равна l.

Как показали дальнейшие исследования, областью приложений теоремы 1 является не нахождение новых примеров трансцендентных чисел, а получение различных теоретико-функциональных утверждений о Е-функциях и о дифференциальных уравнениях, которым они удовлетворяют (см. об этом гл. 2 и 3).

Вопрос об эффективизации теоремы II сводится к эффективному описанию конечного множества исключительных значений Λ из алгебраических чисел, определённого после формулировки теоремы II.

В 1998 г. автором была опубликована статья [19], где в общем случае эффективно оценивалось число элементов множества Λ и их алгебраические характеристики.

Выберем из (2) какие-либо l однородно алгебраически независимых над $\mathbb{C}(z)$ функций

$$f_{i_1}(z), \ldots, f_{i_l}(z). \tag{8}$$

Тогда любая функция $f(z) \not\equiv 0$ из (2), не вошедшая в набор (8), связана с функциями рассматриваемого набора уравнением

$$P = P(z, f_{i_1}(z), \ldots, f_{i_l}(z), f(z)) = 0,$$

где Р — неприводимый многочлен от $l+2$ переменных, однородный по $f_{i_1}(z), \ldots, f_{i_l}(z), f(z)$, содержащий $f(z)$ и хотя бы одну из функций (8). Без ограничения общности можно считать, что коэффициенты многочлена P принадлежат $\mathbb{Z}$. Обозначим

$$s = \max \deg_{\bar{f}} P, \quad t = \max \deg_z P, \quad h = \max H(P),$$

где максимум берется по всем многочленам P, соответствующим всевозможным наборам однородно алгебраически независимых над $\mathbb{C}(z)$ функций (8) и всевозможным функциям $f(z) \not\equiv 0$ из (2).

Теорема 2. *Множество исключительных значений Λ состоит из не более чем $2^m st$ (в неоднородном случае – $2^{m+1}st$) чисел, причём их степень не превосходит $2st$, а размер и знаменатель не превосходят $(h(t+1)2^{s+l-2})^{2s}$ (соответственно $(h(t+1)2^{s+l-1})^{2s}$).*

Глава 2. Свойства дифференциальных уравнений, которым удовлетворяют Е-функции

Пусть Е-функция $f(z)$ является решением линейного дифференциального уравнения

$$Q_m y^{(m)}+Q_{m-1}y^{(m-1)}+\dots+Q_0 y = Q, \qquad Q_m,\dots,Q_0,Q\in\mathbb{C}[z], \quad m\geqslant 1, \tag{9}$$

с коэффициентами, взаимно простыми в совокупности. Из теоремы 1 можно выводить различные утверждения о свойствах уравнения (9).

Напомним, что особая точка ξ однородного дифференциального уравнения, соответствующего уравнению (9), называется регулярной особой точкой, если порядок полюса функции Q_k/Q_m в точке ξ не превосходит $m-k$, $k=0,\dots,m-1$.

Показателями однородного дифференциального уравнения, соответствующего уравнению (9), в точке $z=\xi$ называются корни т. н. определяющего уравнения $F(r)=0$. В случае регулярной особой точки, умножая дифференциальное уравнение (9) на нужную степень $(z-\xi)$, можно представить его коэффициенты в виде $Q_k^*=(z-\xi)^k h_k$, $h_k\in\mathbb{A}[z-\xi]$, $k=0,1,\dots,m$, $h_m(\xi)\neq 0$. Тогда определяющее уравнение имеет вид

$$F(r)=r(r-1)\dots(r-m+1)h_m(\xi)+\dots+rh_1(\xi)+h_0(\xi)=0$$

(см., например, п. 18.1 книги[19]). Если функция

$$y=(z-\xi)^r\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu(z-\xi)^\nu, \qquad a_0\neq 0,\ r\in\mathbb{C},$$

есть решение линейного однородного дифференциального уравнения, то r – корень его определяющего уравнения в точке ξ (см. там же).

Теорема 3. *Пусть E-функция $f(z)$ является решением дифференциального уравнения (9), где m — наименьшее из возможных. Тогда всякая особая точка $\xi\neq 0$ уравнения (9) есть особая точка функции Q_{m-1}/Q_m и регулярная особая точка с показателями, являющимися попарно различными целыми неотрицательными числами, соответствующего (9) однородного уравнения, а также, при $Q\not\equiv 0$, линейного однородного уравнения порядка $m+1$, которому удовлетворяет функция $f(z)$.*

Если точка $z=\xi$ является регулярной особой точкой дифференциального уравнения, то отсюда, вообще говоря, не следует, что его

[19]Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М: Наука, 1971.

решения в этой точке также имеют особенности. Как оказывается, в нашем случае реализуется именно эта возможность, т. е. всякая особая точка $\xi \neq 0$ является т. н. кажущейся особенностью.

Теорема 4. *Пусть E-функция $f(z)$ является решением дифференциального уравнения (9), где m — наименьшее из возможных. Тогда всякое решение уравнения (9), а также соответствующего ему однородного дифференциального уравнения и, при $Q \not\equiv 0$, линейного однородного уравнения порядка $m+1$, которому удовлетворяет функция $f(z)$, голоморфно в области $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.*

Однородные случаи теорем 3 и 4 следуют также из результатов И. Андрэ[17], полученных более сложными методами. Необходимо отметить, что в известной статье Ф. Бейкерса[18], где доказывается линейная независимость значений E-функций в смысле определения 3, из результатов Андрэ используется только однородный случай теоремы 4 (см. теорему 2.1 статьи[18]), причём она характеризуется как "beautiful theorem".

Глава 3. О структуре множества E-функций, удовлетворяющих линейным дифференциальным уравнениям 1-го и 2-го порядков

В формулировках теорем этой главы используются гипергеометрические функции

$$\varphi_\lambda(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(\lambda+1)\dots(\lambda+n)}, \quad \lambda \neq -1, -2, \dots,$$

удовлетворяющие дифференциальным уравнениям

$$y' = (1 - \lambda/z)y + \lambda/z,$$

и функции Куммера (они же конфлюентные, или вырожденные гипергеометрические функции)

$$A_{\mu,\nu}(z) = {}_1\varphi_2(\nu; 1, \mu; z) = {}_1F_1\left(\begin{matrix}\nu \\ \mu\end{matrix}\middle| z\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\nu)_n}{n!(\mu)_n} z^n, \quad \mu \notin \mathbb{Z}^-,$$

удовлетворяющие дифференциальным уравнениям

$$y'' + (-1 + \mu/z)y' - (\nu/z)y = 0. \tag{10}$$

Теорема 6. *Функция $f(z)$ тогда и только тогда является E-функцией, удовлетворяющей линейному дифференциальному уравнению 1-го порядка с коэффициентами из $\mathbb{C}(z)$, когда*

$$f(z) = P\,\varphi_\lambda(\alpha z) + P_1,$$

где $P, P_1 \in \mathbb{A}[z]$, $\alpha \in \mathbb{A}$, $\lambda \in \mathbb{Q}$.

Теорема 7. *Функция $f(z)$ тогда и только тогда является E-функцией, удовлетворяющей линейному однородному дифференциальному уравнению 2-го порядка с коэффициентами из $\mathbb{C}(z)$, когда*

$$f(z) = (P\,A_{\mu,\nu}(\alpha z) + P_1\,A'_{\mu,\nu}(\alpha z))e^{\alpha_1 z}, \tag{11}$$

где $P, P_1 \in \mathbb{A}[z]$, $\alpha, \alpha_1 \in \mathbb{A}$, $\mu, \nu \in \mathbb{Q}$.

Замечания. 1. Если E-функции $f_1(z), f_2(z)$ составляют решение системы линейных однородных дифференциальных уравнений 1-го порядка, то каждая из них также имеет вид (11).

2. Так как $A'_{\mu,\nu}(\alpha z) = (\nu/\mu)A_{\mu+1,\nu+1}(\alpha z)$, то для рассматриваемого в теореме случая гипотеза Зигеля справедлива.

3. При специальном выборе параметров равенство (11) принимает вид

$$f(z) = (P_2\,\varphi_\lambda(\alpha z) + P_3)e^{\alpha_1 z},$$

где $P_2, P_3 \in \mathbb{A}[z]$, $\lambda \in \mathbb{Q}$. В этом виде могут быть представлены функции $P(z) \in \mathbb{A}[z]$, $\varphi_\lambda(z)$, e^z, $\sin z = (e^{iz} - e^{-iz})/2i$, $\cos z$, $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$, всякая "неполная" гамма-функция $F_p(z) = \int_0^z t^{p-1}e^{-t}\,dt = z^p e^{-z}\varphi_p(z)/p$, являющаяся целой, т. е. при $p \in \mathbb{N}$ (см. стр. 195, 197 книги[3]). В виде (11) представляются функции Куммера $A_{\mu,\nu}(z)$, функции Зигеля

$$K_\lambda(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(\lambda+1)\dots(\lambda+n)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n}, \quad \lambda \neq -1, -2, \dots,$$

удовлетворяющие линейным дифференциальным уравнениям

$$y'' + \frac{2\lambda+1}{z}y' + y = 0 \tag{12}$$

и все целые функции Бесселя $J_p(z)$ (при $p \in \mathbb{Z}^+$), так как

$$J_\lambda(z) = (\Gamma(\lambda+1))^{-1}(z/2)^\lambda K_\lambda(z), \quad K_\lambda(z) = e^{-iz}A_{2\lambda+1,\lambda+1/2}(2iz), \tag{13}$$

где $\Gamma(z)$ — гамма-функция (см. стр. 212 книги[3] и п. 7.1 книги[20]).

