Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
"Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)"

На правах рукописи

УДК 519.174.7

Костина Ольга Андреевна

РАСКРАСКИ И РАЗБИЕНИЯ МНОЖЕСТВ НА СФЕРАХ

01.01.09 — дискретная математика и математическая кибернетика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва, 2019

Работа прошла апробацию на кафедре дискретной математики Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)».

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор
Райгородский Андрей Михайлович

Ведущая организация: Хабаровское отделение Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института прикладной математики Дальневосточного отделения Российской академии наук

Защита состоится «24» декабря 2019 г. в 14:00 на заседании диссертационного совета ФПМИ.01.01.09.005 по адресу 141701, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский переулок, д. 9.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте Московского физико-технического института (национального исследовательского университета):

https://mipt.ru/education/post-graduate/soiskateli-fiziko-matematicheskie-nauki.php

Работа представлена «9» октября 2019 г. в Аттестационную комиссию федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)» для рассмотрения советом по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, доктора наук в соответствии с п. 3.1 ст. 4 Федерального закона «О науке и государственной научно-технической политике».

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Диссертация посвящена решению ряда экстремальных задач, лежащих на стыке комбинаторной геометрии и теории графов.

Основные задачи комбинаторной геометрии связаны с изучением комбинаторных свойств геометрических объектов и их взаимных расположений. Истоками данного направления дискретной математики являются работы XIX века, в которых рассматривается возможность разбиения евклидова пространства. Примером одной из наиболее известных проблем, связанных с разбиением множеств на части, служит гипотеза Борсука[1]. Она была сформулирована польским математиком К. Борсуком в 1933 году в следующем виде:

верно ли, что всякое множество $A \subset \mathbb{R}^d$ конечного диаметра можно разбить на части $A_1, \dots, A_{d+1}$ строго меньшего диаметра?

Под диаметром множества $A \subset \mathbb{R}^d$ здесь мы понимаем величину

$$\operatorname{diam} A = \sup_{\mathbf{x},\mathbf{y} \in A} |\mathbf{x} - \mathbf{y}|,$$

где $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ обозначает евклидово расстояние между векторами $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$.

История проблемы Борсука довольно драматична. Все, кто занимался данной проблемой, верили, что ответ на поставленный вопрос положителен. К этому подталкивали и многочисленные продвижения, в частности, справедливость гипотезы Борсука для $d \leqslant 3$[2], а также для некоторых классов множеств в произвольном случае. Тем более неожиданным оказался результат Кана–Калаи[3], опровергнувший гипотезу для $d = 2015$. На самом деле Кан и Калаи показали нечто большее. А именно, для всякого $A \subset \mathbb{R}^d$ введем величину $f(A)$, показывающую, на какое наименьшее количество частей меньшего диаметра может быть разбито множество A:

$$f(A) = \min\{f \colon A = A_1 \cup \ldots \cup A_f, \operatorname{diam} A_i < \operatorname{diam} A\}.$$

Теперь рассмотрим величину $f(d)$, которая говорит о том, на какое минимальное количество частей меньшего диаметра может быть разбито всякое множество

[1] *Borsuk K.* Drei Sätze über die n-dimensionale euklidische Sphäre. // Fundamenta Math. — 1933. — V. 20. — P. 177 - 190

[2] *Perkal J.*, Sur la subdivision des ensembles en parties de diamètre inférieur // Colloq. Math. — 1947. — V. 1. — № 1. — C. 45

[3] *Kahn J., Kalai G.*, A counterexample to Borsuk's conjecture // Bulletin of the American Mathematical Society. — 1993. — V. 29. — № 1. — C. 60–62.

