

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

Лівінська Ганна Володимирівна

УДК 519.21

**ПЕРЕВАНТАЖЕНІ БАГАТОКАНАЛЬНІ МЕРЕЖІ ЗІ
ЗМІННОЮ ІНТЕНСИВНІСТЮ ВХІДНОГО ПОТОКУ**

01.05.04 – системний аналіз і теорія оптимальних рішень

Автореферат

дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

КИЇВ – 2014

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана на кафедрі прикладної статистики факультету кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук, професор
Лебедєв Євген Олександрович,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
завідувач кафедри прикладної статистики

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор
Чабанюк Ярослав Михайлович,
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
Державної служби України з надзвичайних ситуацій,
професор кафедри промислової безпеки та охорони праці

кандидат фізико-математичних наук, доцент
Нікітін Анатолій Володимирович,
Буковинський державний фінансово-економічний університет
МОН України, доцент кафедри комп'ютерних дисциплін

Захист відбудеться «13» вересня 2014 р. о 15.10 год. на засіданні спеціалізованої вченої ради Д26.001.35 Київського національного університету імені Тараса Шевченка за адресою: м. Київ, просп. Академіка Глушкова, 2-А, географічний факультет, ауд. 312.

З дисертацією можна ознайомитись у Науковій бібліотеці імені М. Максимовича Київського національного університету імені Тараса Шевченка за адресою: 01601, Київ, вул. Володимирська, 58.

Автореферат розісланий «13» серпня 2014 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради

П.М. Зінько

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА

Актуальність теми. Початок дослідженням стохастичних мереж обслуговування було покладено роботами Дж. Джексона з описом класу марковських мереж, для яких стаціонарний розподіл кількості вимог у вузлах мережі має мультиплікативну форму. У подальшому завдяки зусиллям багатьох вчених з'явилося багато досліджень, присвячених аналізу різноманітних характеристик мереж обслуговування. В них було продемонстровано, що стохастичні мережі є адекватними моделями інформаційно-обчислювальних мереж, мереж мобільного зв'язку та інших сучасних систем передачі та обробки інформації. Апарат теорії стохастичних мереж використовується на всіх рівнях організації мережевих структур: при проектуванні їх топології, при розробці протоколів, при виборі методів комутації та алгоритмів маршрутизації інформаційних потоків.

Розробки аналітичних методів для систем мережевої структури знайшли відображення в роботах Г.П. Башаріна, П.П. Бочарова, В.М. Вишневського, О.М. Дудіна, В.О. Івницького, В.І. Кліменок, І.М. Коваленка, Ю.М. Малінковського, О.В. Печінкіна, Г.І. Фаліна, О.І. Voxma, К.М. Chandy, F.P. Kelly, L. Kleinrock, B. Melamed, J.W. Wong та ін. Асимптотичний аналіз стохастичних мереж представлено в роботах В.В. Анісімова, О.О. Боровкова, Р.Л. Добрушина, Я.А. Когана, В.С. Королюка, Є.О. Лебедева, Р.Ш. Ліпцера, М. Bramson, Н. Chen, J.G. Dai, J.M. Harrison, D.I. Iglehart, T. Kurtz, M.I. Reiman, W. Whitt, Н. Zhang.

Функціонування локальних комп'ютерних мереж і глобальних мереж типу "Інтернет", що складаються з провайдерських вузлів зв'язку, веб-серверів, станцій передачі та ін., описується стохастичними мережами з параметрами, що є функціями від часу. Аналіз систем та мереж масового обслуговування зі змінними в часі параметрами є складним математичним завданням. На тепер не існує універсальних методів дослідження таких моделей і тому є необхідність розробки методів, які були б ефективними принаймні для окремих типів стохастичних мереж.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконувалась відповідно до плану наукових досліджень кафедри прикладної статистики факультету кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка в рамках науково-дослідної теми №11БФ015-06 «Проблеми теорії прийняття рішень та системного аналізу стохастичних мереж» (№ держреєстрації 0111U006680), науково-дослідної теми №06БП015-06 «Розвиток теорії програмного забезпечення стохастичних моделей, теорії алгебраїчних систем та аналіз перспектив їх застосування. Розробка та впровадження інформаційних технологій в освіті» (№ держреєстрації 0106U004352), теми № 08ДФ015-05 «Розробка математичних методів дослідження та оптимізації марковських систем з повторними викликами та керованими локальними характеристиками» (№ держреєстрації 0108U007058), теми № 07ДФ015-09 «Аналіз та оптимізація стохастичних систем з повторними викликами» (№ держреєстрації 0107U010798).

Мета і задачі дослідження. Основною метою роботи є апроксимація багатоканальних мереж масового обслуговування різних типів, параметри зовнішніх вхідних потоків яких залежать від часу.

Сформульована мета обумовлює наступні задачі досліджень:

– побудова багатовимірних генератрис процесу обслуговування в стохастичних мережах типу $[M_t | M | \infty]^r$ з періодичним вхідним потоком;

– пошук умов існування квазістаціонарного режиму для мереж з періодичним вхідним потоком та побудова генератриси квазістаціонарного розподілу;

– побудова апроксимативного гауссівського процесу для багатоканальних марковських мереж із змінним параметром пуассонівського вхідного потоку, доведення збіжності функціоналів;

– апроксимація немарковських стохастичних мереж типу $[\vec{M}_t | GI | \infty]^r$ та, зокрема, $[\vec{M}_t | E_m | \infty]^r$ у перевантаженому режимі функціонування.

Об'єкт дослідження – стохастичні мережі обслуговування з вхідним потоком вимог, що залежить від часу.

Предмет дослідження – багатовимірний процес обслуговування вимог у стохастичних мережах з вхідним потоком, що залежить від часу.

Методи досліджень. Застосовані методи аналізу стохастичних систем базуються на апараті теорії масового обслуговування, марковських та напівмарковських процесів, функціональних граничних теоремах теорії випадкових процесів, апараті стохастичного інтегрування.

Наукова новизна одержаних результатів. Всі основні результати дисертаційної роботи є новими. Вони математично обґрунтовані й порівняні з відомими результатами у цій галузі, а також повністю викладені у наукових публікаціях автора. В дисертації отримані такі нові результати:

– знайдені генератрис процесу обслуговування в мережах типу $[M_t | M | \infty]^r$ з періодичним вхідним потоком для перехідного і квазістаціонарного режимів;

– побудовано апроксимативний гауссівський процес для марковських багатоканальних мереж із змінним параметром вхідного потоку і для процесу обслуговування доведені функціональні граничні теореми;

– запропоновано критерій марковської властивості для багатовимірних гауссівських процесів та з'ясовано, за яких умов граничний процес буде багатовимірною дифузією;

– розроблено метод гауссівської апроксимації для немарковських багатоканальних мереж типу $[\vec{M}_t | E_m | \infty]^r$ та $[\vec{M}_t | GI | \infty]^r$.

Практичне значення отриманих результатів. Дисертаційна робота має теоретичний характер і є внеском у перспективний напрямок досліджень з теорії стохастичних мереж, пов'язаний з вивченням асимптотичної поведінки марковських та немарковських мереж у перевантаженому режимі функціонування.

Отримані в дисертації результати можуть знайти застосування для розв'язування сучасних практичних задач, що виникають при управлінні складними технологічними процесами, при створенні та експлуатації мобільних мереж зв'язку та інформаційно-обчислювальних систем.

Результати роботи використовуються при викладанні спеціальних курсів "Стохастичні моделі мережевої структури", "Теорія масового обслуговування" для студентів факультету кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

Особистий внесок здобувача. Основні наукові результати, включені в дисертаційну роботу, отримані здобувачем самостійно. У роботах [1], [3], [5], [6], написаних у співавторстві з Лебедевим Є.О., проведення асимптотичного аналізу та доведення граничних теорем виконано здобувачем, науковому керівнику належать постановки задач та участь в обговоренні результатів. У тези наукових доповідей [7, 11-13] включено результати автора дисертації, що стосуються функціональних граничних теорем та побудови граничних процесів для процесів обслуговування.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційної роботи доповідались та обговорювались на

–XVI Міжнародній конференції «Prediction and Decision Making under Uncertainties» (Ялта, 2010);

–XIX Міжнародній конференції «Prediction and Decision Making under Uncertainties» (Мукачево, 2012);

–Міжнародній конференції «Modern Stochastics: Theory and Applications III» (Київ, 2012);

–XX Міжнародній конференції «Prediction and Decision Making under Uncertainties» (Брно, Чеська Республіка, 2012);

–Міжнародній конференції «Сучасні ймовірнісні методи аналізу, проектування та оптимізації інформаційно-телекомунікаційних мереж» (22-а Білоруська школа-семінар по теорії масового обслуговування, Мінськ, 2013);

–Міжнародній конференції «XXXI International Seminar on Stability Problems for Stochastic Models» (Москва, Росія, 2013);

–IV Міжнародній конференції Грузинської математичної спілки (Тбілісі – Батумі, Грузія, 2013);

–XXII Міжнародній конференції «Prediction and Decision Making under Uncertainties» (Ялта-Форос, 2013).

