

Федеральное государственное
автономное образовательное учреждение высшего образования
Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)
Физтех-школа прикладной математики и информатики
Кафедра дискретной математики

На правах рукописи



УДК 512.5 + 512.7

Елишев Андрей Михайлович

**Автоморфизмы полиномиальных алгебр,
квантование и гипотеза Концевича**

01.01.06 – Математическая логика, алгебра и теория чисел

Автореферат на диссертацию
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва 2019

Работа выполнена на кафедре дискретной математики Физтех-школы прикладной математики и информатики Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)».

Научный руководитель: Канель-Белов Алексей Яковлевич, доктор физико-математических наук, доцент, федеральный профессор.

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова».

Защита состоится 25 декабря 2019 года в 13:00 на заседании диссертационного совета номер ФПМИ.01.01.06.001, по адресу 141701, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский переулок, д. 9.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте Московского физико-технического института (национального исследовательского университета): <https://mipt.ru/education/post-graduate/soiskateli-fizikomatematicheskienauki.php>

Работа представлена «10» октября 2019 г. в Аттестационную комиссию федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)» для рассмотрения советом по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, доктора наук в соответствии с п. 3.1 ст. 4 Федерального закона «О науке и государственной научно-технической политике».

1 Общая характеристика работы

Актуальность темы

Одной из наиболее известных нерешенных задач в теории многочленов от нескольких переменных является так называемая *гипотеза (или проблема) якобиана*, сформулированная в 1939 году О.-Г. Келлером ¹. Пусть $\mathbb{K}$ - основное поле, и пусть для фиксированного натурального числа n даны n многочленов

$$f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n)$$

от n переменных $x_1, \dots, x_n$. Всякая такая система многочленов определяет однозначным образом *эндоморфизм* алгебры $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, дающийся

$$F \leftrightarrow (F(x_1), \dots, F(x_n)) \equiv (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n)),$$

– иначе говоря, эндоморфизм F $\mathbb{K}$ -алгебры многочленов определяется своим действием на множестве образующих. Пусть $J(F)$ обозначает *Якобиан* (определитель матрицы Якоби) отображения F . Гипотеза, или проблема, якобиана звучит следующим образом.

Гипотеза 1.1 (Проблема якобиана, $J\mathcal{C}_n$). *Пусть характеристика основного поля $\mathbb{K}$ равна нулю. Тогда, если якобиан $J(F)$ эндоморфизма F равен ненулевой постоянной (т.е. принадлежит множеству $\mathbb{K}^\times$), то F является автоморфизмом.*

Элементарным упражнением является проверка утверждения о том, что автоморфизмы алгебры многочленов всегда имеют ненулевой постоянный якобиан. Гипотеза 1.1

¹О.-Н. Keller. Ganze Cremona-Transformationen. Monatshefte Math. Phys., 47 (1): 299–306, 1939.

является таким образом частично обратным утверждением к данному свойству. Также нетрудно видеть, что если полиномиальный эндоморфизм F обратим, то обратный к нему также будет полиномиальным эндоморфизмом.

Гипотеза якобиана тривиальна при $n = 1$. С другой стороны, когда основное поле $\mathbb{K}$ имеет положительную характеристику, гипотеза якобиана, сформулированная в виде Гипотезы 1.1, неверна даже в случае $n = 1$. В самом деле, если $\text{char } \mathbb{K} = p$ и $n = 1$, можно взять $\varphi(x) = x - x^p$; якобиан такого отображения равен единице, но оно необратимо.

Несмотря на кажущуюся простоту формулировки и контекста, проблема якобиана представляет собой один из наиболее трудных открытых вопросов современной алгебраической геометрии. Этот вопрос за время своего существования стал предметом многочисленных исследований и во многом способствовал развитию смежных областей алгебры, геометрии и математической физики, представляющих также самостоятельный интерес.

Литература, посвященная гипотезе якобиана, ее аналогам и смежным вопросам, обширна. Частичные результаты и продвижения были получены С.-С. Вангом, Х. Бассом, Э. Х. Коннеллом, Д. Райтом, Л.М. Дружковским, Л.А. Кэмпбеллом, А. ван ден Эссенем, Ц.-Ц. Мохом и другими. Существенные и нетривиальные вопросы из теории комплексно-аналитических многообразий, связанные с поиском возможных контрпримеров, были разрешены А.Г.