диаметра 1:
$$f(d) = \max_{A \subset \mathbb{R}^d, \operatorname{diam} A = 1} f(A).$$
В таких терминах гипотеза Борсука формулируется совсем просто: $f(d) = d + 1$. Как было сказано выше, Кан и Калаи не только опровергли данную гипотезу, но и показали, что величина $f(d)$ растет субэкспоненциально при $d \to \infty$:
$$f(d) \geqslant (1.203\ldots + o(1))^{\sqrt{d}}.$$

В настоящий момент известно, что гипотеза Борсука неверна при $d \geqslant 64$[4] и, как было указано выше, верна при $d \leqslant 3$ (точная граница, когда гипотеза перестает быть верной, до сих пор не найдена). Что же касается величины $f(d)$ при $d \to \infty$, то зазор между нижней и верхней оценками по-прежнему колоссален[5][6]:
$$(1.2255\ldots + o(1))^{\sqrt{d}} \leqslant f(d) \leqslant (1.224\ldots + o(1))^d.$$

Практически все контрпримеры к гипотезе Борсука строятся на основании множества, лежащего на сфере радиуса, близкого к $1/\sqrt{2}$. Поэтому довольно естественным обобщением гипотезы Борсука будет ее перенесение на сферу S_r^{d-1} произвольного радиуса r в пространстве $\mathbb{R}^d$. Иначе говоря,

верно ли, что всякое множество $A \subset S_r^{d-1}$ конечного диаметра можно разбить на части $A_1, \ldots, A_{d+1}$ строго меньшего диаметра?

По аналогии с величиной $f(d)$ мы можем ввести величину $f_r(d)$:
$$f_r(d) = \max_{A \subset S_r^{d-1}, \operatorname{diam} A = 1} f(A).$$
Впервые данная задача была рассмотрена в работе Купавского и Райгородского[7]. В этой работе было показано, что для сферы гипотеза Борсука также может быть опровергнута, и, более того, порядок роста величины $f_r(d)$ также субэкспоненциальный.

Другая исключительно популярная задача комбинаторной геометрии — проблема Нелсона–Эрдеша–Хадвигера — фактически была сформулирована Нелсоном в 1950 году[8]. Она заключается в отыскании хроматического числа плоскости $\chi(\mathbb{R}^2)$ — минимального количества цветов, в которые можно так покрасить

[4] *Jenrich T., Brouwer A. E.*, A 64-dimensional counterexample to Borsuk's conjecture // The Electronic Journal of Combinatorics. — 2014. — V. 21. — №. 4. — С. 4–29.

[5] *Райгородский А. М.* Об одной оценке в проблеме Борсука // Успехи матем. наук. — 1999. — Т. 54. — № 2. — С. 185–186.

[6] *Schramm O.*, Illuminating sets of constant width // Mathematika. — 1988. — V. 35. — № 2. — С. 180–189.

[7] *Kupavskii A. B., Raigorodskii A. M.*, Counterexamples to Borsuk's conjecture on spheres of small radii // Moscow Journal of Combinatorics and Number Theory. — 2012. —V. 2. — № 4. — С. 27–48.

[8] *Hadwiger H.* Ein Überdeckungssatz für den Euklidischen Raum // Portugaliae Math. — 1944. — V. 4. — P. 140–144.

все точки плоскости, что любые две точки на расстоянии 1 покрашены в разные цвета. Несмотря на то, что данная формулировка будет понятна даже школьнику старших классов, работа над этой проблемой далека от завершения, несмотря на значительные усилия, приложенные специалистами в комбинаторной геометрии и теории графов. Более того, проблема оказалась настолько сложной, что на протяжении шестидесяти с лишним лет здесь не было никаких продвижений, а имевшиеся оценки были довольно тривиальными: $4 \leqslant \chi(\mathbb{R}^2) \leqslant 7$. Первое неравенство обосновывается при помощи явного примера, который называется Мозеровским веретеном и представляет собой *граф единичных расстояний*, то есть граф с вершинами в точках плоскости, которые соединены ребром в том и только том случае, если расстояние между ними равно 1. Верхняя оценка доказывается примером замощения плоскости шестиугольниками с нужным диаметром. Тем более неожиданным стал прорыв в данном направлении: в 2018 году Обри де Грей показал, что хроматическое число плоскости не может быть меньше 5[9]. Конструкция, представленная автором в работе для построения контрпримера к возможной раскраске плоскости в 4 цвета, представляет собой граф на 1567 вершинах, поэтому часть доказательства проверяется при помощи компьютера. Пример де Грея уже удалось упростить, и, возможно, в дальнейшем его получится обобщить для улучшения нижней оценки хроматического числа плоскости.