Теорема 8. *Функция $f(z)$ тогда и только тогда является E-функцией, удовлетворяющей линейному однородному дифференциальному уравнению 2-го порядка с коэффициентами из $\mathbb{C}(z)$ и алгебраически зависимой (однородно алгебраически зависимой) с $f'(z)$ над $\mathbb{C}(z)$, когда $f(z) = (P\,\varphi_\lambda(\alpha z) + P_1)e^{\sigma\alpha z}$ (соответственно $f(z) = P\,e^{\alpha z}$), где $P, P_1 \in \mathbb{A}[z]$, $\alpha \in \mathbb{A}$, $\lambda, \sigma \in \mathbb{Q}$, причем если $\sigma \neq 0$, то $\lambda \in \mathbb{Z}^+$.*

Замечания. 1. При $\sigma \neq 0$, $\lambda \in \mathbb{Z}^+$ функция $f(z)$ есть линейная комбинация показательных функций с коэффициентами из $\mathbb{A}[z, z^{-1}]$. Например, E-функция $(\sin z)/z$, удовлетворяющая дифференциальному уравнению $y'' + (2/z)y' + y = 0$, представляется в виде $(e^{iz} - e^{-iz})/2iz = e^{iz}\varphi_1(-2iz) = K_{1/2}(z)$.

2. Утверждение теоремы 8 справедливо также для алгебраически зависимых над $\mathbb{C}(z)$ E-функций $f_1(z), f_2(z)$, составляющих решение системы линейных однородных дифференциальных уравнений 1-го порядка.

Для доказательства теорем 7 и 8 используются теоремы 1, 3 и 4, а также результат И. Андрэ о том, что в точке $z = 0$ особенность уравнения (9), где $Q \equiv 0$, может быть только регулярной.

Теорема 9. *Функция $f(z)$ тогда и только тогда является E-функцией, удовлетворяющей линейному дифференциальному уравнению 2-го порядка с коэффициентами из $\mathbb{C}(z)$, когда*

$$f(z) = P_0\varphi_\lambda(\alpha z) + P_1\varphi_{\lambda_1}(\alpha_1 z) + P,$$

либо

$$f(z) = P_0 f_1(z) + P_1 f_1'(z) + P,$$

где $P_0, P_1, P \in \mathbb{A}[z]$, $\lambda, \lambda_1 \in \mathbb{Q}$, $\alpha, \alpha_1 \in \mathbb{A}$, $f_1(z)$ — E-функция, удовлетворяющая уравнению

$$y'' + \left(a + \frac{a_1}{z}\right)y' + \left(b + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2}\right)y = c + \frac{c_1}{z},$$

$a, a_1, b, b_1, b_2, c, c_1 \in \mathbb{A}$.

Теорема 10. *Функция $f(z)$ тогда и только тогда является E-функцией, удовлетворяющей линейному дифференциальному уравне-*

[20] Кратцер А., Франц В. Трансцендентные функции. – М: ИЛ, 1963.

нию 2-го порядка с коэффициентами из $\mathbb{C}(z)$ и алгебраически зависимой с $f'(z)$ над $\mathbb{C}(z)$, когда

$$f(z) = P_0\varphi_k(\alpha z) + P_1\varphi_k(\sigma\alpha z) + P, \qquad (14)$$

либо

$$f(z) = P_0\varphi_\lambda^2(\alpha z) + P_1\varphi_\lambda(\alpha z) + P, \qquad (15)$$

где $P_0, P_1, P \in \mathbb{A}[z],\ k \in \mathbb{Z}^+,\ \lambda, \sigma \in \mathbb{Q},\ \alpha \in \mathbb{A}.$

Следствие. *Если алгебраически зависимые над $\mathbb{C}(z)$ E-функции $f_1(z), f_2(z)$ составляют решение системы линейных дифференциальных уравнений 1-го порядка с коэффициентами из $\mathbb{C}(z)$, то обе они имеют вид (14) либо (15).*

Теорема 11. *Если E-функция $f(z)$ удовлетворяет уравнению*

$$Q_2y'' + Q_1y' + Q_0y = Q, \qquad Q_2, Q_1, Q_0, Q \in \mathbb{C}[z] \qquad (16)$$

и линейно независима с $f'(z)$ и 1 над $\mathbb{C}(z)$, то числа $f(\xi)$, $f'(\xi)$ и 1 линейно независимы над $\mathbb{A}$ при любом $\xi \in \mathbb{A},\ \xi Q_2(\xi) \neq 0$.

Теорема 11 обобщается на случай двух линейно независимых с числом 1 E-функций, составляющих решение системы линейных дифференциальных уравнений 1-го порядка, что является частным случаем утверждения, высказанного А.Б. Шидловским (см.[21], гипотеза A) для произвольного количества функций и доказанного Ф. Бейкерсом[18] для E-функций в смысле определения 3. Из теоремы 11 следует

Теорема 12. *Если E-функция $f(z)$ удовлетворяет уравнению (16) и не удовлетворяет никакому линейному дифференциальному уравнению 1-го порядка с коэффициентами из $\mathbb{C}(z)$, то числа $f(\xi)$ и $f'(\xi)$ трансцендентны при любом $\xi \in \mathbb{A},\ \xi Q_2(\xi) \neq 0$.*

Теорема 12 в виде гипотезы ранее также высказывалась А.Б. Шидловским (см. §1 гл. 6 книги[3]).

Глава 4. Алгебраические свойства решений гипергеометрических уравнений

Ранее уже были введены функции

$${}_lF_{q-1}(\vec{\nu};\vec{\lambda};z) = {}_lF_{q-1}\left(\begin{matrix}\nu_1,\ldots,\nu_l\\ \lambda_2,\ldots,\lambda_q\end{matrix}\,\middle|\, z\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\nu_1)_n\ldots(\nu_l)_n}{n!(\lambda_2)_n\ldots(\lambda_q)_n}z^n,$$

[21] Шидловский А.Б. О линейной независимости значений E-функций в алгебраических точках // Математические заметки. – 1994. – Т. 55. – № 2. – С. 174 – 185.

где $0 \leqslant l \leqslant q,\ \ \nu_1, \ldots, \nu_l \in \mathbb{C},\ \ \lambda_2, \ldots, \lambda_q \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$. Будем считать, что в вектор $\vec{\lambda}$, относящийся к функции ${}_lF_{q-1}(\vec{\nu}; \vec{\lambda}; z)$, входит компонента, равная 1, которая автоматически переставляется на первое место. Функция ${}_lF_{q-1}(\vec{\nu}; \vec{\lambda}; z)$ удовлетворяет однородному гипергеометрическому уравнению

$$L(\vec{\nu}; \vec{\lambda})\ y = L(\vec{\nu}; \vec{\lambda}; z)\ y = 0. \tag{17}$$

При $\gamma, \beta \in \mathbb{C},\ \ \vec{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_n) \in \mathbb{C}^n$ положим $\gamma\vec{\mu} + \beta = (\gamma\mu_1 + \beta, \ldots, \gamma\mu_n + \beta)$. Для векторов $\vec{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_n),\ \vec{\eta} = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$ будем писать $\vec{\mu} \sim \vec{\eta}$, если существует перестановка π чисел $1, \ldots, n$ такая, что $\mu_i - \eta_{\pi(i)} \in \mathbb{Z},\ \ i = 1, \ldots, n$. Запись $(\vec{\nu}; \vec{\lambda}) \sim \gamma(\vec{\mu}; \vec{\eta}) + \beta$ означает, что $\vec{\nu} \sim \gamma\vec{\mu} + \beta,\ \ \vec{\lambda} \sim \gamma\vec{\eta} + \beta$. Явный вид уравнения $L(\vec{\nu}; \vec{\lambda}; \alpha z^p)\ y = 0$, получаемого из (17) или (1) подстановкой $z \longrightarrow \alpha z^p$, где $p \in \mathbb{N}$, приведён в [13; лемма 1, формула (6)]. Фундаментальную систему решений уравнения $L(\vec{\nu}; \vec{\lambda}; \alpha z^p)\ y = 0$ при $\lambda_i - \lambda_k \notin \mathbb{Z},\ i \neq k$ образуют, например, функции

$$z^{(1-\lambda_k)p}{}_lF_{q-1}(\vec{\nu} + 1 - \lambda_k; \vec{\lambda} + 1 - \lambda_k; \alpha z^p), \quad k = 1, \ldots, q \tag{18}$$

(см. следствие 4 леммы 4.1 диссертации, а также п. 5.7.1 книги[22]).

Определение 4. *Уравнение (17) называется приводимым (линейно приводимым) (линейно однородно приводимым), если оно имеет решение $y \not\equiv 0$ такое, что $y, y', \ldots, y^{(m-1)}$ алгебраически зависимы (линейно зависимы с 1) (линейно зависимы) над $\mathbb{C}(z)$, и неприводимым (линейно неприводимым) (линейно однородно неприводимым) в противном случае.*

Аналогично определяются эти понятия для системы дифференциальных уравнений.

Необходимые и достаточные условия неприводимости уравнений $L(\vec{\nu};\ \vec{\lambda}; z^{q-l})\ y = 0$, кроме случая $q - l = 6,\ l \leqslant 3$, получены В.Х. Салиховым[8].