Витушкиным^{2,3} и С.Ю. Орековым^{4 5 6}. Среди исследований вопросов, аналогичных проблеме якобиана в ассоциативной алгебре, стоит отметить работы Дикса⁷ и Дикса и Левина⁸ об аналоге проблемы якобиана для свободных ассоциативных алгебр (см. в связи с этим статью А.А. Золотых и А.А. Михалева⁹), доказательство У.У. Умирбаевым¹⁰ аналога проблемы якобиана для свободной метабелевой алгебры, а также глубокие и крайне нетривиальные работы А.В. Ягжева^{11,12}.

²А. G. Vitushkin. Evaluation of the Jacobian of a rational transformation of C^2 and some applications. *Math. Notes*, 66:2 (1999), 245–249.

³А. G. Vitushkin. On the homology of a ramified covering over C^2 . *Math. Notes*, 64:6 (1998), 726–731.

⁴С. Ю. Ореков. Коммутант фундаментальной группы дополнения плоской алгебраической кривой. *УМН*, 45:1(271) (1990), 183–184.

⁵С. Ю. Ореков. Один пример в связи с гипотезой о якобиане. *Математические заметки*, 47:1 (1990), 127–136.

⁶С. Ю. Ореков. Фундаментальная группа дополнения плоской алгебраической кривой. *Математический сборник*, 137(178):2(10) (1988), 260–270.

⁷W. Dicks. Automorphisms of the free algebra of rank two. Group actions on rings (Brunswick, Maine, 1984), *Contemp. Math.*, 43 (1985), 63–68.

⁸W. Dicks and J. Lewin. Jacobian conjecture for free associative algebras. *Commun. Alg.* 10, No. 12 (1982), 1285–1306.

⁹А. А. Золотых, А. А. Михалёв. Эндоморфизмы свободных ассоциативных алгебр над коммутативными кольцами и их якобианы. *Фундамент. и прикл. матем.*, 1:1 (1995), 177–189.

¹⁰U. U. Umirbaev. On the extension of automorphisms of polynomial rings. *Sibirsk. Mat. Zh.*, 1995, Vol. 36, No. 4, 911–916.

¹¹A.V. Yagzhev. Invertibility of endomorphisms of free associative algebras (in Russian). *Mat. Zametki* 49 (1991), No. 4, 142–147, 160; translation in *Math. Notes* 49 (1991), No. 3–4, 426–430.

¹²A.V. Yagzhev. On endomorphisms of free algebras (in Russian). *Sibirsk. Mat. Zh.* 21 (1980), No. 1, 181–192.

Одной из существенных областей алгебраической геометрии, развитие которой было мотивировано гипотезой якобиана, является теория бесконечномерных алгебраических групп. Основополагающей для данного направления статьей послужила работа И.Р. Шафаревича ¹³. В ней были определены понятия, позволяющие изучать вопросы о некоторых естественных бесконечномерных группах – например, о группе автоморфизмов алгебры многочленов от нескольких переменных – при помощи методов алгебраической геометрии. Шафаревич определяет *бесконечномерные многообразия* как индуктивные пределы направленных систем вида

$$\{X_i, f_{ij}, i, j \in I\}$$

где X_i – алгебраические многообразия (более общо, алгебраические множества) над полем $\mathbb{K}$, а морфизмы f_{ij} (определенные при $i \leq j$) – замкнутые вложения. Индуктивный предел системы топологических пространств несет естественную топологию, в связи с чем возникают вопросы связности и неприводимости, которые были также изучены в основной работе Шафаревича.

Проблема якобиана имеет следующую элементарную связь с Ind-схемами. Поскольку алгебра многочленов $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ может быть снабжена естественной $\mathbb{Z}$ -градуировкой по полной степени $\deg$, можно определить понятие степени эндоморфизма φ , которое, в свою очередь, естественным образом индуцирует фильтрацию по полной степени на множествах эндоморфизмов и автоморфизмов алгебры (соответствующие множества в фильтрации обозначаются через $\text{End}^{\leq N}$ и $\text{Aut}^{\leq N}$).