Матеріали наукового дослідження доповідались та отримали позитивний відгук на розширеному науковому семінарі кафедр системного аналізу та теорії прийняття рішень і прикладної статистики Київського національного університету імені Тараса Шевченка та на кафедрі дослідження операцій Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

Публікації. Основні результати дисертації опубліковані в 13 наукових працях (5 одноосібних), серед яких 6 наукових статей, у тому числі 5 – у наукових фахових виданнях, які затверджено МОН України, 1 – у науковому фаховому виданні, включеному до науково-метричної бази та 7 тез конференцій.

Структура та обсяг роботи. Дисертаційна робота складається з вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел (116 найменувань на 12 сторінках) та 1 додатку (1 сторінка). Загальний обсяг дисертації становить 134 сторінки, основний текст роботи (в т.ч. 5 рисунків) викладено на 118 сторінках.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ

У **вступі** обґрунтовано актуальність теми та доцільність роботи. Вказано зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами, сформульовано мету та визначено основні задачі дослідження, описано наукову новизну одержаних результатів та наведено їх практичне значення. Описано особистий внесок

здобувача, наведено відомості щодо апробації основних результатів роботи та публікації.

У **розділі 1** наведено огляд підходів, пов'язаних з вивченням стохастичних систем та мереж зі змінною інтенсивністю вхідного потоку в умовах критичного навантаження, побудовою апроксимативних дифузійних і гауссівських процесів. Також детально розглядаються сучасні проблеми, які виникають при аналізі стохастичних мереж.

У **розділі 2** розроблено модель мережі масового обслуговування, що складається з “ r ” вузлів обслуговування. Ззовні до мережі надходить один неоднорідний пуассонівський потік вимог $\nu(t)$ з параметром $\lambda(t)$, $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(u) du$ –

ведуча функція пуассонівського потоку. Вимога, що надійшла до мережі, з імовірністю p_{0i} , $i=1,2,\dots,r$, надходить для обслуговування в i -тий вузол. Кожен из “ r ” вузлів функціонує як багатоканальна стохастична система. При надходженні вимоги в таку систему одразу починається її обслуговування. Час обслуговування в i -тому вузлі показниково розподілений з параметром μ_i , $i=1,2,\dots,r$. Після завершення обслуговування в i -тому вузлі вимога з імовірністю p_{ij} спрямовується для обслуговування в j -тий вузол і з ймовірністю $p_{ir+1} = 1 - \sum_{j=1}^r p_{ij}$ залишає мережу,

$P = \|p_{ij}\|_1^r$ – матриця маршрутизації мережі. Додаткові вузли з номерами “0” та “ $r+1$ ” інтерпретуються як “вхід” та “вихід” з мережі відповідно (Рис. 2.1).

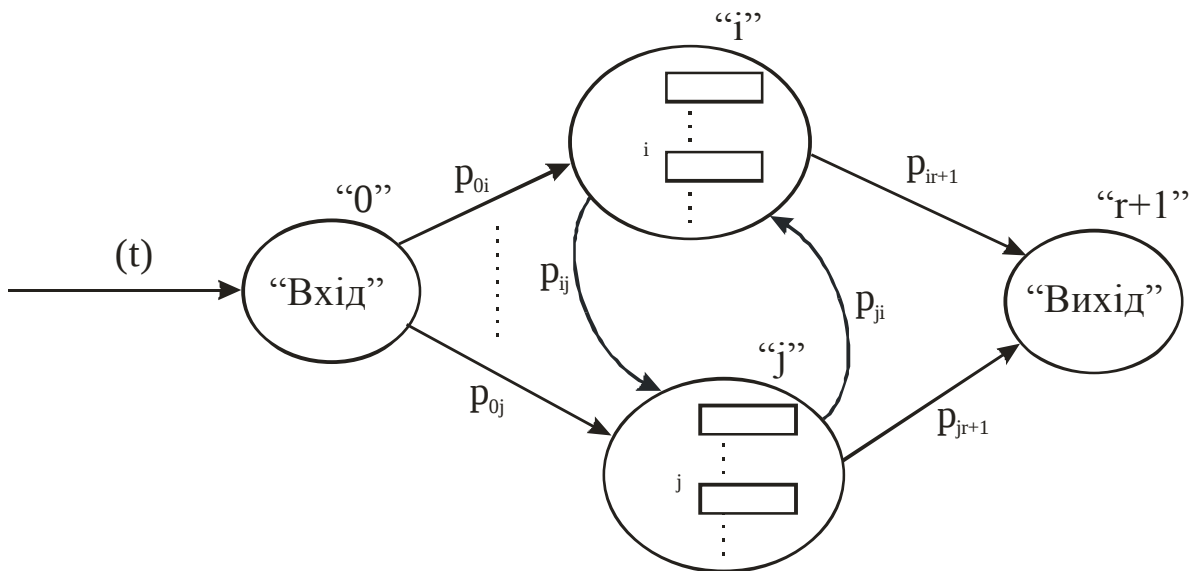


Рис. 2.1. Структура багатоканальної мережі з одним вхідним потоком вимог.

Згідно системі позначень, котра прийнята в теорії стохастичних мереж, описану вище модель будемо позначати символом $[M_t | M | \infty]^r$. Стохастичні мережі такого типу використовуються при моделюванні процесів обробки інформації в мережах

передачі даних та системах мобільного зв'язку, при дослідженні параметрів трекової іонізації в трекових камерах, у фармакокінетиці та інших сферах.

Процесом обслуговування вимог у мережі типу $[M_t | M | \infty]^r$ будемо називати r -вимірний процес $Q'(t) = (Q_1(t), \dots, Q_r(t))$, де $Q_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, r$ – кількість вимог у i -ому вузлі в момент часу t . Процес $Q(t)$, $t \geq 0$, є неоднорідним ланцюгом Маркова в множині станів $S = N^{+r}$, $N^+ = 0, 1, \dots$, із змінними інфінітезимальними характеристиками.

Протягом першого розділу припускається, що $\lambda(t)$ – періодична з періодом $T > 0$ функція:

$$\lambda(nT + \theta) = \lambda(\theta) \text{ для } n = 1, 2, \dots \text{ і } 0 \leq \theta < T.$$

Для процесу $Q(t)$ розподіл імовірностей $\pi_j(\theta)$, $j \in S$, $0 \leq \theta \leq T$ будемо називати квазіергодичним, якщо незалежно від $i \in S$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(Q(nT + \theta) = j / Q(0) = i) = \pi_j(\theta).$$

При аналізі перехідного режиму та знаходженні квазіергодичного розподілу процесу $Q(t)$, $t \geq 0$, застосовується метод генератрис.

Нехай

$$\Phi(z, t) = E z_1^{Q_1(t)} \times \dots \times z_r^{Q_r(t)} = \sum_{k=(k_1, \dots, k_r)} z_1^{k_1} \dots z_r^{k_r} P(Q'(t) = (k_1, \dots, k_r)),$$

$$|z| \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, r, \quad z' = (z_1, \dots, z_r),$$

– багатовимірною генератрисою вектора $Q'(t) = (Q_1(t), \dots, Q_r(t))$. Тоді наступна теорема дає формулу для генератрис $\Phi_\theta(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(z, nT + \theta)$, $0 \leq \theta < T$, квазіергодичного розподілу.

Теорема 2.2. Якщо $\lambda(t)$ – періодична з періодом T функція, спектральний радіус матриці P строго менший за 1, то для будь-якого $\theta \in [0, T)$

$$\Phi_\theta(z) = \exp\left\{-\sum_{k=1}^r (1 - z_k) \mathcal{F}_k(\theta)\right\},$$

$$\text{де } \mathcal{F}_k(\theta) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=1}^r p_{0j} \int_0^T p_k^j(mT + u) \lambda(T - u + \theta) du, \quad P(t) = \|p_j^i(t)\|_1^r = \exp\{\Delta(\mu)(P - I)t\},$$

$\mu' = (\mu_1, \dots, \mu_r)$, $\Delta(x) = \|x_i \delta_{ij}\|_1^r$ – діагональна матриця з вектором $x' = (x_1, \dots, x_r)$ на головній діагоналі, $I = \|\delta_{ij}\|_1^r$ – одинична матриця.