Простейшие алгебраические тождества, связывающие гипергеометрические функции, представляют собой обобщение т. н. соотношений смежности, обнаруженных ещё Гауссом. Если φ — гипергеометрическая функция, то смежные функции $\varphi(\nu_k\pm) = \varphi(\nu_1, \ldots, \nu_k \pm 1, \ldots, \nu_l;$

[22] Люк Ю. Специальные математические функции и их аппроксимации. – М.:Мир, 1980.

$\lambda_1, \ldots, \lambda_q; z)$ и аналогично определяемые $\varphi(\lambda_k\pm)$, а также их производные выражаются в виде линейных комбинаций (вообще говоря, неоднородных) с коэффициентами из $\mathbb{C}(z)$ от функций $\varphi, \varphi', \ldots, \varphi^{(q-1)}$ (частные случаи см., например, в пп. 5.2.2, 7.3.2 книги[22]; формуле (12) статьи[23]). В общем случае алгоритм нахождения соотношений смежности и их свойства получены автором в [13] и [15]. Соотношения смежности можно записать в виде $\vec{\varphi}_1 = \Omega\vec{\varphi} + \vec{c}$, где $\vec{f} = (f, f', \ldots, f^{(q-1)})^T$, $\Omega \in M(q, \mathbb{C}(z))$, $\vec{c} \in (\mathbb{C}(z))^q$, $\varphi = {}_l\varphi_q(\vec{\nu}; \vec{\lambda}; z)$, φ_1 — функция $\varphi(\nu_k\pm)$ или $\varphi(\lambda_k\pm)$. Если

$$\vec{\varphi}(\nu\pm) = \Omega_{\nu\pm}\vec{\varphi} + \vec{c}_{\nu\pm}, \qquad \vec{\varphi}(\lambda\pm) = \Omega_{\lambda\pm}\vec{\varphi} + \vec{c}_{\lambda\pm},$$

то легко видеть, что $\Omega_{\nu-} = \Omega_{\nu+}^{-1}(\nu-)$, $\vec{c}_{\nu-} = -\Omega_{\nu-}\vec{c}_{\nu+}(\nu-)$, $\Omega_{\lambda+} = \Omega_{\lambda-}^{-1}(\lambda+)$, $\vec{c}_{\lambda+} = -\Omega_{\lambda+}\vec{c}_{\lambda-}(\lambda+)$. Здесь ν (а также λ) — параметр, произвольно выбранный из $\{\nu_1, \ldots, \nu_l\}$ (соответственно $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_q\}$). Следующая теорема и её доказательство содержит алгоритм для нахождения соотношений смежности.

Теорема 14. *Пусть* $\vec{\nu}_i \in \mathbb{C}^l$, $\vec{\lambda}_i \in (\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-)^q$, $q \geqslant \max(2, l)$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $p \in \mathbb{N}$, $\varphi_i = {}_l\varphi_q(\vec{\nu}_i; \vec{\lambda}_i; \alpha z^p)$, *уравнение* $L(\vec{\nu}_i; \vec{\lambda}_i; \alpha z^p)y = 0$ *линейно однородно неприводимо,* Φ_i *— произвольная фундаментальная матрица этого уравнения,* $i = 1, 2$, $(\vec{\nu}_1; \vec{\lambda}_1) \sim (\vec{\nu}_2; \vec{\lambda}_2)$. *Тогда существуют матрицы* $\Omega \in GL(q, \mathbb{C}[z^{\pm 1}, (1 - \alpha z^p)^\varepsilon])$, $C \in GL(q, \mathbb{C})$ *и вектор* $\vec{c} \in (\mathbb{C}[z^{\pm 1}, (1 - \alpha z^p)^\varepsilon])^q$, $\varepsilon = -\delta_q^l$, *такие, что*

$$\vec{\varphi}_1 = \Omega\vec{\varphi}_2 + \vec{c}, \qquad \Phi_1 = \Omega\Phi_2 C. \tag{19}$$

Примеры. 1. Используя введённые обозначения, для функций Куммера $A_{\lambda,\nu}(z)$ имеем

$$\Omega_{\nu+} = \frac{1}{\nu}\begin{pmatrix} \nu & z \\ \nu & \nu - \lambda + 1 + z \end{pmatrix}, \quad \Omega_{\lambda-} = \frac{1}{\lambda - 1}\begin{pmatrix} \lambda - 1 & z \\ \nu & z \end{pmatrix}.$$

Если второе из равенств (19) имеет вид $\Phi(\nu\pm) = \Omega_{\nu\pm}\Phi C_{\nu\pm}$, $\Phi(\lambda\pm) = \Omega_{\lambda\pm}\Phi C_{\lambda\pm}$, а матрицы Φ отвечают функциям (18), то

$$C_{\nu+} = \mathrm{diag}(1, \nu/(\nu - \lambda + 1)), \quad C_{\lambda-} = \mathrm{diag}(1, (\lambda - 1)(2 - \lambda)/(\nu - \lambda + 1)).$$

2. Для гипергеометрической функции Гаусса

$${}_2\varphi_2(\nu, \mu; 1, \lambda; z) = {}_2F_1\left(\begin{matrix}\nu, \mu \\ \lambda\end{matrix}\middle| z\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\nu)_n(\mu)_n}{n!(\lambda)_n} z^n$$

[23]Вискина Г.Г., Салихов В. Х. Алгебраические соотношения между гипергеометрической E-функцией и её производными // Матем. заметки. – 2002. – Т. 71. – № 6. – С. 832–844.

аналогично получаем

$$\Omega_{\nu+} = \frac{1}{\nu(1-z)} \begin{pmatrix} \nu(1-z) & z(1-z) \\ \nu\mu & \nu-\lambda+1+\mu z \end{pmatrix},$$

$$\Omega_{\lambda-} = \frac{1}{(\lambda-1)(1-z)} \begin{pmatrix} (\lambda-1)(1-z) & z(1-z) \\ \nu\mu & (\nu+\mu-\lambda+1)z \end{pmatrix},$$

$$C_{\nu+} = \operatorname{diag}\left(1, \frac{\nu}{\nu-\lambda+1}\right), \quad C_{\lambda-} = \operatorname{diag}\left(1, \frac{(\lambda-1)(2-\lambda)}{(\nu-\lambda+1)(\mu-\lambda+1)}\right).$$

Теорема 15. *Пусть* $\vec{\nu} \in \mathbb{C}^l$, $\vec{\lambda} \in \mathbb{C}^q$, $q \geqslant \max(2, l)$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $p \in \mathbb{N}$, Φ_1, Φ_2 *— произвольные фундаментальные матрицы дифференциальных операторов* $L(\vec{\nu}; \vec{\lambda}; \alpha z^p)$ *и* $L(1-\vec{\nu}; 2-\vec{\lambda}; (-1)^{q-l}\alpha z^p)$. *Тогда:*

1°. *Существует матрица* $C \in GL(q, \mathbb{C})$ *такая, что*

$$\Phi_1(\Phi_2 C)^T = B, \tag{20}$$

где $B = \|b_{i,j}\|_{i,j} \in GL(q, \mathbb{C}[z^{\pm 1}, (1-\alpha z^p)^\varepsilon])$, $\varepsilon = -\delta_q^l$, *причём*

$$b_{k,q-k+1} = (-1)^k c_0 z^{1-q}(1-\alpha z^p)^\varepsilon, \quad c_0 \in \mathbb{C}, \quad k = 1, \ldots, q,$$

а выше этих элементов стоят нули.

2°. *Если* $\lambda_i - \lambda_k \notin \mathbb{N}$, $i, k = 1, \ldots, q$, *а* Φ_1, Φ_2 *отвечают, соответственно, множествам функций (18) и*

$$f_k = z^{(\lambda_k - 1)p} {}_lF_{q-1}(\lambda_k - \vec{\nu}; \lambda_k + 1 - \vec{\lambda}; (-1)^{q-l}\alpha z^p), \ k = 1, \ldots, q,$$

то в равенстве (20) $C = \operatorname{diag}(c_1, \ldots, c_q)$,

$$c_k = (-1)^k \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant q;\, i,j \neq k} (\lambda_i - \lambda_j); \qquad c_0 = p^{q-1} \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant q} (\lambda_i - \lambda_j),$$

пустое произведение скобок равно 1.