Теперь пусть $\mathfrak{J}^{\leq N}$ обозначает подмножество, точками которого являются эндоморфизмы степени не выше N с якобианом, равным ненулевой постоянной. Тогда Гипотеза

¹³I. R. Shafarevich. On some infinite-dimensional groups II. Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., 45:1 (1981), 214–226; Math. USSR-Izv., 18:1 (1982), 185–194.

1.1 может быть очевидным образом переформулирована в следующем виде

$$\forall \varphi \in \mathfrak{J}^{\leq N} \Rightarrow \varphi \in \text{Aut } \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n], \quad \forall N, \text{ при } \text{char } \mathbb{K} = 0.$$

С другой стороны, Ж. Диксмье ¹⁴обнаружил связь между проблемой якобиана и следующей гипотезой. Пусть $W_{n,\mathbb{K}}$ обозначает n -ую алгебру Вейля над полем $\mathbb{K}$. Гипотеза Диксмье утверждает:

Гипотеза 1.2 (Гипотеза Диксмье, DC_n). Пусть $\text{char } \mathbb{K} = 0$. Тогда $\text{End } W_{n,\mathbb{K}} = \text{Aut } W_{n,\mathbb{K}}$.

Из гипотезы Диксмье для n переменных следует гипотеза якобиана для n переменных ¹⁵. Значительным продвижением последних лет в изучении Гипотезы 1.1 стало доказательство А.Я. Канелем-Беловым (Беловым) и М.Л. Концевичем ¹⁶ – и независимо от них Й. Цучимото ¹⁷ – следующей теоремы.

Теорема 1.3 (А.Я. Канель-Белов и М.Л. Концевич, Й. Цучимото). Из JC_{2n} следует DC_n .

В частности, из Теоремы 1.3 следует стабильная эквивалентность гипотез якобиана и Диксмье – т.е. эквивалентность гипотез JC_∞ и DC_∞ , где JC_∞ обозначает конъюнкцию соответствующих гипотез для всех конечных n .

В связи с предыдущей теоремой, Концевичем была сформулирована следующая гипотеза.

¹⁴J. Dixmier. Sur les algebres de Weyl. Bull. Soc. Math. France, 96 (1968), 209-242.

¹⁵A. van den Essen. Polynomial automorphisms and the Jacobian conjecture. Progress in Mathematics, 190. Birkhauser Verlag, Basel, 2000.

¹⁶A. Kanel-Belov and M. Kontsevich. The Jacobian Conjecture is stably equivalent to the Dixmier Conjecture, arXiv: math/0512171v2, 2005.

¹⁷Y. Tsuchimoto. Preliminaries on Dixmier conjecture. Mem. Fac. Sci, Kochi Univ. Ser. A Math. 24 (2003), 43-59.

Гипотеза 1.4 (Гипотеза Концевича ¹⁸). Пусть $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ – поле комплексных чисел. Группа автоморфизмов $\text{Aut } W_{n,\mathbb{C}}$ n -ой алгебры Вейля над $\mathbb{C}$ изоморфна группе автоморфизмов $\text{Aut } P_{n,\mathbb{C}}$ так называемой n -ой (коммутативной) алгебры Пуассона $P_{n,\mathbb{C}}$:

$$\text{Aut } W_{n,\mathbb{C}} \simeq \text{Aut } P_{n,\mathbb{C}}$$

Из классических работ Г.В.Э. Юнга, В. Ван дер Калка, Ж. Диксмье и Л.Г. Макара-Лиманова следует справедливость гипотезы Концевича при $n = 1$. Недавно ¹⁹ автором диссертации совместно с А.Я. Канелем-Беловым и Дж.-Т. Ю было предложено доказательство общего случая гипотезы Концевича.

Также, К. Додд ²⁰ предложил доказательство нескольких глубоких результатов гомологической природы, приводящих к установлению важного частного случая следующей общей гипотезы.