Доведення цього результату використовує зв'язок пуассонівського потоку з порядковими статистиками, який дозволяє конструктивно подати $\Phi(z, t)$ через параметри мережі.

Зауважимо, що в умовах теореми 2.2 квазіергодичний розподіл для $[M_t | M | \infty]^r$ -мережі має мультиплікативну форму. Очевидно, умова, що накладається на спектральний радіус матриці маршрутизації, означає те, що мережа є відкритою. Така форма ергодичного розподілу добре відома для стохастичних

мереж, для яких процес обслуговування вимог описується однорідним ланцюгом Маркова.

У **підрозділі 2.3** розвинуто апроксимативний метод дослідження для багатоканальних мереж з періодичним вхідним потоком, які функціонують в умовах критичного навантаження. Суть його полягає в тому, що багатовимірний стрибкоподібний процес обслуговування апроксимується неперервним гауссівським процесом. Для обґрунтування апроксимації доведено відповідну функціональну граничну теорему, що дає можливість використовувати цей результат для розрахунку характеристик якості функціонування стохастичної мережі. В свою чергу, спираючись на алгоритми розрахунку функціоналів якості, можна ставити та розв'язувати задачі по оптимальному керуванню параметрами мережі.

Режим критичного навантаження для $[M_t | M | \infty]^r$ - мережі з періодичним вхідним потоком означає, що інтенсивності обслуговування у вузлах мережі залежать від “ n ” (номера серії) таким чином, що виконується наступна умова:

Умова 1.1. $\lim_{n \rightarrow \infty} n\mu_i^{(n)} = \mu_i > 0, \quad i = 1, 2, \dots, r.$

У контексті Умови 1.1 розглянемо послідовність випадкових процесів

$$\xi^{(n)}(t) = n^{-1/2} (Q^{(n)}(nt) - q^{(n)}(nt)), \quad t \geq 0,$$

де $q^{(n)'}(nt) = (q_1^{(n)}(nt), \dots, q_r^{(n)}(nt))$, $q_j^{(n)}(nt) = \sum_{i=1}^r p_{0i} \int_0^{nt} p_j^{i(n)}(nt-u) \lambda(u) du$, $j = 1, \dots, r$,

$p_j^{i(n)}(t)$ – елементи матриці $P^{(n)}(t) = \|p_j^{i(n)}(t)\|_1^r = \exp\{\Delta(\mu^{(n)})(P - I)t\}$,

$\mu^{(n)'} = (\mu_1^{(n)}, \dots, \mu_r^{(n)})$.

Для того, щоб описати границю послідовності випадкових процесів $\xi^{(n)}(t)$ при $n \rightarrow \infty$, ми введемо два незалежних гауссівських процеси $\xi^{(i)'}(t) = (\xi_1^{(i)}(t), \dots, \xi_r^{(i)}(t))$, $i = 1, 2$.

Процес $\xi^{(1)}(t)$ визначається середніми значеннями

$$E\xi^{(1)}(t) = 0$$

та кореляційними матрицями

$$R^{(1)}(t) = E\xi^{(1)}(t)\xi^{(1)'}(t) - E\xi^{(1)}(t)E\xi^{(1)'}(t) = \int_0^t P'(u)\Delta(\bar{\lambda})P(u)du,$$

$$R^{(1)}(s, t) = E\xi^{(1)}(s)\xi^{(1)'}(t) - E\xi^{(1)}(s)E\xi^{(1)'}(t) = R^{(1)}(s)P(t-s), \quad s < t,$$

де $\bar{\lambda}' = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$, $\lambda_i = p_{0i} \int_0^T \lambda(u) du$.

Для процесу $\xi^{(2)}(t)$

$$E\xi^{(2)}(t) = 0,$$

$$R^{(2)}(t) = \int_0^t [\Delta(\bar{\lambda}'P(u)) - P'(u)\Delta(\bar{\lambda})P(u)]du, \quad R^{(2)}(s, t) = R^{(2)}(s)P(t-s), \quad s < t.$$

Наступна теорема дає апроксимацію для процесу обслуговування при критичному навантаженні в мережі.

Теорема 2.4. Нехай для $[M_t | M | \infty]^r$ -мережі виконується Умова 1.1, і в початковий момент часу мережа порожня: $Q^{(n)'}(0) = (0, \dots, 0)$. Тоді на будь-якому скінченному проміжку $[0, T]$ послідовність випадкових процесів $\xi^{(n)}(t)$ при $n \rightarrow \infty$ збігається в рівномірній топології до $\xi^{(1)}(t) + \xi^{(2)}(t)$.

У **підрозділі 2.4** додатково досліджено асимптотичну поведінку процесу обслуговування вимог у мережі типу $[M_t | M | \infty]^r$ за припущень, що мережа функціонує в перевантаженому режимі, початкове завантаження мережі залежить від параметра серії n та зростає певним чином при $n \rightarrow \infty$. Для того щоб узгодити параметри складових граничного процесу, протягом цього підрозділу вважається, що $[M_t | M | \infty]^r$ -мережа відкрита: спектральний радіус матриці маршрутизації P строго менший за 1. Через $\theta' = (\theta_1, \dots, \theta_r) = \bar{\lambda}'(I - P)^{-1}$ позначається розв'язок рівняння балансу для відкритої $[M_t | M | \infty]^r$ -мережі з періодичним вхідним потоком.

Тепер замість $Q_i^{(n)}(0) = 0$, $i = 1, 2, \dots, r$, будемо вимагати наступної умови.

Умова 2. $Q_i^{(n)}(0) = [n\theta_i / \mu_i + \sqrt{n}\eta_i^{(0)}]$, $i = 1, 2, \dots, r$,

де $\eta^{(0)'} = (\eta_1^{(0)}, \dots, \eta_r^{(0)})$ деякий фіксований вектор з $\square^r$.

Знайдемо границю для послідовності випадкових процесів

$$\eta^{(n)}(t) = n^{-1/2}(Q^{(n)}(nt) - n(\theta / \mu)), \quad t \geq 0, \quad n \geq 1,$$

де $(\theta / \mu)' = (\theta_1 / \mu_1, \dots, \theta_r / \mu_r)$.

У зв'язку з цим розглянемо додатково гауссівський процес $\xi^{(3)}(t)$, який не залежить від процесів $\xi^{(1)}(t)$, $\xi^{(2)}(t)$, введених в попередньому підрозділі, визначається середніми значеннями

$$E\xi^{(3)}(t) = P'(t)\eta^{(0)},$$

та кореляційними матрицями

$$\begin{aligned} R^{(3)}(t) &= E\xi^{(3)}(t)\xi^{(3)'}(t) - E\xi^{(3)}(t)E\xi^{(3)'}(t) = \\ &= \Delta \left(\theta / \mu' P(t) \right) - P'(t)\Delta \theta / \mu P(t), \end{aligned}$$

$$R^{(3)}(s, t) = E\xi^{(3)}(s)\xi^{(3)'}(t) - E\xi^{(3)}(s)E\xi^{(3)'}(t) = R^{(3)}(s)P' t - s, \quad s < t.$$

З теореми 2.4 випливає такий результат.

Теорема 2.5. Нехай для $[M_t | M | \infty]^r$ -мережі з періодичним вхідним потоком спектральний радіус матриці маршрутизації P строго менший за 1 і виконуються Умови 1.1, 2. Тоді на будь-якому скінченному проміжку $[0, T]$ послідовність випадкових процесів $\eta^{(n)}(t)$ при $n \rightarrow \infty$ збігається в рівномірній топології до процесу $\xi^{(1)}(t) + \xi^{(2)}(t) + \xi^{(3)}(t)$.

Порівняно з твердженням теореми 2.4 додаткова компонента $\xi^{(3)}(t)$ граничного процесу пов'язана з флуктуаціями часів обслуговування тих вимог, які знаходились у вузлах мережі в початковий момент часу $t = 0$.

Граничний процес в теоремі 2.5 можна подати інакше.