Понятно, что данная проблема легко обобщается на случай произвольной размерности. Речь идет о хроматическом числе пространства $\chi(\mathbb{R}^n)$, которое определяется ровно так же, как хроматическое число плокости, но вместо точек плоскости рассматриваются точки $\mathbb{R}^n$. И в случае произвольного n зазор становится только больше. Уже для $n = 3$ известно лишь, что $6 \leqslant \chi(\mathbb{R}^3) \leqslant 15$[10][11]. Случаю малых значений n посвящено значительное количество работ [12][13]. Нас, как и в прошлой задаче, будет интересовать скорее асимптотический случай, когда $n \to \infty$. Отметим, что линейная по n оценка практически тривиальна: примером графа единичных расстояний служит n-мерный симплекс. Первое значительное продвижение в случае произвольного n было связано с работой Лармана и Роджерса 1972 года[14], в которой было показано, что хроматическое число пространства растет нелинейно при $n \to \infty$. Однако настоящим прорывом стала работа

[9] *de Grey A. D. N. J.* The chromatic number of the plane is at least 5 // arXiv preprint arXiv:1804.02385. — 2018.
[10] *Nechushtan O.* On the space chromatic number // Discrete mathematics. — 2002. — V. 256., N. 1–2. — C. 499-507.
[11] *Coulson D. A.* 15-colouring of 3-space omitting distance one // Discrete mathematics. — 2002. — V. 256, N. 1-2. — C. 83–90.
[12] *Brass P., Moser W., Pach J.* Research problems in discrete geometry // Berlin: Springer, 2005.
[13] *Райгородский А. М.* Проблема Борсука и хроматические числа метрических пространств // Успехи матем. наук. — 2001. — Т. 56, № 1. — С. 107–146.
[14] *Larman D. G., Rogers C. A.* The realization of distances within sets in Euclidean space // Mathematika. — 1972. — V. 19. — P. 1–24.

Франкла и Уилсона 1981 года[15]. В этой работе в некотором смысле окончательно сформировался линейно-алгебраический метод в комбинаторике. В ней было показано, что хроматическое число пространства растет экспоненциально:

$$\chi(\mathbb{R}^n) \geqslant (1.207\ldots + o(1))^n, \;\; n \to \infty.$$

Наилучшая на настоящий момент нижняя оценка при $n \to \infty$ была получена в работе Райгородского[16] и выглядит следующим образом:

$$\chi(\mathbb{R}^n) \geqslant (1.239\ldots + o(1))^n, n \to \infty.$$

При этом зазор между верхней и нижней оценкой довольно велик, поскольку известно лишь, что[17]

$$\chi(\mathbb{R}^n) \leqslant (3 + o(1))^n, \;\; n \to \infty.$$

За многие годы у проблемы Нелсона–Эрдеша–Хадвигера появилось большое количество обобщений и переформулировок. Во-первых, вместо одного запрета можно рассмотреть набор из нескольких запрещенных расстояний[18][19]. Чуть более сложным вариантом задачи является запрет определенных одноцветных конфигураций, например, одноцветных симплексов или треугольников с определенными параметрами[20]. Во-вторых, данная задача имеет смысл для произвольных метрических пространств, и особенно интересным представляется случай пространства $\mathbb{R}^n$, снабженного различными метриками[21]. Наконец, вместо всего пространства $\mathbb{R}^n$ можно рассматривать точки определенного подмножества $\mathbb{R}^n$. Именно последний вариант обобщения представляет наибольший интерес для нас, и мы сконцентрируемся на случае сферы[22][23].