Следствие 1. *Пусть* $q \geqslant \max(2, l)$, $\lambda_i - \lambda_k \notin \mathbb{N}$, $i, k = 1, \ldots, q$, *числа* c_k *определены в теореме 15. Тогда*

$$\sum_{k=1}^{q} c_k \, {}_lF_{q-1}(\vec{\nu} - \lambda_k + 1; \vec{\lambda} - \lambda_k + 1; z) \, {}_lF_{q-1}(\lambda_k - \vec{\nu}; \lambda_k + 1 - \vec{\lambda}; (-1)^{q-l} z) = 0.$$

Следствие 2. *Справедливы тождества*

$${}_1F_1(\nu; \lambda; z) \, {}_1F_1(1-\nu; 2-\lambda; -z) - {}_1F_1(\nu-\lambda+1; 2-\lambda; z) \, {}_1F_1(\lambda-\nu; \lambda; -z) = 0;$$

$$
\begin{gathered}
{}_2F_1(\nu,\mu;\lambda;z)\,{}_2F_1(1-\nu,1-\mu;2-\lambda;z)-\\
-{}_2F_1(\nu-\lambda+1,\mu-\lambda+1;2-\lambda;z)\,{}_2F_1(\lambda-\nu,\lambda-\mu;\lambda;z)=0;\\
(\lambda-\mu)\,{}_0F_2(\lambda,\mu;z)\,{}_0F_2(2-\lambda,2-\mu;-z)+\\
+(\mu-1)\,{}_0F_2(\mu-\lambda+1,2-\lambda;z)\,{}_0F_2(\lambda-\mu+1,\lambda;-z)+\\
+(1-\lambda)\,{}_0F_2(\lambda-\mu+1,2-\mu;z)\,{}_0F_2(\mu-\lambda+1,\mu;-z)=0.
\end{gathered}
$$

Ф. Бейкерс, В. Браунвелл и Г. Хекман[11] при естественных ограничениях, не являющихся, тем не менее, необходимыми и достаточными условиями, установили алгебраическую независимость решений совокупности уравнений вида (17). М.А. Черепнёв[24] распространил результаты статьи[11] на случай неоднородных уравнений. Следует отметить, что в статьях[11,24] и в статье автора [13] выпал из рассмотрения случай алгебраической зависимости между элементами фундаментальных матриц уравнений (10) и (12), а также некоторых их обобщений. Речь идёт о случае

$$
\begin{gathered}
q_1=q_2=2,\ l_1=1,\ l_2=0,\ p_2=2p_1,\ \alpha_1^2=16\alpha_2,\\
\vec{\lambda}_1-\lambda_{1,j}\sim\pm2(\vec{\lambda}_2-\lambda_{2,1}),\ 1\leqslant j\leqslant 2,\ 2\nu_{1,1}-\lambda_{1,1}-\lambda_{1,2}\in\mathbb{Z},
\end{gathered}
\tag{21}
$$

реализуемом, в частности, во втором из тождеств (13).

Теорема 16. *Пусть* $\vec{\nu}_k=(\nu_{k,1},\ldots,\nu_{k,l_k})\in\mathbb{Q}^{l_k}$, $\vec{\lambda}_k=(\lambda_{k,1},\ldots,\lambda_{k,q_k})\in(\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}^-)^{q_k}$, $\lambda_{k,1}=1$, $q_k>\max(1,l_k)$, $F_k(z)={}_{l_k}F_{q_k-1}(\vec{\nu}_k;\vec{\lambda}_k;z)$, $\alpha_k\in\mathbb{A}\setminus\{0\}$, *дифференциальные уравнения* $L(\vec{\nu}_k;\vec{\lambda}_k;\ z^{q_k-l_k})\ y=0$ *неприводимы,* $k=1,\ldots,n$, $n\geqslant 1$, *а числа* $\gamma_1,\ldots,\gamma_m\in\mathbb{A}$ *линейно независимы над* $\mathbb{Q}$. *Пусть условие (21), из которого исключено* $p_1=2p_2$, *не выполнено ни для какой пары индексов* $1\leqslant k<t\leqslant n$, *и если* $(\vec{\nu}_k;\vec{\lambda}_k)\sim(-1)^r((\vec{\nu}_t;\vec{\lambda}_t)-\lambda_{t,j})$, *где* $1\leqslant j\leqslant q_t$, $r\in\{0,1\}$, *то* $\alpha_k\neq(-1)^{(q_k-l_k)r}\alpha_t$. *Тогда* $q_1+\cdots+q_n+m$ *чисел*

$$
F_1(\alpha_1),F_1'(\alpha_1),\ldots,F_1^{(q_1-1)}(\alpha_1),\ldots,F_n(\alpha_n),\ldots,F_n^{(q_n-1)}(\alpha_n),e^{\gamma_1},\ldots,e^{\gamma_m}
\tag{22}
$$

алгебраически независимы.

С учётом упомянутых результатов В.Х. Салихова теорема 16 усиливает аналогичную теорему статьи[11]. Заметим, что группа Галуа неприводимой системы дифференциальных уравнений содержит $SL(q,\mathbb{C})$

[24] Черепнёв М. А. Об алгебраической независимости значений гипергеометрических E-функций // Матем. заметки. – 1995. – Т. 57. – № 6. – С. 896–912.

или $Sp(q,\mathbb{C})$ (см. стр. 280 и теорему 2.2 статьи[11]). Конкретный вид группы Галуа гипергеометрического уравнения найден Н. Кацем[12]. Как оказалось, в преобладающем большинстве случаев она содержит $SL(q,\mathbb{C})$. Исключение составляет относительно небольшое множество случаев, для которых, среди прочих условий, $q-l$ чётно, а $\vec{\nu}\sim\nu-\vec{\nu}$, $\vec{\lambda}\sim\lambda-\vec{\lambda}$ при некоторых $\nu,\lambda\in\mathbb{R}$ (см. стр. 59, 60 статьи[25]). Так как размерность группы $SL(q,\mathbb{C})$ равна q^2-1, то степень трансцендентности множества элементов любой фундаментальной матрицы соответствующего уравнения над $\mathbb{C}(z,W)$, где W – вронскиан, также равна q^2-1 (см. лемму 6.2 книги[26]). Это, очевидно, обеспечивает неприводимость уравнения и делает естественными условия четырёх следующих теорем.

Дифференциальное поле, получаемое присоединением к полю $\mathbb{F}$ дифференциальных переменных $v_1,\ldots,v_n$, обозначим $\mathbb{F}\langle v_1,\ldots,v_n\rangle$.

Теорема 17. *Пусть* $\vec{\nu}_k\in\mathbb{C}^{l_k}$, $\vec{\lambda}_k\in(\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}^-)^{q_k}$, $q_k>\max(1,l_k)$, $\alpha_k\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$, $\|v_{k,s}^{(i)}\|_{i=0,\ldots,q_k-1;\,s=1,\ldots,q_k}$ — *фундаментальная матрица оператора* $L(\vec{\nu}_k;\vec{\lambda}_k;\alpha_k z^{p_k})$, $p_k\in\mathbb{N}$, $W_k=|v_{k,s}^{(i)}|_{i,s}$,

$$\deg tr_{\mathbb{C}(z,W_k)}\mathbb{C}\langle z,v_{k,1},\ldots,v_{k,q_k}\rangle=q_k^2-1,\tag{23}$$

$k=1,\ldots,n$, $n\geqslant 1$. *Пусть числа* $\gamma_1,\ldots,\gamma_m$, *а также* $\beta_1,\ldots,\beta_p$, *принадлежат* $\mathbb{C}$ *и линейно независимы над* $\mathbb{Q}$, $\beta_1\in\mathbb{Q}$. *Тогда для алгебраической независимости* $q_1^2+\cdots+q_n^2-n+m+p$ *функций*

$$\left\{v_{k,s}^{(i)}\Big|_{k=1,\ldots,n;\,i=0,\ldots,q_k-1;\,s=1,\ldots,q_k;\,(i,s)\neq(q_k-1,q_k)}\right\},e^{\gamma_1 z},\ldots,e^{\gamma_m z},z^{\beta_1},\ldots,z^{\beta_p}$$

над $\mathbb{C}$ *необходимо и достаточно, чтобы условие (21) не выполнялось ни для какой пары индексов* $1\leqslant k<t\leqslant n$ *и если* $p_k=p_t$, $(\vec{\nu}_k;\vec{\lambda}_k)-\lambda_{k,1}\sim(-1)^r((\vec{\nu}_t;\vec{\lambda}_t)-\lambda_{t,j})$, *где* $1\leqslant j\leqslant q_t$, $r\in\{0;1\}$, *то* $\alpha_k\neq(-1)^{(q_k-l_k)r}\alpha_t$.

Как следует из[11], условие (23) достаточно проверить для оператора $L(\vec{\nu}_k;\vec{\lambda}_k;z)$.

Теорема 18. *Пусть при условиях теоремы 17* $\vec{\nu}_k\in\mathbb{Q}^{l_k}$, $\vec{\lambda}_k\in\mathbb{Q}^{q_k}$, $\lambda_{k,1}=1$, $\alpha_k,\gamma_i\in\mathbb{A}$, $F_k(z)={}_{l_k}F_{q_k-1}(\vec{\nu}_k;\vec{\lambda}_k;z)$. *Тогда для алгебраиче-*

[25]Beukers F. Some new results on algebraic independence of E-functions // New advances in transcendence theory. – Cambridge Univ. Press. – 1988. – P. 56–67.

[26]Капланский И. Введение в дифференциальную алгебру. – М.:ИЛ, 1959.

ской независимости чисел (22) необходимо и достаточно выполнение четырёх следующих условий:

1°. *Если* $(\vec{\nu}_k;\vec{\lambda}_k)\sim(\vec{\nu}_t;\vec{\lambda}_t)$, *где* $1\leqslant k<t\leqslant n$, *то* $\alpha_k\neq\alpha_t$.

2°. *Если* $(\vec{\nu}_k;\vec{\lambda}_k)\sim\lambda_{t,j}-(\vec{\nu}_t;\vec{\lambda}_t)$, *где* $1\leqslant k<t\leqslant n$, $1\leqslant j\leqslant q_t$, *то* $\alpha_k\neq(-1)^{(q_k-l_k)}\alpha_t$.