Наслідок 2.3. Якщо для $[M_t | M | \infty]^r$ -мережі з періодичним вхідним потоком виконуються умови теореми 2.5, то на будь-якому скінченному проміжку $[0, T]$ послідовність випадкових процесів $\eta^{(n)}(t)$ при $n \rightarrow \infty$ збігається в рівномірній топології до r -вимірного процесу Орнштейна-Уленбека $\eta^{(0)}(t)$ в перехідному режимі ($\eta^{(0)}(0) = \eta^{(0)}$), для якого

$$E\eta^{(0)}(t) = P'(t)\eta^{(0)},$$

$$R^{(0)}(t) = E\eta^{(0)}(t)\eta^{(0)'}(t) - E\eta^{(0)}(t)E\eta^{(0)'}(t) = \Delta(\theta/\mu) - P'(t)\Delta(\theta/\mu)P(t),$$

$$R^{(0)}(s, t) = E\eta^{(0)}(s)\eta^{(0)'}(t) - E\eta^{(0)}(s)E\eta^{(0)'}(t) = R^{(0)}(s)P(t-s), \quad s < t.$$

Отже, в цьому підрозділі доведено, що за вказаних умов процес обслуговування має в якості границі гауссівський процес, який розкладається у суму трьох незалежних гауссівських процесів $\xi^{(1)}(t) + \xi^{(2)}(t) + \xi^{(3)}(t)$. Перша компонента $\xi^{(1)}(t)$ граничного процесу пов'язана з флуктуаціями вхідного потоку, $\xi^{(2)}(t)$ – з флуктуаціями часу обслуговування, а $\xi^{(3)}(t)$ – з обслуговуванням початкового навантаження мережі. При цьому сумарний процес є багатовимірним процесом Орнштейна-Уленбека.

У розділі 3 розглядаються стохастичні мережі, які розвивають попередні моделі. Тепер припускається, що на кожен з “ r ” вузлів мережі ззовні надходить свій неоднорідний пуассонівський потік вимог: для вузла з номером “ i ” пуассонівський потік $\nu_i(t)$ з ведучою функцією $\Lambda_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, r$.

Припущення про періодичність знімається.

Для таких моделей використаємо позначення $[\vec{M}_t | M | \infty]^r$ (Рис. 3.1).

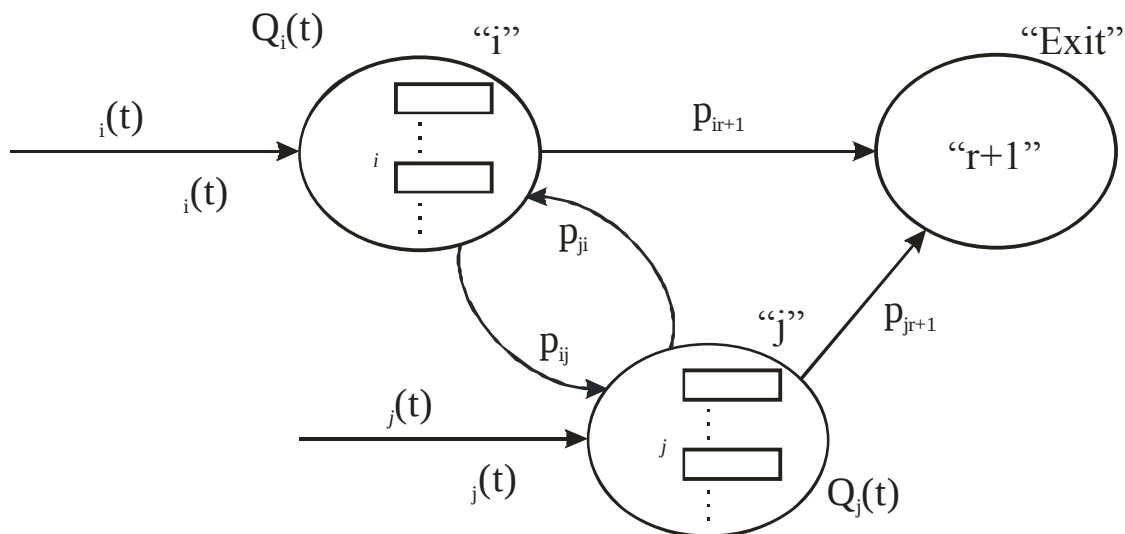


Рис. 3.1. Структура багатоканальної мережі типу $[\vec{M}_t | M | \infty]^r$.

Наша головна мета – вивчити асимптотичну поведінку процесу обслуговування вимог $Q'(t) = (Q_1(t), \dots, Q_r(t))$ ($Q_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, r$ – кількість вимог в i -тому вузлі в момент часу $t \geq 0$) в умовах перевантаженого режиму.

Перевантажений режим обумовлюється наступною поведінкою параметрів мережі. Для інтенсивностей обслуговування виконується Умова 1.1, а параметри вхідних потоків задовольняють такій умові:

Умова 3.1. Вхідний потік залежить від “ n ” (номера серії) таким чином, що на будь-якому скінченному інтервалі $[0, T]$

$$n^{-1} \Lambda_i^{(n)}(nt) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{U} \Lambda_i^{(0)}(t) \in C[0, T], \quad i = 1, 2, \dots, r,$$

де $C[0, T]$ – простір неперервних функцій, заданих на відрізку $[0, T]$, символ $\xrightarrow{U} \Rightarrow$ означає збіжність у рівномірній топології.

Відзначимо два важливих для застосувань випадки, коли Умова 3.1 виконується.

Тимчасово припустимо, що пуассонівський потік $\nu_i(t)$ регулярний:

$$\Lambda_i(t) = \int_0^t \lambda_i(u) du, \text{ де } \lambda_i(u) \text{ – миттєве значення параметра.}$$

а) Нехай $\lambda_i(t)$ періодична з періодом T_i функція:

$$\lambda_i(nT_i + t) = \lambda_i(t) \text{ для } n = 1, 2, \dots \text{ і } 0 \leq t < T_i.$$

$$\text{Тоді Умова 3.1 виконується для } \Lambda_i^{(0)}(t) = \left(\int_0^{T_i} \lambda_i(u) du \right) t.$$

б) Якщо для регулярного потоку $\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda_i(t) = \lambda_i > 0$, то Умова 3.1 виконується для $\Lambda_i^{(0)}(t) = \lambda_i t$.

В контексті умов 1.1, 3.1 розглянемо послідовність випадкових процесів

$$\xi^{(n)}(t) = n^{-1/2} (Q^{(n)}(nt) - q^{(n)}(nt)), \quad t \geq 0,$$

$$\text{де } q^{(n)'}(nt) = (q_1^{(n)}(nt), \dots, q_r^{(n)}(nt)), \quad q_j^{(n)}(nt) = \sum_{i=1}^r \int_0^{nt} d\Lambda_i^{(n)}(\tau) p_j^{i(n)}(nt - \tau), \quad j = 1, \dots, r.$$

Щоб описати границю послідовності випадкових процесів $\xi^{(n)}(t)$, $n \geq 1$, при $n \rightarrow \infty$, ми введемо два незалежні гауссівські процеси $\xi^{(i)'}(t) = (\xi_1^{(i)}(t), \dots, \xi_r^{(i)}(t))$, $i = 1, 2$.

Процес $\xi^{(1)}(t)$ визначається середніми значеннями

$$E \xi^{(1)}(t) = 0$$

та кореляційними матрицями

$$R^{(1)}(t) = E \xi^{(1)}(t) \xi^{(1)'}(t) - E \xi^{(1)}(t) E \xi^{(1)'}(t) = \int_0^t P'(t - \tau) \Delta [d\Lambda^{(0)}(\tau)] P(t - \tau),$$

$$R^{(1)}(s, t) = E \xi^{(1)}(s) \xi^{(1)'}(t) - E \xi^{(1)}(s) E \xi^{(1)'}(t) = R^{(1)}(s) P(t - s), \quad s < t,$$

де $\Lambda^{(0)'}(t) = \Lambda_1^{(0)}(t), \dots, \Lambda_r^{(0)}(t)$, $P(\tau) = \exp \Delta(\mu) P - I \tau$.

Для процесу $\xi^{(2)}(t)$

$$E\xi^{(2)}(t) = 0,$$

$$R^{(2)}(t) = \int_0^t [\Delta[(d\Lambda^{(0)}(\tau))'P(t-\tau)] - P'(t-\tau)\Delta[d\Lambda^{(0)}(\tau)]P(t-\tau)]$$

$$R^{(2)}(s, t) = R^{(2)}(s)P(t-s), \quad s < t.$$

Наступна теорема є основним результатом третього розділу.

Теорема 3.1. Нехай для $[\overline{M}_t | M | \infty]^r$ - мережі виконуються Умови 1.1, 3.1. У початковий момент часу $t=0$ мережа порожня: $Q^{(n)'}(0) = (0, \dots, 0)$. Тоді на будь-якому скінченному проміжку $[0, T]$ послідовність випадкових процесів $\xi^{(n)}(t)$ при $n \rightarrow \infty$ збігається в рівномірній топології до $\xi^{(1)}(t) + \xi^{(2)}(t)$.