Гипотеза 1.5. Пусть X – неособое многообразие над некоторым полем. Существует однозначное соответствие между (неприводимыми) голономными $\mathcal{D}(X)$ -модулями и лагранжескими подмногообразиями T^*X соответствующей размерности.

Доказательство гипотезы Концевича, в форме Гипотезы 1.4 или Гипотезы 1.5, подразумевает решение так называемой **проблемы подъема полиномиальных симплектоморфизмов** – до автоморфизмов алгебры Вейля в первом случае или до элементов группы Пикара алгебры Вейля во втором. В первом случае естественной иде-

¹⁸A. Kanel-Belov and M. Kontsevich. Automorphisms of Weyl algebras. Lett. Math. Phys. 74 (2005), 181-199.

¹⁹A. Kanel-Belov, A. Elishev, J.-T. Yu. Augmented Polynomial Symplectomorphisms and Quantization arXiv:1812.02859.

²⁰C. Dodd. The p-Cycle of Holonomic D-modules and Auto-Equivalences of the Weyl Algebra, arXiv: 1510.05734.

ей является **аппроксимация** (приближение) симплектоморфизмов так называемыми ручными симплектоморфизмами в топологии степенных рядов и квантование (подъем) последовательностей ручных симплектоморфизмов. Во втором – построение голономных $\mathcal{D}$ -модулей по лагранжевым подмногообразиям – графикам симплектоморфизмов. В связи с этим заслуживают внимания вопросы геометрии Ind-схем полиномиальных автоморфизмов и симплектоморфизмов, а также вопросы о голономных модулях и лагранжевых подмногообразиях аффинных пространств; в частности, в диссертации исследуется соответствие между плоскими кривыми и циклическими модулями над первой алгеброй Вейля (над полем положительной характеристики).

Цели и задачи работы

– Исследование геометрических и топологических свойств Ind-многообразий автоморфизмов алгебр многочленов и свободных алгебр; в частности, получение результатов о структуре множества Ind-автоморфизмов многообразий вида Aut .

– Исследования аппроксимации (приближения) автоморфизмов и симплектоморфизмов ручными автоморфизмами и симплектоморфизмами в топологии формальных степенных рядов. Применение аппроксимации к исследованию свойств Ind-схем автоморфизмов.

– Изучение вопросов, связанных с гипотезой Концевича, в частности – с проблемой подъема полиномиальных симплектоморфизмов до автоморфизмов алгебры Вейля. Рассмотрение низкоразмерной разновидности конструкции, предложенной Канелем-Беловым и Концевичем ²¹.

²¹ A. Kanel-Belov and M. Kontsevich. Automorphisms of Weyl algebras. Lett. Math. Phys. 74 (2005), 181-199.

Научная новизна

Все результаты, полученные в работе, являются новыми.

Теоретическая и практическая значимость работы

Диссертационное исследование носит теоретический характер. Результаты исследования могут найти применение в доказательстве гипотезы Концевича, в теории бесконечномерных алгебраических групп, а также в теории деформационного квантования и связанных с ней вопросах математической физики.

Методология и методы исследования

В диссертации используются различные методы алгебры, алгебраической и симплектической геометрии, в частности, элементы теории голономных модулей, лагранжевы подмногообразия, топология формальных степенных рядов и аппроксимация, поведение особенностей кривых в многообразиях. При исследовании Ind-схем используются результаты о регулярных действиях тора (теорема Бялиницкого-Бирулы и ее аналоги), а также технические приемы комбинаторного характера.

Положения, выносимые на защиту

1. Для случая поля характеристики нуль показано, что:
 - а) при $n \geq 3$, любой Ind-автоморфизм Ind-схемы $\text{Aut } \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ является внутренним;
 - б) при $n \geq 3$, любой Ind-автоморфизм Ind-схемы $\text{Aut } \mathbb{K}\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ является полувнутренним;

в) при $n \geq 3$, любой автоморфизм (в теоретико-множественном смысле) Ind-схемы $\text{TAut } \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ является внутренним;

г) при $n \geq 4$, любой автоморфизм (в теоретико-множественном смысле) Ind-схемы $\text{TAut } \mathbb{K}\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ является полувнутренним.