3°. *Если для некоторого* $t\in\{1,\ldots,n\}$ *и всех* $j=1,\ldots,q_t$ *имеем* $(\vec{\nu}_t;\vec{\lambda}_t)-\lambda_{t,j}\sim(\vec{\nu}_{k(j)};\vec{\lambda}_{k(j)})$, *где* $k(j_1)\neq k(j_2)$ *при* $j_1\neq j_2$, *то* $\alpha_t\neq\alpha_{k(j)}$ *хотя бы при одном* j.

4°. *Условие (21), из которого исключено* $p_1=2p_2$, *не выполнено ни для какой пары индексов* $1\leqslant k<t\leqslant n$.

Для установления алгебраической независимости функций ${}_l\varphi_q(z)$ и ${}_lF_{q-1}(z)$ достаточно, с учётом теорем 16 – 18, доказывать алгебраическую независимость решений уравнений (1) над полем, порождённым решениями однородных гипергеометрических уравнений.

Пусть $\vec{\nu}\in\mathbb{C}^l$, $\vec{\lambda}\in(\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}^-)^q$, $q>l$, $\alpha\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$, $f(z)={}_l\varphi_q(\vec{\nu};\vec{\lambda};\alpha z^{q-l})$, $\|v_s^{(i)}\|_{s=1,\ldots,q;\,i=0,\ldots,q-1}$ — фундаментальная матрица оператора $L(\vec{\nu};\vec{\lambda};\alpha z^{q-l})$, $W=|v_s^{(i)}|$, $\mathbb{L}=\mathbb{C}\left\langle z,v_1,\ldots,v_q\right\rangle$,

$$\deg tr_{\mathbb{C}(z,W)}\mathbb{C}\left\langle z,v_1,\ldots,v_q\right\rangle=q^2-1.$$

Теорема 19. *Для алгебраической зависимости функций*

$$f(z),f'(z),\ldots,f^{(q-1)}(z)$$

над $\mathbb{L}$ *необходимо и достаточно, чтобы вектор* $\vec{\lambda}$ *содержал компоненту из* $\mathbb{N}$.

Теорема 19 допускает обобщение на случай нескольких дифференциальных уравнений.

Пусть $\vec{\nu}_k\in\mathbb{C}^{l_k}$, $\vec{\lambda}_k\in(\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}^-)^{q_k}$, $q_k>l_k$, $\alpha_k\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$, $f_k(z)={}_{l_k}\varphi_{q_k}(\vec{\nu}_k;\vec{\lambda}_k;\alpha_k z^{q_k-l_k})$, $\|v_{k,s}^{(i)}\|_{s=1,\ldots,q_k;\,i=0,\ldots,q_k-1}$ — фундаментальная матрица оператора $L(\vec{\nu}_k;\vec{\lambda}_k;\alpha_k z^{q_k-l_k})$, удовлетворяющего условию (23), $k=1,\ldots,n$; $\mathbb{L}_1=\mathbb{C}\left\langle z,v_{1,1},\ldots,v_{n,q_n}\right\rangle$.

Теорема 20. *Для алгебраической зависимости функций*

$$f_1(z),f_1'(z),\ldots,f_1^{(q_1-1)}(z),\ldots,f_n(z),f_n'(z),\ldots,f_n^{(q_n-1)}(z)$$

над $\mathbb{L}_1$ *необходимо и достаточно, чтобы один из векторов* $\vec{\lambda}_k$ *содержал компоненту из* $\mathbb{N}$ *или же* $(\vec{\nu}_k;\vec{\lambda}_k)\sim(\vec{\nu}_s;\vec{\lambda}_s)$, $\alpha_k=\alpha_s$ *для каких-либо* $1\leqslant k<s\leqslant n$.

Заметим, что в поле $\mathbb{L}_1$ входят компоненты решений уравнений $L(\vec{\nu};\vec{\lambda};\alpha z^p)y = 0$, где $p \in \mathbb{N}$, удовлетворяющих условию (23), даже если они (в случае $\lambda_1 = 1$) не получаются из неоднородных уравнений (1), примером чего является уравнение (12).

Произвольные линейные неоднородные дифференциальные уравнения и системы рассматривались Ю.В. Нестеренко[6] и Д. Бертраном[7]. В теоремах статей[6,7] речь идёт об алгебраической независимости не над $\mathbb{L}$ или $\mathbb{L}_1$, а над полем, порождённым коэффициентами уравнений. Их условия не всегда необходимы — например, в статье[6] требуется алгебраическая независимость компонент решений всех однородных систем, соответствующих рассматриваемым. Поэтому теорема 20 позволяет в ряде случаев получать более сильные утверждения.

Теорема 21. *Пусть* $\alpha_k, \beta_i \in \mathbb{A}\setminus\{0\}$, $\vec{\lambda}_k \in (\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}^-)^{q_k}$, $q_k \geqslant 3$ *и нечётно,* $\vec{\lambda}_k + 1/d \not\sim \vec{\lambda}_k$ *ни для какого делителя* $d > 1$ *числа* q_k, $\varphi_{\vec{\lambda}_k}(z) = {}_0\varphi_{q_k}(\vec{\lambda}_k; z)$, $\lambda_i \in \mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$, $\varphi_{\lambda_i}(z) = {}_0\varphi_1(\lambda_i; z)$, $k = 1,\ldots,n$, $i = 1,\ldots,\varkappa$, *числа* $\gamma_1,\ldots,\gamma_m \in \mathbb{A}$ *линейно независимы над* $\mathbb{Q}$, $n + m + \varkappa \geqslant 1$. *Тогда для алгебраической независимости* $q_1+\cdots+q_n+\varkappa+m$ *чисел*

$$\varphi_{\vec{\lambda}_1}(\alpha_1), \varphi'_{\vec{\lambda}_1}(\alpha_1), \ldots, \varphi^{(q_1-1)}_{\vec{\lambda}_1}(\alpha_1), \ldots, \varphi_{\vec{\lambda}_n}(\alpha_n), \varphi'_{\vec{\lambda}_n}(\alpha_n), \ldots, \varphi^{(q_n-1)}_{\vec{\lambda}_n}(\alpha_n),$$

$$\varphi_{\lambda_1}(\beta_1), \ldots, \varphi_{\lambda_\varkappa}(\beta_\varkappa), e^{\gamma_1}, \ldots, e^{\gamma_m}$$

необходимо и достаточно выполнение четырёх следующих условий:

1°. *Если* $\lambda_i - \lambda_k \in \mathbb{Z}$, $1 \leqslant i < k \leqslant \varkappa$, *то* $\beta_i \neq \beta_k$.

2°. *Если* $\vec{\lambda}_k \sim \vec{\lambda}_t$, $1 \leqslant k < t \leqslant n$, *то* $\alpha_k \neq \alpha_t$.

3°. *Если для некоторых* $1 \leqslant k < t \leqslant n$, $i, u \in \{1,\ldots,q_k\}$ *имеем* $\lambda_{t,i} \in \mathbb{N}$, $\vec{\lambda}_k \sim \lambda_{t,u} - \vec{\lambda}_t$, *то* $\alpha_k \neq -\alpha_t$.

4°. *Если для некоторого* $t \in \{1,\ldots,n\}$ *и всех* $j = 1,\ldots,q_t$ *имеем* $\vec{\lambda}_t - \lambda_{t,j} \sim \vec{\lambda}_{k(j)}$, *где* $k(j_1) \neq k(j_2)$ *при* $j_1 \neq j_2$, *то* $\alpha_t \neq \alpha_{k(j)}$ *хотя бы при одном* j.

Следствие. *Пусть* q *— нечётное число,* $\vec{\lambda} \in (\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}^-)^q$, *числа* $\alpha_1,\ldots,\alpha_n \in \mathbb{A}\setminus\{0\}$ *и попарно различны. Тогда для алгебраической независимости* nq *чисел*

$$\varphi_{\vec{\lambda}}(\alpha_1), \varphi'_{\vec{\lambda}}(\alpha_1), \ldots, \varphi^{(q-1)}_{\vec{\lambda}}(\alpha_1), \ldots, \varphi_{\vec{\lambda}}(\alpha_n), \varphi'_{\vec{\lambda}}(\alpha_n), \ldots, \varphi^{(q-1)}_{\vec{\lambda}}(\alpha_n)$$

необходимо и достаточно, чтобы $\vec{\lambda} \not\sim (0, 1/q, \ldots, (q-1)/q)$ *и если*

$\vec{\lambda} \sim \lambda_i - \vec{\lambda}$ *при некотором* $i \in \{1, \ldots, q\}$, *то* $\alpha_k \neq -\alpha_t$ *при всех* $1 \leqslant k < t \leqslant n$.

Условие 1°, необходимое и достаточное для алгебраической независимости чисел $\varphi_{\lambda_1}(\beta_1), \ldots, \varphi_{\lambda_\varkappa}(\beta_\varkappa)$, получено А.Б. Шидловским (см. §3 гл. 5 книги[3]). Условия 2° и 4° гарантируют отсутствие алгебраических связей в случае коградиентности рассматриваемых уравнений, а условие 3° — в случае контргградиентности (см.[11] или [13; стр. 107]).