Зауважимо, що частина $\xi^{(1)}(t)$ граничного процесу пов'язана з флуктуаціями вхідного потоку, а $\xi^{(2)}(t)$ – з флуктуаціями часу обслуговування.

У підрозділі 3.4 досліджено зв'язок граничного гауссівського процесу з процесами дифузії.

В одновимірному випадку для гауссівських процесів існує критерій в термінах «необхідно та достатньо» для перевірки марковської властивості. Основна умова цього критерію, якщо її виписати в термінах кореляцій, достатньо зручна для перевірки на практиці. У багатовимірному випадку ситуація ускладнюється і загального критерію немає. В цьому підрозділі отримано достатні умови марковості для r -вимірних гауссівських процесів і застосовано цей критерій до граничного процесу з попереднього підрозділу.

Розглянемо r -вимірний гауссівський процес $\xi'(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t), \dots, \xi_r(t))$ з нульовими середніми значеннями

$$E\xi_i(t) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, r,$$

та кореляційними матрицями

$$R(t) = E\xi(t)\xi'(t) - E\xi(t)E\xi'(t),$$

$$R(s, t) = E\xi(s)\xi'(t) - E\xi(s)E\xi'(t), \quad s < t.$$

Теорема 3.3. Нехай для деякої матриці A та будь-яких $0 \leq s < t$, кореляційні функції $R(s)$, $R(s, t)$ гауссівського процесу $\xi(t)$ пов'язані між собою наступним чином:

$$R(s, t) = R(s)P(t-s), \quad \text{де } P(t) = \exp(At);$$

Тоді $\xi(t)$ є марковським процесом, причому умовний розподіл $P(\xi(t) \in B | \xi(s) = x)$, $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^r}$ (σ -алгебра борелівських підмножин $\mathbb{R}^r$), є гауссівським з вектором середніх значень $P'(t-s)x$ та кореляційною матрицею $R(t) - P'(t-s)R(s)P(t-s)$.

Множина G_A гауссівських процесів, для яких виконуються умови теореми 3.2 і відповідні матриці A яких однакові, задовольняє умові замкненості: лінійна комбінація двох незалежних процесів з G_A належить G_A . Таким чином, як наслідок з теореми 3.2 ми отримуємо такий цікавий факт: сума двох незалежних марковських G_A - процесів є марковським процесом.

Застосуємо тепер критерій марковості, який дає теорема 3.2, до граничного гауссівського процесу $\xi^{(1)}(t) + \xi^{(2)}(t)$.

Теорема 3.4. Якщо $\Lambda_i^{(0)}(t) = \int_0^t \lambda_i^{(0)}(u) du$, $\lambda_i^{(0)}(u) \in C[0, T]$, $i = 1, 2, \dots, r$, то граничний гауссівський процес $\xi^{(1)}(t) + \xi^{(2)}(t)$, $t \in [0, T]$ є r -вимірним дифузійним процесом з вектором переносу $A(x) = A'x$ і матрицею дифузії $B(t) = \Delta[\lambda^{(0)'}(t) + q'(t)A] - A'\Delta[q(t)] - \Delta[q(t)]A$, де

$$A = \Delta(\mu)(P - I), \quad q'(t) = \int_0^t \lambda^{(0)'}(\tau) P(t - \tau) d\tau, \quad \lambda^{(0)'}(\tau) = (\lambda_1^{(0)}(\tau), \dots, \lambda_r^{(0)}(\tau)).$$

Таким чином, теорема 3.3 належить до результатів по дифузійній апроксимації перевантажених систем и мереж масового обслуговування. Подання граничного процесу у вигляді багатовимірної дифузії є привабливим у тому, що дифузійний процес визначається своїми локальними характеристиками і при аналізі функціоналів від нього можна використовувати розвинутий апарат марковських дифузійних процесів. Однак поряд з цим є і втрати, оскільки тепер граничний процес не відбиває в деталях структуру дограничного процесу обслуговування.

У розділі 4 дисертації розглядаються моделі стохастичних мереж типу $[\overline{M}_t | GI | \infty]^r$. Основна відмінність від моделей розділу 3 полягає у тому, що тепер час обслуговування в i -тому вузлі мережі має довільний розподіл.

У підрозділі 4.2 окремо досліджено мережі $[\overline{M}_t | E_m | \infty]^r$, $m' = (m^{(1)}, m^{(2)}, \dots, m^{(r)})$, коли час обслуговування вимоги у вузлі складається з деякої кількості експоненціальних етапів з однаковими параметрами. Тоді загальний час обслуговування вимоги вузлом мережі має розподіл Ерланга, якому можна дати наступну інтерпретацію. Якщо вимога надходить для обслуговування у i -тий вузол мережі, то процес її обслуговування розбивається на $m^{(i)}$ фаз (етапів) обслуговування, які вимога проходить послідовно одну за одною. На кожному етапі вона затримується на показниково розподілений час з параметром μ_i . При цьому часи проходження фаз – незалежні між собою випадкові величини. Вимога, що надійшла на i -тий вузол мережі, проходить послідовно всі $m^{(i)}$ фаз, починаючи з фази 1 (Рис. 4.2).

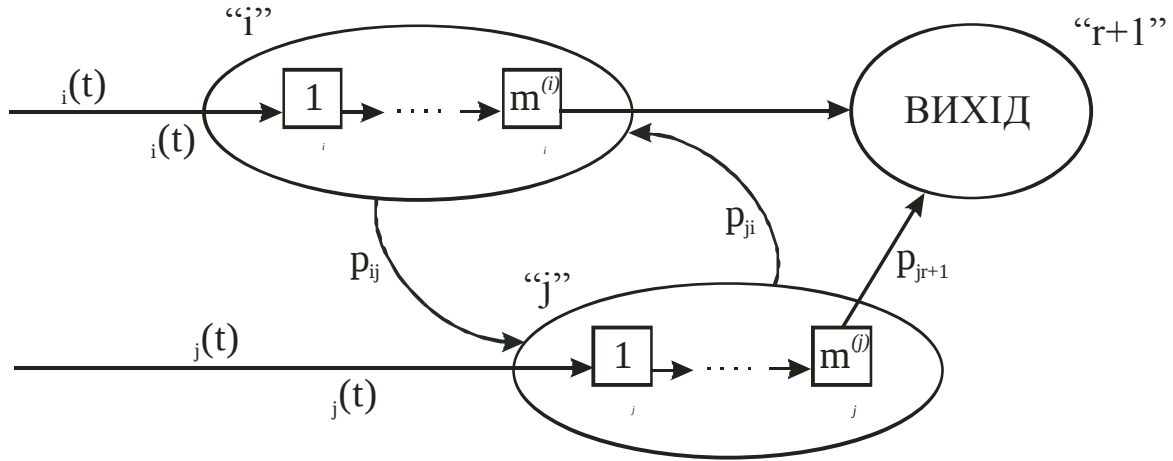


Рис. 4.2. Стохастична мережа типу $[\overrightarrow{M_t} | E_m | \infty]^r$ з розподілом Ерланга

Для спрощення аналізу $[\overrightarrow{M_t} | E_m | \infty]^r$ - мережі введемо для моделювання роботи i - того вузла $m^{(i)}$ «нових» вузлів, які є багатоканальними стохастичними системами марковського типу. Перенумеруємо всі ці вузли таким чином, що роботу i - того вузла будуть моделювати «нові» вузли з номерами $\sum_{j=1}^{i-1} m^{(j)} + 1, \dots, \sum_{j=1}^i m^{(j)}$.

При цьому зовнішні потоки вимог $v_1(t), \dots, v_r(t)$ будуть надходити тільки у вузли з номерами

$$N^{(i)} = \sum_{j=0}^{i-1} m^{(j)} + 1, \quad i = 1, 2, \dots, r, \quad \text{де } m^{(0)} = 0.$$

Позначимо через $v(t)$ $\tilde{r}$ - вимірний вектор, $\tilde{r} = \sum_{j=1}^r m^{(j)}$, $N^{(i)}$ - та компонента якого дорівнює $v_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, r$, а інші – нулю.

Враховуючи зв'язки між «старими» вузлами мережі ($P = \|p_{ij}\|_{i,j=1}^r$) і алгоритм обслуговування за розподілом Ерланга (рис. 4.2), матриця маршрутизації $P = \|p_{ij}\|_{i,j=1}^r$ між $\tilde{r}$ «новими» вузлами буде мати блочну структуру і складатись з r^2 блоків $P^{(\alpha, \beta)}$, $P = \|P^{(\alpha, \beta)}\|_{\alpha, \beta=1}^r$.