Формулировка программы исследования и идея доказательства принадлежат А.Я. Канелю-Белову, реализация доказательства проведена автором и опубликована в статье ²² в соавторстве с А.Я. Канелем-Беловым и Дж.-Т. Ю.

2. Для случая поля произвольной характеристики показано, что:

а) при $n \geq 3$, любой Ind-автоморфизм Ind-схемы $\text{NAut } \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ является внутренним;

б) при $n \geq 3$, любой Ind-автоморфизм Ind-схемы $\text{NAut } \mathbb{K}\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ является полувнутренним;

в) при $n \geq 3$, любой автоморфизм (в теоретико-множественном смысле) Ind-схемы $\text{TAut } \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ является внутренним;

г) при $n \geq 4$, любой автоморфизм (в теоретико-множественном смысле) Ind-схемы $\text{TAut } \mathbb{K}\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ является полувнутренним.

Тем самым были решены вопросы, поставленные Б.И. Плоткиным и изучавшиеся его школой.

Формулировка программы исследования и идея доказательства принадлежат А.Я. Канелю-Белову, реализация доказательства проведена автором и опубликована в статье ²³.

3. Показано, что группу $\text{Aut } \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ нельзя вложить в

²² A. Kanel-Belov, J.-T. Yu, A. Elishev. On the Augmentation Topology on Automorphism Groups of Affine Spaces and Algebras, arXiv:1207.2045, Int. J. Alg. Comp., <https://doi.org/10.1142/S0218196718400040>.

²³ см. 22

$\text{Aut } \mathbb{K}\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ при помощи естественной абелианизации. Т.е. проблема подъема полиномиальных автоморфизмов имеет отрицательное решение.

Идея доказательства принадлежат А.Я. Канелю-Белову, реализация доказательства проведена автором и опубликована в статье ²⁴.

4. Доказан симплектический аналог теоремы Аника о приближении ручными автоморфизмами. Доказательство проведено автором и опубликовано в статье ²⁵ в соавторстве с А.Я. Канелем-Беловым, С. Григорьевым, Дж.-Т. Ю и В. Чжэнгом.

5. Исследован одномерный аналог конструкции из работы ²⁶ подъема полиномиальных симплектоморфизмов до автоморфизмов алгебры Вейля: обнаружено существование соответствия между плоскими алгебраическими кривыми и голономными модулями над алгеброй W_1 в положительной характеристике; его свойства исследованы и опубликованы в статье ²⁷ в соавторстве с А.Я. Канелем-Беловым. Постановка задачи принадлежит А.Я. Канелю-Белову и М.Л. Концевичу, доказательство проведено автором.

Отметим, что доказательство гипотезы Концевича, предложенное автором совместно с А.Я. Беловым и Дж.-Т. Ю в ²⁸, не выносится на защиту в силу того обстоятельства, что оно в настоящее время проходит стадию рецензирова-

²⁴ см. 22

²⁵ A. Kanel-Belov, S. Grigoriev, A. Elishev, J.-T. Yu and W. Zhang. Lifting of Polynomial Symplectomorphisms and Deformation Quantization, arXiv:1707.06450, Comm. in Algebra, 46:9 (2018), 3926-3938.

²⁶ A. Kanel-Belov and M. Kontsevich. Automorphisms of Weyl algebras. Lett. Math. Phys. 74 (2005), 181-199.

²⁷ A. Kanel-Belov and A. Elishev. On Planar Algebraic Curves and Holonomic $\mathcal{D}$ -modules in Positive Characteristic. J. Algebra Appl. DOI: 10.1142/S0219498816501553, arXiv: 1412.6836.

²⁸ см. 22

ния. Исследование проблемы подъема симплектоморфизмов и доказательство гипотезы Концевича носит характер примыкающей к основным результатам диссертации работы.