[15] *Frankl P., Wilson R.* Intersection theorems with geometric consequences // Combinatorica. — 1981. — V. 1. — P. 357–368.

[16] *Райгородский А. М.* Проблема Борсука и хроматические числа метрических пространств // Успехи матем. наук. — 2001. — Т. 56, № 1. — С. 107–146.

[17] *Larman D. G., Rogers C. A.* The realization of distances within sets in Euclidean space // Mathematika. — 1972. — V. 19. — P. 1–24.

[18] *Raigorodskii A. M.* Coloring Distance Graphs and Graphs of Diameters // Thirty Essays on Geometric Graph Theory, J. Pach ed., Springer. — 2013. — P. 429–460.

[19] *Бердников А. В., Райгородский А. М.* О хроматическом числе евклидова пространства с двумя запрещенными расстояниями // Математические заметки. — Т. 96, № 5. — 2014. — С. 790–793.

[20] *Звонарев А. Е., Райгородский А. М., Самиров Д. В., Харламова А. А.* О хроматическом числе пространства с запрещенным равносторонним треугольником // Матем. сборник. — 2014. — Т. 205, № 9. — С. 97–120.

[21] *Berdnikov A. V.* Chromatic number with several forbidden distances in the space with the l_q-metric // Journal of Mathematical Sciences. — 2017. — V. 227, N. 4. — P. 395–401.

[22] *Raigorodskii A. M.* On the chromatic numbers of spheres in $\mathbb{R}^n$ // Combinatorica. — 2012. — Т. 32, № 1. — С. 111–123.

[23] *Купавский А. Б.* О раскрасках сфер, вложенных в $\mathbb{R}^n$ // Матем. сборник. — 2011. — Т. 202, № 6. — С. 83–110.

Задачу об отыскании хроматического числа сферы в пространстве $\mathbb{R}^n$ предложил П. Эрдеш в 1981 году[24]. Данная проблема формулируется следующим образом. Пусть $r \geqslant 1/2$. Рассмотрим $(n-1)$-мерную сферу $S_r^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ радиуса r. Определим $\chi(S_r^{n-1})$ аналогично хроматическому числу пространства как минимальное количество цветов, в которые можно так покрасить точки S_r^{n-1}, чтобы никакая пара точек на расстоянии 1 не имела одинаковый цвет. При $r = 1/2$ задача становится тривиальной: очевидно, что $\chi(S_{1/2}^{n-1}) = 2$. А вот если $r > 1/2$, как оказалось, $\chi(S_r^{n-1}) \to \infty$ при $n \to \infty$. Данный факт был доказан Ловасом в 1983 году[25], который указал линейную по n нижнюю оценку: $\chi(S_r^{n-1}) \geqslant n$. В той же работе была приведена неверная линейная по n оценка сверху. В 2010 году Райгородский установил[26], что на самом деле хроматическое число сферы растет экспоненциально, доказав при помощи линейно-алгебраического метода, что при $1/2 < r < 1/\sqrt{2}$

$$\chi(S_r^{n-1}) \geqslant \left(2\left(\frac{1}{8r^2}\right)^{\frac{1}{8r^2}}\left(1-\frac{1}{8r^2}\right)^{1-\frac{1}{8r^2}} + o(1)\right)^n.$$

Кроме того, при $r \geqslant 1/\sqrt{2}$

$$\chi(S_r^{n-1}) \geqslant \left(2\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{3}{4}} + o(1)\right)^n.$$

Отметим также, что имеются всего лишь две содержательные верхние оценки. Одна из них уже фактически приведена выше, поскольку

$$\chi(S_r^{n-1}) \leqslant \chi(\mathbb{R}^n) \leqslant (3+o(1))^n, \quad n \to \infty.$$

Другая оценка приведена в работе Роджерса[27] и превосходит указаную выше при всех $r < 1.5$:

$$\chi(S_r^{n-1}) \leqslant (2r+o(1))^n, \quad n \to \infty.$$

Экспоненциальный зазор между верхними и нижними оценками мотивирует нас на поиск более точных нижних оценок.