Блок $P^{(i, i)}$ для $i = 1, 2, \dots, r$ має розмір $m^{(i)} \times m^{(i)}$ та представляє собою матрицю такого виду:

$$P^{(i, i)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ p_{ii} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Блок $P^{(i,j)}$ для $i, j = 1, 2, \dots, r$, $i \neq j$, є прямокутною матрицею розміру $m^{(i)} \times m^{(j)}$ такого виду:

$$P^{(i,j)} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ p_{ij} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, роботу $[\vec{M}_t | E_m | \infty]^r$ - мережі моделює мережа марковського типу $[\vec{M}_t | M | \infty]^{\tilde{r}}$, але з більшою кількістю вузлів. За побудовою, якщо $Q(t) = (Q_1(t), \dots, Q_r(t))'$ та $Q(t) = (Q_1(t), \dots, Q_{\tilde{r}}(t))'$, $t \geq 0$ – процеси обслуговування вимог у мережах $[\vec{M}_t | E_m | \infty]^r$ та $[\vec{M}_t | M | \infty]^{\tilde{r}}$ відповідно, можна записати:

$$Q_i(t) = \tilde{1}^{(i)'} Q(t), \quad i = 1, 2, \dots, r,$$

де $\tilde{1}^{(i)}$ – $\tilde{r}$ -вимірний вектор-стовпчик, у якого компоненти з номерами

$$\sum_{j=1}^{i-1} m^{(j)} + 1, \sum_{j=1}^{i-1} m^{(j)} + 2, \dots, \sum_{j=1}^i m^{(j)}$$

дорівнюють одиниці, а інші – нулю.

Перевантажений режим у $[\vec{M}_t | E_m | \infty]^r$ - мережі буде означати, що її параметри залежать від деякого « n » (номера серії), виконуються Умова 3.1 з попереднього розділу та наступна умова.

Умова 1.2. $\lim_{n \rightarrow \infty} n \mu_i^{(n)} = \mu_i > 0$, а параметри m^i , $i = 1, 2, \dots, r$, від « n » не залежать.

Розглянемо тепер для $[\vec{M}_t | E_m | \infty]^r$ - мережі нормований процес обслуговування

$$\xi^{(n)}(t) = n^{-1/2} (\mathcal{Q}^{(n)}(nt) - \mathcal{C}^{(n)}(nt)), \quad t \geq 0,$$

$$\mathcal{C}^{(n)'}(t) = (\mathcal{C}_1^{(n)}(t), \dots, \mathcal{C}_r^{(n)}(t)), \quad \tilde{q}^{(n)}(nt) = (\tilde{q}_1^{(n)}(nt), \dots, \tilde{q}_{\tilde{r}}^{(n)}(nt))',$$

$$\mathcal{C}_i^{(n)}(nt) = \tilde{1}^{(i)} \tilde{q}^{(n)}(nt), \quad i = 1, \dots, r,$$

$$\tilde{q}_j^{(n)}(nt) = \sum_{i=1}^{\tilde{r}} \int_0^{nt} d\Lambda_i^{(n)}(u) \tilde{p}_{ij}^{(n)}(nt - u), \quad j = 1, \dots, \tilde{r},$$

$$\tilde{\Lambda}^{(n)}(u) = \left(\underbrace{\Lambda_1^{(n)}(u), 0, \dots, 0}_{m^{(1)}}, \underbrace{\Lambda_2^{(n)}(u), 0, \dots, 0}_{m^{(2)}}, \dots, \underbrace{\Lambda_r^{(n)}(u), 0, \dots, 0}_{m^{(r)}} \right)'$$

$$\tilde{P}^{(n)}(\tau) = \|\tilde{p}_{ij}^{(n)}(\tau)\|_1^{\tilde{r}} = \exp \Delta(\tilde{\mu}^{(n)})(\tilde{P} - \tilde{I})\tau,$$

$$\tilde{\mu}^{(n)} = (\underbrace{\mu_1^{(n)}, \dots, \mu_1^{(n)}}_{m^{(1)}}, \underbrace{\mu_2^{(n)}, \dots, \mu_2^{(n)}}_{m^{(2)}}, \dots, \underbrace{\mu_r^{(n)}, \dots, \mu_r^{(n)}}_{m^{(r)}})',$$

$\tilde{I}$ – одинична матриця розміром $\tilde{r} \times \tilde{r}$.

Для того, щоб описати границю послідовності випадкових процесів $\xi^{(n)}(t)$, $n \geq 1$, при $n \rightarrow \infty$, ми введемо аналогічно тому, як це було зроблено в попередньому розділі, два незалежних гауссівських процеси $\tilde{\xi}^{(i)'}(t) = (\tilde{\xi}_1^{(i)}(t), \dots, \tilde{\xi}_r^{(i)}(t))$, $i = 1, 2$.

Процеси $\tilde{\xi}^{(1)}(t)$ та $\tilde{\xi}^{(2)}(t)$ визначаються нульовими середніми значеннями та кореляційними матрицями:

$$\tilde{R}^{(1)}(t) = E\tilde{\xi}^{(1)}(t)\tilde{\xi}^{(1)'}(t) - E\tilde{\xi}^{(1)}(t)E\tilde{\xi}^{(1)'}(t) = \int_0^t \tilde{P}'(t-\tau)\Delta[d\tilde{\Lambda}^{(0)}(\tau)]\tilde{P}(t-\tau),$$

$$\tilde{R}^{(1)}(s, t) = E\tilde{\xi}^{(1)}(s)\tilde{\xi}^{(1)'}(t) - E\tilde{\xi}^{(1)}(s)E\tilde{\xi}^{(1)'}(t) = \tilde{R}^{(1)}(s)\tilde{P}(t-s), \quad s < t,$$

$$\tilde{R}^{(2)}(t) = \int_0^t [\Delta[(d\tilde{\Lambda}^{(0)}(\tau))'\tilde{P}(t-\tau)] - \tilde{P}'(t-\tau)\Delta[d\tilde{\Lambda}^{(0)}(\tau)]\tilde{P}(t-\tau)],$$

$$\tilde{R}^{(2)}(s, t) = \tilde{R}^{(2)}(s)\tilde{P}(t-s), \quad s < t,$$

$$\text{де } \tilde{\Lambda}^{(0)'}(t) = \left(\underbrace{\Lambda_1^{(0)}(t), 0, \dots, 0}_{m^{(1)}}, \underbrace{\Lambda_2^{(0)}(t), 0, \dots, 0}_{m^{(2)}}, \dots, 0, \underbrace{\Lambda_r^{(0)}(t), 0, \dots, 0}_{m^{(r)}} \right)',$$

$$\tilde{P}(\tau) = \exp\{\Delta(\tilde{\mu})(\tilde{P} - \tilde{I})\tau\}, \quad \tilde{\mu} = (\underbrace{\mu_1, \dots, \mu_1}_{m^{(1)}}, \underbrace{\mu_2, \dots, \mu_2}_{m^{(2)}}, \dots, \underbrace{\mu_r, \dots, \mu_r}_{m^{(r)}})'$$

Наслідком теореми 3.1 є наступний результат.

Теорема 4.1. Нехай для стохастичної мережі типу $[\overline{M}_t | E_m | \infty]^r$ виконуються Умови 1.2, 3.1 і в початковий момент часу мережа порожня: $Q^{(n)}(0) = 0, \dots, 0$. Тоді на будь-якому скінченному проміжку $[0, T]$ послідовність випадкових процесів $\xi^{(n)}(t)$ при $n \rightarrow \infty$ збігається в рівномірній топології до гауссівського процесу $\xi^{(1)}(t) + \xi^{(2)}(t)$, де $\xi^{(i)}(t) = (\xi_1^{(i)}(t), \dots, \xi_r^{(i)}(t))$, $\xi_j^{(i)}(t) = \bar{1}^{(j)} \tilde{\xi}^{(i)}(t)$, $j = 1, 2, \dots, r$, $i = 1, 2$.

Отже, в цьому підрозділі показано, що у випадку розподілу часу обслуговування ерлангівського типу граничний гауссівський процес є сумою відповідних компонент марковського процесу, причому розмірність цього марковського процесу співпадає з сумарним числом фаз. Це пояснює те, що коли час обслуговування хоча б в одному вузлі мережі ерлангівського типу не є показниковим, то граничний процес втрачає марковську властивість.

У підрозділі 4.3 розглядаються моделі, в яких час обслуговування в i -тому вузлі мережі має довільну функцію розподілу $G_i(t)$.