Степень достоверности и апробация результатов

Все результаты строго доказаны. Результаты, изложенные в диссертации, в различное время докладывались и обсуждались на

- семинаре Факультета математики Техниона (Израиль) 2015;

- семинаре Отдела алгебры и Отдела алгебраической геометрии МИАН (семинар И.Р. Шафаревича), 2016;

- конференции *Groups, Algebras, and Identities* Израильского Научного Общества, посвященной 90-летию Б.И. Плоткина (Hebrew University и Bar-Ilan University, Израиль), 2016;

- семинаре "*Дифференциальные операторы на сингулярных пространствах, алгебраически интегрируемые системы и квантование*" (МехМат МГУ), 2018 и 2019;

- семинаре "*Алгебро-геометрические методы в интегрируемых системах и квантовой физике*" (МФТИ), 2018 и 2019;

- семинаре "*Группы Ли и теория инвариантов*" (МехМат МГУ), 2018;

- на Межкафедральном семинаре МФТИ по дискретной математике, 2018;

- на 59-ой Научной конференции МФТИ, 2016;

- на Международной научно-практической конференции "*Современная математика и ее приложения*" (Грозный, Чеченская Республика), 2018;

- на конференции "*Ломоносов-2019*" (МГУ), 2019.

Основные результаты диссертации опубликованы в трех статьях ^{29,30,31}, все три статьи опубликованы в международных изданиях, индексируемых в Scopus и Web of Science. Основные результаты диссертации и положения, выносимые на защиту, отражают личный вклад соискателя в работах с соавторами, в частности, в ³² – доказательство соответствия между плоскими полиномиальными симплектоморфизмами и голономными $\mathcal{D}$ -модулями над первой алгеброй Вейля, в работе ³³ – доказательство симплектического аналога теоремы Аника о приближении ручными автоморфизмами.

Публикации

Основные результаты диссертации, а также примыкающие к ним результаты по гипотезе Концевича, опубликованы автором в трех статьях и восьми препринтах, список которых приведен в конце автореферата.

Структура диссертации

Диссертация состоит из оглавления, введения, трех основных глав, заключения и списка цитированной литературы.

²⁹ A. Kanel-Belov, J.-T. Yu, A. Elishev. On the Augmentation Topology on Automorphism Groups of Affine Spaces and Algebras, arXiv:1207.2045, Int. J. Alg. Comp., <https://doi.org/10.1142/S0218196718400040>.

³⁰ A. Kanel-Belov, S. Grigoriev, A. Elishev, J.-T. Yu and W. Zhang. Lifting of Polynomial Symplectomorphisms and Deformation Quantization, arXiv:1707.06450, Comm. in Algebra, 46:9 (2018), 3926-3938.

³¹ A. Kanel-Belov and A. Elishev. On Planar Algebraic Curves and Holonomic $\mathcal{D}$ -modules in Positive Characteristic. J. Algebra Appl. DOI: 10.1142/S0219498816501553, arXiv: 1412.6836.

³² см. 31

³³ см. 30

ры. Общий объем диссертации равен 96 страницам, список литературы содержит 115 наименований.

2 Краткое содержание диссертации

Глава 1 составляет Введение диссертации. Она содержит описание актуальности темы, цели исследования, список основных результатов и публикаций автора, а также сведения об апробации работы.

Глава 2 посвящена исследованию геометрии Ind-схем полиномиальных автоморфизмов алгебры многочленов и свободной алгебры. В ней проводится доказательство Основных результатов 1, 2 и 3, сформулированных выше. В частности, в ней доказаны следующие теоремы, сформулированные над произвольным полем.

Теорема 2.1 (Теорема 2.1.35 в основном тексте). *Всякий Ind-автоморфизм φ Ind-схемы*

$$\mathrm{NAut}(K[x_1, \dots, x_n])$$

(так называемых хороших автоморфизмов) состоящей из всех автоморфизмов, допускающих аппроксимацию ручными автоморфизмами, является внутренним при $n \geq 3$.

Теорема 2.2 (Теорема 2.1.36 в основном тексте). *Всякий Ind-автоморфизм φ Ind-схемы*

$$\mathrm{NAut}(K\langle x_1, \dots, x_n \rangle)$$

является полувнутренним при $n \geq 3$.

Также в данной главе доказана следующая теорема, дающая отрицательный ответ на проблему подъема группы полиномиальных автоморфизмов до автоморфизмов свободной алгебры.