Теорема 21 обобщает и усиливает результат В.Х. Салихова (теорему 2 статьи[9]). Условие теоремы $\vec{\lambda}_k + 1/d \not\sim \vec{\lambda}_k$, равносильное линейной неприводимости, не является большим ограничением, так как при его нарушении функция $\varphi_{\vec{\lambda}_k}(z)$ представляется в виде линейной комбинации решений неприводимых уравнений (см. §5 статьи[9]), к которым теорема 21 уже применима. В случае $l > 0$ для функций ${}_l\varphi_q(z)$ с помощью теорем 16 – 20 аналогично получается усиление результатов М.А. Черепнёва[24].

Глава 5. Алгебраические свойства гипергеометрических функций, удовлетворяющих дифференциальным уравнениям 2-го порядка

К множеству гипергеометрических функций, удовлетворяющих линейным дифференциальным уравнениям не выше второго порядка, помимо $K_\lambda(z)$, $A_{\mu,\nu}(z)$, $\varphi_\lambda(z)$ и e^z, относятся функции

$$K_{\lambda,\mu}(z) = {}_0\varphi_2(\lambda+1, \mu+1; -z^2/4) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\lambda+1)_n(\mu+1)_n} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n},$$

$$A_{\theta,\eta,\zeta}(z) = {}_1\varphi_2(\zeta+1; \theta+1, \eta+1; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\zeta+1)_n}{(\theta+1)_n(\eta+1)_n} z^n,$$

где $-\lambda, -\mu, -\theta, -\eta, -\zeta \notin \mathbb{N}$.

Как следует из статьи Зигеля[1], для алгебраической независимости $2nm$ чисел $K_{\lambda_i}(\alpha_k)$, $K'_{\lambda_i}(\alpha_k)$, где $-\lambda_i \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{N}$, $\alpha_k \in \mathbb{A} \setminus \{0\}$, $i = 1, \ldots, n$, $k = 1, \ldots, m$, необходимо и достаточно выполнение условий $\alpha_k^2 \neq \alpha_l^2$, $\lambda_i + 1/2 \notin \mathbb{Z}$, $\lambda_i \pm \lambda_j \notin \mathbb{Z}$. Окончательный результат такого типа приведен в теореме 9 гл. 9 книги[3].

В 1954 г. А.Б. Шидловский (см. §5 гл. 6 книги[3]) исследовал функции $K_{\lambda,\mu}(z)$ и доказал алгебраическую независимость над $\mathbf{C}(z)$ двух функций $K_{\lambda,\mu}(\alpha z)$, $K'_{\lambda,\mu}(\alpha z)$, где $-\lambda, -\mu \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{A} \setminus \{0\}$, при условии $\lambda - \mu + 1/2 \notin \mathbb{Z}$. Это условие являлось только достаточным. Необходимое и достаточное условие $(\lambda, \mu) \not\sim (0, 1/2)$ было получено в 1970 г. И.И. Белогривовым и В.А. Олейниковым (см. там же). В 1969 г. А.А. Шмелёв (см. §6 гл. 9 книги[3]) доказал алгебраическую независимость $2nm$ функций $K_{\lambda_i,\mu_i}(\alpha_k z)$, $K'_{\lambda_i,\mu_i}(\alpha_k z)$, где $-\lambda_i, -\mu_i \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{N}$, $\alpha_k \in \mathbb{A} \setminus \{0\}$, $i = 1, \dots, n$, $k = 1, \dots, m$, при условиях

$$\alpha_k^2 \neq \alpha_l^2, \;\; \lambda_i - \mu_i + 1/2 \notin \mathbb{Z}, \; (\lambda_i - \mu_i) \pm (\lambda_j - \mu_j) \notin \mathbb{Z}.$$

Завершением этих исследований является

Теорема 22. *Пусть* $-\lambda_i, -\mu_i \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{N}$, $\alpha_i \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, $i = 1, \dots, n$, $n \geqslant 1$, *и если* $\lambda_j \in \mathbb{Z}$ *или* $\mu_j \in \mathbb{Z}$, $1 \leqslant j \leqslant n$, *то считаем, что* $\mu_j \in \mathbb{Z}$. *Тогда для алгебраической независимости* $2n$ *функций* $K_{\lambda_i,\mu_i}(\alpha_i z)$, $K'_{\lambda_i,\mu_i}(\alpha_i z)$ *над* $\mathbb{C}(z)$ *необходимо и достаточно выполнение следующих трёх условий:*

1°. $(\lambda_i, \mu_i) \not\sim (0, 1/2)$, $i = 1, \dots, n$.

2°. *Если* $\alpha_i^2 = \alpha_j^2$, $i \neq j$, *то* $(\lambda_i, \mu_i) \not\sim (\lambda_j, \mu_j)$.

3°. *Если* $\mu_i, \mu_j \in \mathbb{Z}$, $\alpha_i^2 = \alpha_j^2$, $i \neq j$, *то* $\lambda_i + \lambda_j \notin \mathbb{Z}$.

Наличие трудностей при рассмотрении случая $\lambda - \mu + 1/2 \in \mathbb{Z}$ можно объяснить существованием тождества

$$K_{\lambda,\lambda+1/2}(z) = \frac{2\lambda + 1}{2iz}(\varphi_{2\lambda}(iz) - \varphi_{2\lambda}(-iz)),$$

вытекаюшего, например, из формулы (19) п. 5.2.1 книги[22], и, по-видимому, не известного вышеупомянутым авторам.

Покажем, что нарушение любого условия в теореме 22 действительно порождает алгебраические тождества между рассматриваемыми функциями.

Если $(\lambda, \mu) \sim (0, 1/2)$, то заметим, что функции $K_{0,-1/2}(z) = K_{-1/2}(z) = \cos z$ и $K'_{0,-1/2}(z) = -\sin z$ алгебраически зависимы.

Если $(\lambda_i, \mu_i) \sim (\lambda_j, \mu_j)$, то имеют место соотношения смежности.

Если $\mu_i, \mu_j \in \mathbb{Z}$, $\lambda_i + \lambda_j \in \mathbb{Z}$, то можно рассмотреть функции $K_{0,\lambda}(z) = K_\lambda(z)$, $K_{0,-\lambda}(z) = K_{-\lambda}(z)$, связанные алгебраическим уравнением

$$K_\lambda(z)K'_{-\lambda}(z) - K'_\lambda(z)K_{-\lambda}(z) - 2\lambda K_\lambda(z)K_{-\lambda}(z)/z + 2\lambda/z = 0$$

(см. равенство (73) гл. 9 книги[3]).

В 1962 г. В.А. Олейников (см. §4 гл. 6 книги[3]) доказал, что две функции $A_{\mu,\nu}(\alpha z)$, $A'_{\mu,\nu}(\alpha z)$, где $\mu, \nu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$, $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, алгебраически независимы над $\mathbb{C}(z)$ тогда и только тогда, когда $\nu \notin \mathbb{N}$, $\nu - \mu \notin \mathbb{Z}^+$. В 1971 г. И.И. Белогривов (см. §6 гл. 9 книги[3]) доказал алгебраическую независимость $2nm$ функций $A_{\mu_i,\nu_i}(\alpha_k z)$, $A'_{\mu_i,\nu_i}(\alpha_k z)$, где $\mu_i, \nu_i \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}^-$, $\alpha_k \in \mathbb{A} \setminus \{0\}$, $i = 1, \ldots, n$, $k = 1, \ldots, m$, при условиях

$$\nu_i \notin \mathbb{N},\ \nu_i - \mu_i \notin \mathbb{Z},\ ((2\nu_i - \mu_i) - (2\nu_j - \mu_j) \pm (\mu_i \pm \mu_j))/2 \notin \mathbb{Z},$$

и линейной независимости чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ над $\mathbb{Q}$.

Окончательным результатом этого типа является

Теорема 23. *Пусть* $\mu_i, \nu_i \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$, $\alpha_i \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $i = 1, \ldots, n$, $n \geqslant 1$. *Тогда для алгебраической независимости* $2n$ *функций* $A_{\mu_i,\nu_i}(\alpha_i z)$, $A'_{\mu_i,\nu_i}(\alpha_i z)$ *над* $\mathbb{C}(z)$ *необходимо и достаточно выполнение следующих четырёх условий:*

1°. $\nu_i \notin \mathbb{N}$, $\nu_i - \mu_i \notin \mathbb{Z}^+$, $i = 1, \ldots, n$.

2°. *Если* $\alpha_i = \alpha_j$, $i \neq j$, *то* $(\nu_i; \mu_i) \not\sim (\nu_j; \mu_j)$.

3°. *Если* $\alpha_i = -\alpha_j$, $i \neq j$, *то* $(\nu_i; \mu_i) \not\sim -(\nu_j; \mu_j)$, $(\nu_i; \mu_i) \not\sim \mu_j - (\nu_j; 0)$.

4°. *Если* $\mathbb{J}_1$ *— множество всех индексов* i, *таких, что* $\alpha_i = \alpha_j$, $(\nu_i; \mu_i) \sim (\nu_j; 0) - \mu_j$, $\mu_j \notin \mathbb{N}$, $1 \leqslant i < j \leqslant n$, *а* $\mathbb{J}_2$ *— таких, что* $\mu_i - \nu_i \in \mathbb{N}$, *то числа* α_i, $i \in \mathbb{J}_1 \cup \mathbb{J}_2$, *линейно независимы над* $\mathbb{Q}$.

Необходимость условий теоремы 23 вытекает из следующих причин.