Отдельный интерес представляет поиск хороших оценок хроматических чисел сфер в пространстве $\mathbb{R}^n$ с метрикой l_q. А именно, при $q \in \mathbb{N}$ рассмотрим пространство $\mathbb{R}^n$, снабженное l_q-метрикой, в котором расстояние между произвольными

[24] *Erdos P., Graham R. L.* Problem proposed at the 6th Hungarian combinatorial conference // Eger, July. — 1981.
[25] *Lovàsz L.* Self-dual polytopes and the chromatic number of distance graphs on the sphere // Acta Scientiarum Mathematicarum. — 1983. — Т. 45, № 1-4. — С. 317–323.
[26] *Raigorodskii A. M.* On the chromatic numbers of spheres in $\mathbb{R}^n$ // Combinatorica. — 2012. — Т. 32, № 1. — С. 111–123.
[27] *Rogers C. A.* Covering a sphere with spheres //Mathematika. — 1963. — Т. 10, № 2. — С. 157–164.

векторами $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ и $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ определяется следующим образом:

$$d_q(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Определим теперь $\chi(S_r^{n-1}; l_q)$ хроматическое число $(n-1)$-мерной сферы радиуса r в данном пространстве. Очевидно, при $q = 2$ задача сводится к случаю обычного евклидова пространства, а вот в пространстве с метрикой l_1, например, речь идет об оценке хроматического числа $(n-1)$-мерного ортоплекса. Данная задача обобщает предыдущий вариант проблемы Нелсона–Эрдеша–Хадвигера.

Цель работы и основные задачи

Цель данной диссертации состоит в получении новых нижних оценок хроматических чисел сфер в евклидовом пространстве и в пространстве $\mathbb{R}^n$ с метрикой l_q, а также нижних оценок величин $f_r(d)$, определяемых как минимальное число частей диаметра, меньшего 1, на которые можно разбить всякое подмножество сферы S_r^{d-1} диаметра 1.

Научная новизна

Все результаты диссертации являются новыми.

Теоретическая и практическая значимость работы

Диссертация носит теоретический характер. Полученные в ней результаты важны для комбинаторной геометрии и теории графов.

Методология и методы исследования

В диссертации используются методы комбинаторной геометрии и линейно-алгебраический метод.

Положения диссертации, выносимые на защиту

1. Получены новые нижние оценки хроматических чисел сфер в евклидовом пространстве.

2. Получены новые нижние оценки хроматических чисел сфер в пространстве $\mathbb{R}^n$ с метрикой l_q для произвольного $q \in \mathbb{N}$.

3. Получены новые нижние оценки величин $f_r(d)$, определяемых как минимальное число частей диаметра, меньшего 1, на которые можно разбить всякое подмножество сферы S_r^{d-1} диаметра 1.

Степень достоверности и апробация результатов

Все результаты работы строго доказаны.

По теме диссертации были сделаны доклады на следующих научных семинарах:

— Кафедральный научно-исследовательский семинар кафедры дискретной математики ФИВТ МФТИ под руководством профессора А. М. Райгородского

— Спецсеминар по комбинаторике и теории графов кафедры математической статистики и случайных процессов механико-математического факультета под руководством профессора А. М. Райгородского

— Спецсеминар "Экстремальная комбинаторика и случайные структуры" кафедры теории вероятностей механико-математического факультета под руководством доцента Д. А. Шабанова

— Спецсеминар кафедры теории чисел механико-математического факультета под руководством профессора Н. Г. Мощевитина

— Семинар "Современные проблемы теории чисел" МИАН под руководством профессора С. В. Конягина и профессора И. Д. Шкредова

— Международная конференция "Осенние математические чтения в Адыгее"

Публикации

Результаты диссертации опубликованы в 5 работах, представленных в списке литературы. Все работы опубликованы в журналах из перечня ВАК и RSCI, 2 из них в журналах из списка Scopus. Все основные результаты доказаны соискателем, А. М. Райгородский оказывал помощь в редактировании текста.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы, насчитывающего 54 наименования. Общий объем диссертации составляет 69 страниц.