Теорема 2.3 (Теорема 2.1.37 в основном тексте). Пусть K – произвольное поле, $G = \text{Aut}_0(K[x_1, \dots, x_n])$ есть группа автоморфизмов алгебры многочленов, сохраняющих начало координат, и $n > 2$. Тогда G не может быть изоморфна никакой подгруппе H группы $\text{Aut}(K\langle x_1, \dots, x_n \rangle)$ при помощи естественной абелианизации.

Структурно, Глава 2 подразделяется на пять частей. В первой части, служащей введением к главе, приводится обзор основных понятий, истории вопроса и связи с гипотезой Концевича. Вторая, третья и четвертая часть посвящены доказательству основных результатов; последняя часть служит заключением к главе, в ней приводятся некоторые интересные открытые вопросы.

Существенное место в теории, развиваемой в Главе 2, занимает следующее утверждение, имеющее характер **процедуры анализа особенностей кривых** и часто несколько неформально называемое **трюком с особенностями**. Пусть $M \in \text{Aut}_0(K[x_1, \dots, x_n])$ – полиномиальный автоморфизм. Основная лемма трюка с особенностями формулируется следующим образом.

Лемма 2.4 (Лемма 2.2.5 в тексте диссертации). Кривая $A(t)MA(t)^{-1}$ не имеет особенностей в нуле для любой линейной кривой $A(t)$ порядка $\leq N$ (определение порядка дано в тексте диссертации) тогда и только тогда, когда $M \in \hat{H}_N$, где $\hat{H}_N$ обозначает подгруппу автоморфизмов, являющихся гомотетиями по модулю N -ой степени расширяющего идеала.

Этот критерий позволяет делать заключения о близости в топологии степенных рядов точек Ind-схем автоморфизмов и, вместе с аппроксимацией, изучать топологические свойства Ind-морфизмов. Его непосредственный аналог для (деформированных) полиномиальных симплектоморфизмов лежит в основе предложенного А.Я. Канелем-Беловым, автором и Дж.-Т. Ю доказательства гипотезы Концевича. Также аналогичные рассуждения имеют место в последней главе диссертации.

В **Главе 3** изучается теория приближений (аппроксимации) полиномиальных автоморфизмов ручными автоморфизмами, а также ее симплектическая версия. Именно, проводится передоказательство следующего результата, принадлежащего Д. Анику.

Теорема 2.5 (Теорема 3.1.1 в тексте диссертации). Пусть $\varphi = (\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_N))$ – автоморфизм алгебры многочленов $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_N]$ над полем $\mathbb{K}$ характеристики нуль, с якобианом равным 1. Тогда существует последовательность $\{\psi_k\} \subset \text{TAut } \mathbb{K}[x_1, \dots, x_N]$ ручных автоморфизмов, сходящаяся к φ в топологии формальных степенных рядов.

Доказательство этой теоремы, приведенное в диссертации, с некоторыми нетривиальными изменениями, применяется для доказательства **симплектического аналога теоремы Аника**, формулируемого следующим образом.

Теорема 2.6 (Теорема 3.1.2 в тексте диссертации). Пусть $\sigma = (\sigma(x_1), \dots, \sigma(x_n), \sigma(p_1), \dots, \sigma(p_n))$ – симплектоморфизм $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n]$.

Тогда существует последовательность $\{\tau_k\} \subset \text{TAut } P_n(\mathbb{K})$ ручных симплектоморфизмов, сходящаяся к σ в топологии формальных степенных рядов.

Последняя теорема дает естественную идею к решению проблемы подъема полиномиальных симплектоморфизмов и доказательству гипотезы Концевича. В конце главы приводится обсуждение этого вопроса.

Наконец, **Глава 4** посвящена изучению низкоразмерной разновидности соответствия между голономными модулями и лагранжевыми подмногообразиями, являющегося объектом Гипотезы 1.5. Рассмотрение происходит над полем положительной характеристики. Устанавливается следующий результат.