При $s \in \mathbb{Z}^+$, $k \in \mathbb{N}$ имеют место тождества

$$A_{\mu,\mu+s}(\alpha z) = P\, e^{\alpha z} + P_1, \quad A_{\nu+k,\nu}(\alpha z) = P\, e^{\alpha z} \varphi_\nu(-\alpha z) + P_1 e^{\alpha z},$$

$$A_{\mu,k}(\alpha z) = P\, \varphi_\mu(\alpha z) + P_1, \quad \varphi_k(\alpha z) = P\, e^{\alpha z} + P_1, \quad \varphi_0(\alpha z) = e^{\alpha z},$$

где $P, P_1 \in \mathbf{C}[z, z^{-1}]$ (см. §4 гл. 6 и §2 гл. 5 книги[3]).

Отсюда при $\nu \in \mathbb{N}$ и при $\nu - \mu \in \mathbb{Z}^+$ получается алгебраическая зависимость функций $A_{\mu,\nu}(\alpha z)$ и $A'_{\mu,\nu}(\alpha z)$ над $\mathbb{C}(z)$.

Если $\alpha_i = \alpha_j$, $(\mu_i; \nu_i) \sim (\mu_j; \nu_j)$, то алгебраические соотношения получаются из соотношений смежности.

Если $\alpha_i = \alpha_j$, $(\nu_i; \mu_i) \sim (\nu_j; 0) - \mu_j$, $\mu_j \notin \mathbb{Z}$, то заметим, что функции $A_{\mu,\nu}(z)$ и $z^{1-\mu} A_{2-\mu,\nu-\mu+1}(z)$ являются линейно независимыми решениями уравнения (10) с вронскианом $W(A_{\mu,\nu}(z), z^{1-\mu}\, A_{2-\mu,\nu-\mu+1}(z)) = z^{-\mu} e^z$. Отсюда, вновь воспользовавшись соотношениями смежности, получаем алгебраические соотношения между рассматриваемыми функциями.

Если $\alpha_i = -\alpha_j$, $(\nu_i;\mu_i) \sim \mu_j - (\nu_j;0)$, то алгебраические связи появляются в силу соотношений Куммера $A_{\mu,\nu}(z) = e^z A_{\mu,\mu-\nu}(-z)$.

Если $\alpha_i = -\alpha_j$, $(\mu_i;\nu_i) \sim -(\mu_j;\nu_j)$, то при $\mu_j \in \mathbb{Z}$ получаем предыдущий случай, а при $\mu_j \notin \mathbb{Z}$, как следует из рассуждений двух предыдущих случаев, алгебраические соотношения возникают из-за того, что $W(A_{\mu,\nu}(z), z^{1-\mu}e^z A_{2-\mu,1-\nu}(-z)) = z^{-\mu}e^z$.

В 1966 г. А.Б. Шидловский рассмотрел функции $A_{\theta,\eta,\zeta}(z)$ и доказал алгебраическую независимость двух функций $A_{\theta,\eta,\zeta}(\alpha z)$, $A'_{\theta,\eta,\zeta}(\alpha z)$, где $-\theta, -\eta, -\zeta \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{A} \setminus \{0\}$, при условии $\zeta - \theta, \zeta - \eta \notin \mathbb{Z}^+$ (см. §5 гл. 6 книги[3]). В 1969 г. Ю.В. Нестеренко[5] доказал алгебраическую независимость $2nm$ функций $A_{\theta_i,\eta_i,\zeta_i}(\alpha_k z)$, $A'_{\theta_i,\eta_i,\zeta_i}(\alpha_k z)$, где $-\theta_i, -\eta_i, -\zeta_i \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{N}$, $\alpha_k \in \mathbb{A} \setminus \{0\}$, $i = 1, \ldots, n$, $k = 1, \ldots, m$, при условиях

$$\alpha_k^2 \neq \alpha_l^2, \ \ \zeta_i - \theta_i, \zeta_i - \eta_i \notin \mathbb{Z},$$

$$((2\zeta_i - \theta_i - \eta_i) - (2\zeta_j - \theta_j - \eta_j) \pm ((\theta_i \pm \theta_j) - (\eta_i \pm \eta_j)))/2 \notin \mathbb{Z}.$$

Эти условия являлись только достаточными, так как были получены методом, требующим алгебраической независимости решений соответствующих однородных уравнений.

Окончательный результат выглядит следующим образом.

Теорема 24. *Пусть $-\theta_i, -\eta_i, -\zeta_i \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$, $\alpha_i \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $i = 1, \ldots, n$, $n \geqslant 1$, и если $\zeta_j - \theta_j \in \mathbb{Z}$ или $\zeta_j - \eta_j \in \mathbb{Z}$, $1 \leqslant j \leqslant n$, то считаем, что $\zeta_j - \eta_j \in \mathbb{Z}$. Пусть $\mathbb{J}$ — множество всех индексов i, таких, что $\eta_i - \zeta_i \in \mathbb{N}$. Тогда для алгебраической независимости $2n$ функций $A_{\theta_i,\eta_i,\zeta_i}(\alpha_i z)$, $A'_{\theta_i,\eta_i,\zeta_i}(\alpha_i z)$ над $\mathbb{C}(z)$ необходимо и достаточно выполнение следующих четырёх условий:*

1°. $\zeta_i - \theta_i, \zeta_i - \eta_i \notin \mathbb{Z}^+$, $i = 1, \ldots, n$.

2°. *Если $\alpha_i = \alpha_j$, $i \neq j$, то $(\zeta_i; \theta_i, \eta_i) \not\sim (\zeta_j; \theta_j, \eta_j)$.*

3°. *Если $\theta_i \in \mathbb{Z}$ или $\eta_i \in \mathbb{Z}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, то выполняются условия 1°, 3°, 4° теоремы 23, где μ заменяется соответственно на $\eta + 1$ или $\theta + 1$, а ν на $\zeta + 1$.*

4°. *Если $\alpha_i = \alpha_j$, $i, j \in \mathbb{J}$, $i \neq j$, то $\theta_i - \theta_j \notin \mathbb{Z}$, а если $\alpha_i = -\alpha_j$, $i, j \in \mathbb{J}$, то $\eta_i - \theta_i - \theta_j \notin \mathbb{Z}$.*

Для обоснования необходимости условий теоремы 24 заметим, что, как следует из соотношений смежности, при $s \in \mathbb{Z}^+$

$$A_{\theta,\eta,\eta+s}(\alpha z) = P\,\varphi_\theta(\alpha z) + P_1, \quad P, P_1 \in \mathbb{C}[z, z^{-1}].$$

Поэтому при $\zeta - \eta \in \mathbb{Z}^+$ имеет место алгебраическая зависимость функций $A_{\theta,\eta,\zeta}(z)$ и $A'_{\theta,\eta,\zeta}(z)$.

Если $\theta \in \mathbb{Z}$ или $\eta \in \mathbb{Z}$, то функции $A_{\theta,\eta,\zeta}(z), A'_{\theta,\eta,\zeta}(z)$ алгебраически эквивалентны над $\mathbb{C}(z)$ соответствующей функции Куммера и её производной.

Необходимость первого условия в 4° теоремы 24 следует из тождества

$$\eta\varphi_\theta(z) = zA'_{\theta,\eta,\eta-1}(z) + \eta A_{\theta,\eta,\eta-1}(z). \tag{24}$$

Необходимость второго условия в 4° следует из тождеств (24) и

$$(\theta_1+\theta_2)\varphi_{\theta_1}(z)\varphi_{\theta_2}(-z) = \theta_2 A_{\theta_1,\theta_1+\theta_2,\theta_1+\theta_2-1}(z) + \theta_1 A_{\theta_2,\theta_1+\theta_2,\theta_1+\theta_2-1}(-z),$$

а при $\theta_i = 0$ также из тождеств (24) и

$$\theta A_{0,\theta,\theta-1}(-z) = (z(A_{0,\theta,\theta-1}(-z))' + \theta A_{0,\theta,\theta-1}(-z))\varphi_\theta(z).$$

Три последних тождества доказываются в §1 главы 5 диссертации.

В диссертации доказывается также теорема 25, являющаяся максимальным обобщением теорем 22 – 24, позволяющая определять алгебраическую независимость или зависимость любой совокупности гипергеометрических функций, удовлетворяющих дифференциальным уравнениям не выше 2-го порядка.

Глава 6. Оценки мер алгебраической независимости значений E-функций

Теорема 26. *При условиях теоремы V справедлива оценка (6), где* $\rho = (m+1)^{m+1}h^{m+1}/m!$, $C > 0$ *– постоянная, эффективная по* s.

Теорема 26 обобщается на случай совокупностей систем (3) и (4).

Если h произвольно, то величина ρ в теореме 26 имеет наименьшую асимптотику и наименьшие значения при конкретных m по сравнению с ранее доказанными теоремами.

Теорема 28. *При условиях теоремы VI справедлива оценка (7), где* $\rho = (l+1)(2\varkappa_0)^m(m+1)^l/l!$, $\varkappa_0$ *– максимум показателей в старших членах минимальных уравнений, связывающих функции (2) (они составляют т. н. базис Грёбнера),* $C > 0$ *– постоянная, эффективная* *по s. Если $l = m - 1$, то $\rho = km^{2m}(m-1)^{1-m}/m!$, где k — степень неприводимого уравнения, связывающего функции (2).*

При некоторых дополнительных условиях постоянные C в теоремах 26 и 28 полностью эффективны.

Числа α для использования в оценке (7) можно выбирать, например, пользуясь теоремой 2.