Для опису траєкторії процесу обслуговування вимоги в мережі, яка потрапила в мережу через i -тий вузол, $i = 1, 2, \dots, r$, потрібен напівмарковський процес $x^{(i)}(t)$, $t \geq 0$, в множині станів $\{1, 2, \dots, r, r+1\}$, який задається напівмарковською матрицею

$$\|G_{ij}(t)\|_1^{r+1}:$$

$$G_{ij}(t) = \begin{cases} p_{ij}G_i(t), & i = 1, 2, \dots, r; \quad j = 1, 2, \dots, r, r+1, \\ \delta_{r+1j}G_{r+1}(t), & i = r+1, \quad j = 1, 2, \dots, r, r+1, \end{cases} \quad G_{r+1}(t) = \begin{cases} 0, & t < 1, \\ 1, & t \geq 1. \end{cases}$$

У початковий момент часу $t=0$ $x^{(i)}(0)=i$ і функція розподілу часу перебування у початковому стані “ i ” співпадає з $G_i(t)$.

Стан “ $r+1$ ” для напівмарковського процесу $x^{(i)}(t)$ є поглинаючим. Поглинання інтерпретується як вихід вимоги з мережі.

У подальшому нам будуть потрібні перехідні ймовірності $p_j^i(t) = P(x^{(i)}(t) = j)$, матриця перехідних ймовірностей $P(t) = \|p_j^i(t)\|_{i,j=1}^r$, а також

$$p_{ij}^{(m)}(s,t) = P(x^{(m)}(s) = i, x^{(m)}(t) = j), \quad E^{(m)}(s,t) = \|E_{ij}^{(m)}(s,t)\|_{i,j=1}^r,$$

$$E_{ij}^{(m)}(s,t) = \begin{cases} p_{ij}^m(s,t) / p_i^m(s), & p_i^m(s) \neq 0, \\ 0, & \text{у протилежному випадку,} \end{cases} \quad 0 \leq s < t.$$

Перевантажений режим для $[\bar{M}_t | GI | \infty]^r$ - мережі означає, що її параметри залежать від “ n ” (номера серії) таким чином, що для вхідних потоків виконується

Умова 3.2. На будь-якому скінченному інтервалі $0, T$

$$n^{-1} \Lambda_i^{(n)}(nt) \xRightarrow[n \rightarrow \infty]{U} \Lambda_i^{(0)}(t), \quad i = 1, 2, \dots, r,$$

причому граничні функції задовольняють умові Гьольдера.

Для функцій розподілу часу обслуговування вимог у вузлах мережі виконується така умова:

Умова 1.3. $G_i^{(n)}(nt) \xRightarrow[n \rightarrow \infty]{d} G_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, r.$

Для побудови апроксимативного процесу необхідні два незалежні гауссівські процеси $\xi^{(1)}(t)$ і $\xi^{(2)}(t)$, які мають нульові середні значення і такі кореляційні матриці

$$R^{(1)}(t) = \int_0^t P'(t-\tau) \Delta[d\Lambda^{(0)}(\tau)] P(t-\tau), \quad R^{(1)}(s,t) = \int_0^s P'(s-\tau) \Delta[d\Lambda^{(0)}(\tau)] P(t-\tau), \quad s < t,$$

$$R^{(2)}(t) = \int_0^t [\Delta[(d\Lambda^{(0)}(\tau))' P(t-\tau)] - P'(t-\tau) \Delta[d\Lambda^{(0)}(\tau)] P(t-\tau)],$$

$$R^{(2)}(s,t) = \sum_{m=1}^r \int_0^s [\Delta(p^m(s-\tau)) - p^m(s-\tau) p^{m'}(s-\tau)] E^{(m)}(s-\tau, t-\tau) d\Lambda_m^{(0)}(\tau),$$

де $s < t$, $p^{m'}(t) = (p_1^m(t), \dots, p_r^m(t))$ – m - тий рядок матриці $P(t)$.

Розглянемо нормований процес обслуговування вимог у вузлах мережі

$$\xi^{(n)}(t) = n^{-1/2} (Q^{(n)}(nt) - \int_0^{nt} [d\Lambda^{(n)}(\tau)]' P^{(n)}(nt-\tau)),$$

де $P^{(n)}(t) = \|p_j^{i(n)}(t)\|_{i,j=1}^r$, $p_j^{i(n)}(t) = P(x^{(i,n)}(t) = j)$, $x^{(i,n)}(t)$ – напівмарковський процес, який визначається так само, як $x^{(i)}(t)$ із заміною функції розподілу $G_i(t)$ на $G_i^{(n)}(t)$. Для $\xi^{(n)}(t)$ у підрозділі 4.3 доведено такий результат.

Теорема 4.2. Нехай стохастична мережа типу $[\vec{M}_t | GI | \infty]^r$ задовольняє Умовам 1.3, 3.2 і в початковий момент часу $t=0$ мережа порожня $Q^{(n)'}(0) = (0, \dots, 0)$. Тоді на будь-якому скінченному проміжку $[0, T]$ послідовність випадкових процесів $\xi^{(n)}(t)$ слабо збігається у рівномірній топології до $\xi^{(1)}(t) + \xi^{(2)}(t)$.

Якщо хоча б в одному вузлі функція розподілу відрізняється від показникової, то в процесі обслуговування відбувається накопичення післядії і процес $\xi^{(1)}(t) + \xi^{(2)}(t)$ не буде марковським. Цим апроксимативний процес з розділу 4 суттєво відрізняється від його аналогів у попередніх розділах.

ВИСНОВКИ

У дисертації отримано нові науково обґрунтовані результати для стохастичних мереж в умовах критичного навантаження, які суттєво розвивають теорію стохастичних мереж і у сукупності розв'язують важливе наукове завдання пошуку і розрахунку характеристик ефективності функціонування багатоканальних мереж різних типів із зовнішнім навантаженням, яке залежить від часу.

Основні наукові результати дисертації:

1. Знайдені основні характеристики перехідного режиму багатовимірною процесу обслуговування в мережах типу $[M_t | M | \infty]^r$ з періодичним вхідним потоком.
2. Знайдено генератрису квазієргодичного розподілу в явному вигляді та встановлена його мультиплікативна форма.
3. Побудовано апроксимативний гауссівський процес для мереж типу $[M_t | M | \infty]^r$ з періодичним вхідним потоком в умовах критичного навантаження.
4. Знайдено умови апроксимації процесу обслуговування в багатоканальних мережах багатовимірним процесом Орнштейна-Уленбека.
5. Для процесу обслуговування вимог у мережах типу $[\vec{M}_t | M | \infty]^r$ у перевантаженому режимі доведені функціональні граничні теореми.
6. Встановлено критерій марковської властивості багатовимірних гауссівських процесів і отримано подання граничних процесів як дифузії.
7. Методом гауссівської апроксимації побудовано граничний процес для процесу обслуговування в немарковських мережах типу $[\vec{M}_t | GI | \infty]^r$.

У подальшому результати дисертації можуть знайти застосування для розв'язування практичних задач, пов'язаних з управлінням складними технологічними процесами, створенням та експлуатацією мобільних мереж зв'язку та інформаційно-обчислювальних систем. Апроксимативні процеси можна використовувати для підрахунку функціоналів якості роботи стохастичних мереж, розв'язуванні оптимізаційних задач.

Результати роботи використовуються при викладанні спеціальних курсів "Стохастичні моделі мережевої структури", "Теорія масового обслуговування" для студентів факультету кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ НАУКОВИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Статті в наукових фахових виданнях:

1. Лівінська Г.В. Гауссівська апроксимація мереж із змінною інтенсивністю вхідного потоку / Г.В. Лівінська, Є.О. Лебедев // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки. – 2012. – №1. – С.189-192.
2. Лівінська Г.В. Багатоканальні мережі з періодичним зовнішнім навантаженням / Г.В. Лівінська // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки. – 2012. – №2. – С.149-154.
3. Ливинская А.В. Предельная теорема для перегруженных многоканальных сетей / А.В. Ливинская, Е.А. Лебедев // Кибернетика и системный анализ. – 2012. – №6. – С. 106-113.
4. Лівінська Г.В. Апроксимативний гауссівський процес для мереж типу $[M_t | M | \infty]^r$ та його властивості / Г.В. Лівінська // Вісник Київського університету. Серія: кібернетика. – 2012. – №12. – С. 32-37.
5. Lebedev E. Gaussian approximation of multi-channel networks in heavy traffic / Eugene Lebedev, Ganna Livinska // Communications in Computer and Information Science. – Springer. – 2013. – №356. – С.122-130
6. Lebedev E.O. Multi-channel Stochastic Networks with Periodical Input Flow / Evgeniy O. Lebedev, Hanna V. Livinska // Proceedings of XX International Conference PDMU-2012. Brno, Czech Republic, September 17-21. – 2012. – С. 105-114.