Теорема 2.7 (Предложение 4.5.5 и Теорема 4.5.6 в тексте диссертации). Существует Ind-отображение $\Theta = \{\Theta_d\}$,

где, для $d \in \mathbb{N}$,

$$\Theta_d : \mathcal{F}_d / \mathbf{k}^\times \rightarrow \mathfrak{C}_d$$

есть отображение из множества проективных классов элементов первой алгебры Вейля $W_{1,k}$ в множество плоских алгебраических кривых (определенных с учетом кратности неприводимых компонент). Морфизм Θ сюръективен.

Непосредственным следствием этой теоремы является тот факт, что всякая плоская алгебраическая кривая имеет прообраз – голономный $W_{1,k}$ -модуль (определенный с точностью до проективной эквивалентности). Этот результат теоретически дает возможность изучать проблему подъема в смысле Гипотезы 1.5 в общем случае.

Заключение

В диссертации проведено исследование геометрических свойств Ind-схем автоморфизмов алгебр многочленов и свободных алгебр, развита теория приближения полиномиальных симплектоморфизмов ручными симплектоморфизмами, а также исследовано соответствие, имеющее вид Ind-морфизма, между голономными модулями над первой алгеброй Вейля и плоскими алгебраическими кривыми над полем конечной характеристики.

Благодарности

Автор выражает искреннюю и глубокую благодарность своему научному руководителю профессору А.Я. Канелю-Белову за всестороннюю поддержку, терпение, внимание и интерес к работе и помощь при подготовке диссертации. Также автор глубоко благодарен профессору А.М. Райгородскому, заведующему Лаборатории продвинутой комби-

наторики и сетевых приложений, на базе которой автором было выполнено данное исследование.

Также, за поддержку и за полезные обсуждения результатов, полученных в данной работе, автор глубоко признателен Э. Альхадефу, И.В. Аржанцеву, В.А. Артамонову, Э.Б. Винбергу, А.Э. Гутерману, В.Л. Дольникову, И.Ю. Ждановскому, А.Б. Жеглову, Д. Каждану, Р.Н. Карасеву, И.В. Каржеманову, В.О. Мантурову, А.А. Михалеву, С.Ю. Оревкову, Е.Б. Плоткину, А.Л. Семенову и Г.И. Шарыгину.

Автор также выражает благодарность Российскому Научному Фонду, грант № 17-11-01377 которого поддерживает его научную работу.

Работы автора по теме диссертации

Публикации основных результатов диссертации

[1] A. Kanel-Belov, J.-T. Yu, A. Elishev. On the Augmentation Topology on Automorphism Groups of Affine Spaces and Algebras, arXiv:1207.2045, Int. J. Alg. Comp., <https://doi.org/10.1142/S0218196718400040>.

[2] A. Kanel-Belov, S. Grigoriev, A. Elishev, J.-T. Yu and W. Zhang. Lifting of Polynomial Symplectomorphisms and Deformation Quantization, arXiv:1707.06450, Comm. in Algebra, 46:9 (2018), 3926-3938.

[3] A. Kanel-Belov and A. Elishev. On Planar Algebraic Curves and Holonomic $\mathcal{D}$ -modules in Positive Characteristic. J. Algebra Appl. DOI: 10.1142/S0219498816501553, arXiv:1412.6836.

Работы, примыкающие к основным результатам

[1] A. Kanel-Belov, A. Elishev, J.-T. Yu. Augmented Polynomial Symplectomorphisms and Quantization, arXiv:1812.02859.

- [2] A. Kanel-Belov, A. Elishev and J.-T. Yu. Independence of the B-KK Isomorphism of Infinite Prime, arXiv: 1512.06533.
- [3] A. Kanel-Belov, A. Elishev, J.-T. Yu. Automorphisms of Weyl Algebra and a Conjecture of Kontsevich, arXiv: arXiv:1802.01225.
- [4] A. Elishev, A. Kanel-Belov, F. Razavinia, J.-T. Yu and W. Zhang. Noncommutative Białynicki-Birula Theorem, arXiv: 1808.04903.
- [5] A. Elishev, A. Kanel-Belov, F. Razavinia, J.-T. Yu and W. Zhang. Torus actions on free associative algebras, lifting and Białynicki-Birula type theorems, arXiv: 1901.01385.