Для произвольных l и h постоянная ρ в теореме 28 вычислена впервые.

Заключение

Основные результаты диссертации состоят в следующем.

1. Метод Зигеля впервые применён к исследованию арифметической природы значений E-функций в особых точках систем дифференциальных уравнений.

2. Впервые получен эффективный аналог теоремы II А.Б. Шидловского.

3. Для случая линейных дифференциальных уравнений 1-го порядка и линейных однородных дифференциальных уравнений 2-го порядка доказана гипотеза Зигеля.

4. Гипотеза Зигеля доказана также для некоторых важных случаев линейных неоднородных дифференциальных уравнений 2-го порядка. В общем случае линейных неоднородных дифференциальных уравнений 2-го порядка приведены аргументы в пользу того, что гипотеза Зигеля не выполняется и схема возможного доказательства этого утверждения.

5. Доказана равносильность определений 1 и 3 для E-функции, удовлетворяющей линейному дифференциальному уравнению не выше 2-го порядка.

6. Полностью решён вопрос об алгебраической независимости над $\mathbb{C}(z)$ множества всех гипергеометрических E-функций, удовлетворяющих линейным дифференциальным уравнениям не выше 2-го порядка, а также о возможных алгебраических связях между ними.

7. Получены теоремы общего характера с необходимыми и достаточными условиями об алгебраической независимости над $\mathbb{C}(z)$ решений произвольных совокупностей гипергеометрических уравнений различных порядков. Эти теоремы охватывают "почти все" гипергеометри-

ческие уравнения за исключением тех, наборы параметров которых могут быть представлены точками некоторых определённых алгебраических подмногообразий малых размерностей.

8. Найдено значительное количество новых алгебраических тождеств, связывающих гипергеометрические функции.

9. Получены новые оценки многочленов от значений E-функций.

Благодарности

Автор признателен коллективу кафедры теории чисел механико-математического факультета МГУ за творческую атмосферу, в которой происходили написание и обсуждение диссертации.

Автор также благодарен коллективу кафедры математического моделирования НИУ "МЭИ" за создание условий для научной деятельности.

Основные публикации автора по теме диссертации

Статьи в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности

1. Горелов В.А. Об алгебраической независимости значений некоторых E-функций// Вестник МГУ. Сер. 1, Математика, механика. – 1981. – № 1. – С. 47–51. Перевод: On the algebraic independence of the values of some E-functions// Moscow University Mathematics Bulletin. – 1981. – V. 36, № 1. – P. 55–59.

Журнал индексируется в Scopus, РИНЦ, импактфактор 0,268 (2017 г.).

2. Горелов В.А. Об оценках мер алгебраической независимости значений E-функций// Сибирский математический журнал. – 1990. – Т. 31, № 5. – С. 31–45. Перевод: Estimates of algebraic independence measures of values of E-functions// Siberian Mathematical Journal. – 1990. – V. 31, № 5. – P. 732–743.

Журнал индексируется в Scopus, РИНЦ, WoS, импактфактор 0,791 (2018 г.).

3. Горелов В.А. Оценки мер алгебраической независимости значений E-функций// Известия Вузов. Математика. – 1992. – № 10. – С. 6–11.

Журнал индексируется в РИНЦ. Из перечня ВАК. Импактфактор 0,113 (2003 г.).

4. Горелов В.А. Об алгебраической независимости значений E-функций в особых точках и гипотезе Зигеля// Математические заметки. – 2000.

– Т. 67, вып. 2. – С. 174–190. Перевод: Algebraic independence of the values of E-functions at singular points and Siegel's conjecture// Mathematical Notes. – 2000. – V. 67, № 2. – P. 138-151.

Журнал индексируется в Scopus, РИНЦ, WoS, импактфактор 0,208 (2004 г.).

5. Горелов В.А. О гипотезе Зигеля для случая линейных однородных дифференциальных уравнений 2-го порядка// Математические заметки. – 2004. – Т. 75, вып. 4. – С. 549–565. Перевод: On the Siegel's conjecture for second-order homogeneous linear differential equations// Mathematical Notes. – 2004. – V. 75, № 4. – P. 513-529.

Журнал индексируется в Scopus, РИНЦ, WoS, импактфактор 0,208 (2004 г.).

6. Горелов В.А. Частный случай задачи о линейной независимости значений E-функций// Вестник МЭИ. – 2004. – № 6. – С. 39–42.

Журнал индексируется в РИНЦ. Из перечня ВАК. Импактфактор 0,132 (2009 г.).

7. Горелов В.А. О структуре множества E-функций, удовлетворяющих линейным дифференциальным уравнениям 2-го порядка // Математические заметки. – 2005. – Т. 78, вып. 3. – С. 331–348. Перевод: On the structure of the set of E-functions satisfying linear differential equations of second order// Mathematical Notes. – 2005. – V. 78, № 3. – P. 304-319.

Журнал индексируется в Scopus, РИНЦ, WoS, импактфактор 0,205 (2005 г.).

8. Горелов В.А. Об ослабленной гипотезе Зигеля// Фундаментальная и прикладная математика. – 2005. – Т. 11, вып. 6. – С. 33–39. Перевод: On the weakened Siegel's conjecture// Journal of Mathematical Sciences. – 2007. – V. 146, № 2. – P. 5649–5654.

Журнал индексируется в Scopus, РИНЦ, WoS, импактфактор 0,125 (2005 г.).

9. Горелов В.А. Критерий алгебраической независимости совокупностей значений функций Куммера и их производных// Вестник МЭИ. – 2007. – № 6. – С. 30–42.

Журнал индексируется в РИНЦ. Из перечня ВАК. Импактфактор 0,132 (2009 г.).

10. Горелов В.А. О новых алгебраических тождествах между обобщенными гипергеометрическими функциями // Вестник МЭИ. – 2008. – № 6. – С. 129–138.

Журнал индексируется в РИНЦ. Из перечня ВАК. Импактфактор 0,132 (2009 г.).

11. Горелов В.А. Критерий алгебраической независимости совокупностей значений гипергеометрических функций некоторого вида // Вестник МЭИ. – 2009. – № 6. – С. 15–32.

Журнал индексируется в РИНЦ. Из перечня ВАК. Импактфактор 0,132 (2009 г.).

12. Горелов В.А. Об алгебраических тождествах между обобщенными гипергеометрическими функциями// Математические заметки. – 2010. – Т. 88, вып. 4. – С. 511–516. Перевод: On algebraic identities between generalized hypergeometric functions// Mathematical Notes. – 2010. – V. 88, № 4. – P. 487-491. DOI: 10.1134/S0001434610090208

Журнал индексируется в Scopus, РИНЦ, WoS, импактфактор 0,384 (2010 г.).

13. Горелов В.А. Об алгебраической независимости значений обобщенных гипергеометрических функций// Математические заметки. – 2013. – Т. 94, вып. 1. – С. 94–108. Перевод: On the algebraic independence of values of generalized hypergeometric functions// Mathematical Notes. – 2013. – V. 94, № 1, P. 82-95. DOI: 10.1134/S0001434613070080

Журнал индексируется в Scopus, РИНЦ, WoS, импактфактор 0,384 (2013 г.).

14. Горелов В.А. Об алгебраических свойствах решений неоднородных гипергеометрических уравнений// Математические заметки. – 2016. – Т. 99, вып. 5. – С. 658–672. Перевод: On the algebraic properties of solutions of inhomogeneous hypergeometric equations// Mathematical Notes. – 2016. – V. 99, № 5, P. 663-675. DOI: 10.1134/S0001434616050059

Журнал индексируется в Scopus, РИНЦ, WoS, импактфактор 0,555 (2016 г.).

15. Gorelov V.A. On contiguity relations for generalized hypergeometric functions// Problemy Analiza – Issues of Analysis. – 2018. – V. 7(25), № 2. – P. 39–46. DOI: 10.15393/j3.art.2018.4490

Журнал индексируется в Scopus, РИНЦ, WoS, импактфактор 0,167 (2018 г.).

16. Горелов В.А. Об алгебраических тождествах между фундаментальными матрицами уравнений Бесселя и Куммера// Сибирские электронные математические известия. – 2019. – Т. 16. – С. 258–262. DOI: 10.33048/semi.2019.16.017

Журнал индексируется в Scopus, РИНЦ, WoS, импактфактор 0,420 (2018 г.).

17. Горелов В.А. Об алгебраических тождествах между фундаментальными матрицами обобщенных гипергеометрических уравнений// Чебышевский сборник. – 2020. – Т. 21, вып. 1. – С. 135–144. DOI: 10.22405/ 2226-8383-2020-21-135-144

Журнал индексируется в Scopus, РИНЦ, импактфактор 0,320 (2018 г.).

Прочие публикации

18. Горелов В.А. Об одном утверждении Зигеля// Сборник "Диофантовы приближения". – Ч. I. – 1985. – М.: изд-во МГУ. – С. 25–36.

19. Горелов В.А. Эффективные оценки мер алгебраической независимости значений некоторых гипергеометрических E-функций// Сборник "Диофантовы приближения". – Ч. II. – 1986. – М.: изд-во МГУ. – С. 12–23.

20. Горелов В.А. Алгебраическая независимость значений E-функций, связанных произвольными алгебраическими уравнениями над $\mathbb{C}(z)$ // Фундаментальная и прикладная математика. – 1998. – Т. 4, вып. 2. – С. 751–755.