Інші публікації:

7. Лівінська Г.В. Про багатоканальні мережі зі змінною інтенсивністю вхідного потоку / Г.В. Лівінська, Є.О. Лебедев // Problems of Decision Making under Uncertainties: Abstracts of XVI International Conference, October 4-8, 2010, Yalta. – К., 2010. – С. 90-92.
8. Лівінська Г.В. Про апроксимативний гауссівський процес для багатоканальних мереж / Г.В. Лівінська // Problems of Decision Making under Uncertainties: Abstracts of XIX International Conference, April 23-27, 2007, Mukachevo. – К., 2012. – С. 147-149.
9. Livinska A.V. Limit theorems for multi-channel networks in heavy traffic / A.V. Livinska // Modern Stochastics: Theory and Applications III: Abstracts of International Conference, September 10-14, 2012, Kyiv. – К., 2012. – С. 41.
10. Livinska H. The Transitional and Stationary Regime for Network Type $M_t | G | \infty^r$ / H. Livinska // Problems of Decision Making under Uncertainties: Abstracts of XX International Conference, September 17-21, 2012, Brno, Czech Republic, – К., 2012 – С. 69.

11. Livinska H.V. Gaussian limits for multi-channel stochastic networks / H.V. Livinska, E.O. Lebedev // Abstracts of the XXXI International Seminar on Stability Problems for Stochastic Models, April 23-27, 2013, Moscow, Russia. – С. 48-50.

12. E.A. Lebedev Multi-channel networks with interdependent inputs in heavy traffic / E.A. Lebedev, A.A. Chechel'nitski, H.V. Livinska, // Abstracts of the IV International Conference of the Georgian Mathematical Union, September 9-15, 2013, Tbilisi-Batumi, Georgia. – С. 124-125.

13. Livinska H. On multi-channel networks with nonhomogeneous Poisson inputs / H. Livinska, E. Lebedev // Problems of Decision Making under Uncertainties: Abstracts of XXII International Conference, September 23-27, 2013, Yalta-Foros. – К., 2013 – С. 20.

АНОТАЦІЯ

Лівінська Г.В. Перевантажені багатоканальні мережі зі змінною інтенсивністю вхідного потоку. – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.05.04 – системний аналіз і теорія оптимальних рішень. – Київський національний університет імені Тараса Шевченка Міністерства освіти і науки України, Київ, 2013.

Дисертацію присвячено перспективному напрямку теорії стохастичних мереж, пов'язаному з розробкою асимптотичних методів для багатовимірного процесу обслуговування вимог у марковських і немарковських багатоканальних мережах зі змінною інтенсивністю вхідного потоку.

Розглянуто марковські багатоканальні мережі, у яких інтенсивність зовнішнього навантаження періодично змінюється з часом. Процес обслуговування в таких моделях вивчено в перехідному режимі, знайдені умови існування квазіергодичного розподілу і генератриса цього розподілу подана в явному вигляді. Сформульовані умови, при виконанні яких мережа функціонує в перевантаженому режимі. Для процесу обслуговування в перевантаженому режимі побудований апроксимативний гауссівський процес і доведена функціональна гранична теорема.

Методом гауссівської апроксимації проведено асимптотичний аналіз узагальнених марковських моделей мереж, коли умова періодично змінної інтенсивності замінюється на збіжність у рівномірній топології параметрів входу. Доведено критерій марковської властивості для багатовимірних гауссівських процесів. Цей критерій застосовано до граничних процесів і отримано їх подання як багатовимірної дифузії.

Для багатоканальних мереж типу $[\overline{M}_t | GI | \infty]$ побудовані апроксимативні немарковські гауссівські процеси, у яких кореляційні характеристики виписані явно через параметри моделі. Доведена збіжність процесу обслуговування у рівномірній топології.

Ключові слова: багатоканальна стохастична мережа, квазіергодичний розподіл, змінна інтенсивність зовнішнього потоку, перевантажений режим, гауссівська і дифузійна апроксимація, аналіз і оптимізація стохастичних мереж.

АННОТАЦИЯ

Ливинская А.В. Перегруженные многоканальные сети с переменной интенсивностью входящего потока. – Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.05.04 – системный анализ и теория оптимальных решений. – Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко Министерства образования и науки Украины, Киев, 2013.

Диссертация посвящена перспективному направлению теории стохастических сетей, связанному с изучением асимптотическими методами многомерных процессов обслуживания требований в марковских и немарковских многоканальных сетях с переменной интенсивностью входного потока.

Рассмотрены марковские многоканальные сети, у которых интенсивность внешней нагрузки периодически изменяется с течением времени. Используя связь неоднородного пуассоновского процесса с порядковыми статистиками, процесс обслуживания в таких моделях изучен в переходном режиме. Найдены представления для моментов первого и второго порядка. Сформулированы условия существования квазиэргодического распределения и, как следствие результатов о переходном режиме, получен явный вид производящей функции квазиэргодического распределения. Установлена мультипликативная форма квазиэргодического распределения.

Сформулированы условия, при выполнении которых стохастическая сеть функционирует в перегруженном режиме. Для процесса обслуживания в перегруженном режиме построен аппроксимативный гауссовский процесс и доказана функциональная предельная теорема. Метод доказательства основан на представлении процесса обслуживания как суммы условно независимых многомерных процессов индикаторного типа на траектории входного потока. Предельный процесс получен в виде суммы двух независимых многомерных гауссовских процессов. Первая компонента связана с флуктуациями входного потока, вторая – с флуктуациями времен обслуживания в узлах сети. В случае, когда в начальный момент времени число требований в узлах сети «асимптотически велико», в качестве предела процесса обслуживания получен многомерный процесс Орнштейна-Уленбека.

Методом гауссовской аппроксимации проведен асимптотический анализ обобщенных марковских моделей сетей, когда условие периодически изменяющейся интенсивности заменяется на сходимость в равномерной топологии параметров входящих пуассоновских потоков. Доказан критерий свойства марковости для многомерных гауссовских процессов. Этот критерий применен к предельным гауссовским процессам и сформулированы условия их принадлежности классу многомерных диффузионных процессов.

Для стохастических сетей типа $[\vec{M}_t | GI | \infty]^r$ построены аппроксимативные немарковские гауссовские процессы, у которых корреляционные характеристики выписаны явно через параметры модели. При этом в случае эрланговского времени обслуживания использованы предыдущие результаты для марковских сетей, а в общем случае – аппарат полумарковских процессов. Доказана сходимость процесса

обслуживания в равномерной топологии.

Ключевые слова: многоканальная стохастическая сеть, квазиэргодическое распределение, переменная интенсивность внешнего потока, перегруженный режим, гауссовская и диффузионная аппроксимация, анализ и оптимизация стохастических сетей.

ANNOTATION

Livinska H.V. Multi-channel networks with variable rate of input flow in heavy traffic. – Manuscript.

Thesis for the degree of candidate of physical and mathematical sciences, speciality 01.05.04 – systems analysis and theory of optimal decisions. – Kyiv Taras Shevchenko national university, Ministry of education and science of Ukraine, Kyiv, 2013.

The thesis is devoted to the perspective direction of the theory of stochastic networks associated with the study of multidimensional service processes in the Markov and non-Markov multi-channel networks with variable rate of input flow by asymptotic methods.

Markov multi-channel networks are considered with a condition that the rate of the external load varies periodically with time. A service process in these models is studied in transient regime, conditions of quasiergodic distribution existence are found and a generating function of this distribution is presented in an explicit form. Conditions in which the networks operates in heavy traffic are formulated. For the service process in heavy traffic an approximate Gaussian process is constructed and a functional limit theorem is proved.

Using the method of Gaussian approximation asymptotic analysis of generalized Markov models of networks is realized in the case when the condition of periodically varying rate is replaced by convergence of input parameters in the uniform topology. For multidimensional Gaussian processes a test of Markov property is proved. This test is applied to the limit processes and its representation as a multidimensional diffusion is obtained.

For multi-channel networks of the $[\overrightarrow{M}_t | GI | \infty]^r$ -type an approximative non-Markov Gaussian processes with the correlation characteristics written out in an explicit form via the model parameters are constructed. Convergence of the service process in the uniform topology is proved.

Key words: multi-channel stochastic network, quasiergodic distribution, variable rate of external flow, heavy traffic regime, Gaussian and diffusion approximation, analysis and optimization of stochastic networks.