Основное содержание работы

Во введении излагается история исследований, связанных с гипотезой Борсука. Кроме того, во введении описывается история изучения проблемы о величине хроматического числа пространства $\chi(\mathbb{R}^n)$ и его обобщений, в частности история задачи о хроматических числах сфер.

Первая глава диссертации состоит из 4 разделов и посвящена исследованию хроматических чисел сфер $\chi(S_r^{n-1})$ в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. Рассматривается *асимптотический* случай, то есть ситуация, когда размерность пространства n растет.

В разделе **1.1** приводятся некоторые определения и базовые сведения из теории графов. Формулируется результат, полученный Райгородским и дающий нижнюю экспоненциальную оценку хроoматических чисел сфер в евклидовом пространстве. Также приводится теорема Райгородского–Пономаренко, дающая верхнюю оценку чисел независимости некоторых дистанционных графов и использующая линейно-алгебраический метод.

В разделе **1.2** формулируются полученные новые нижние оценки хроматических чисел сфер. Первая из них основана на оценках чисел независимости дистанционных графов, вершинами которых служат $(0,1)$-векторы.

Теорема 3. *Пусть* $r \in \left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right]$. *Пусть* $c \in \left(0,\ \frac{1}{2}\right]$, $a = [cn]$. *Положим*

$$p_0 = p_0(r, c, n) = \frac{a(n-a)}{2nr^2}.$$

Пусть также $p = p(r, c, n)$ *— минимальное простое число, строго большее, чем* p_0. *Имеют место два случая.*

1. *Если при данных* r, c, n *выполнено* $a - 2p < 0$, *то*
$$\chi(S_r^{n-1}) \geqslant \frac{C_n^a}{\sum\limits_{i=0}^{p-1} C_n^i}.$$

2. *Если же при данных* r, c, n *выполнено* $a - 2p \geqslant 0$, *положим* $d = a - 2p + 1$ *и выберем* t *из системы неравенств*
$$(a-d+1)\left(2 + \frac{d-1}{t+1}\right) \leqslant n < (a-d+1)\left(2 + \frac{d-1}{t}\right).$$

Тогда
$$\chi(S_r^{n-1}) \geqslant \frac{C_n^a C_a^{d+t} C_{n-a}^t}{C_n^{d+2t}\sum\limits_{i=0}^{p-1} C_n^i}.$$

Отметим, что второй пункт доказательства основан на применении теоремы Райгородского–Пономаренко.

Доказательство следующего результата также использует линейно-алгебраический метод, примененный к дистанционным графам с вершинами, заданными в виде $(-1, 0, 1)$-векторов.

Теорема 4. *Пусть* $r > 1/2$. *Пусть* b_1, b_{-1} *таковы, что* $b_1 + b_{-1} \in (0, \frac{1}{2}]$ *и* $b_{-1} < b_1$. *Пусть* $k_1 = [b_1 n]$, $k_{-1} = [b_{-1} n]$. *Положим*
$$p_0 = p_0(r, b_1, b_{-1}, n) = \frac{(k_1 + k_{-1})\, n - (k_1 - k_{-1})^2}{2nr^2}.$$
Пусть $p = p(r, b_1, b_{-1}, n)$ *— минимальное простое число, строго большее, чем* p_0. *Если при данных* r, b_1, b_{-1}, n *выполнено* $k_1 + k_{-1} - 2p < -2k_{-1}$, *то*
$$\chi(S_r^{n-1}) \geqslant \frac{C_n^{k_1} C_{n-k_1}^{k_{-1}}}{\sum\limits_{(m_1,m_2)\in\mathcal{A}} C_n^{m_1} C_{n-m_1}^{m_2}},$$
где
$$\mathcal{A} = \{(m_1, m_2) : m_1, m_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}, m_1 + m_2 \leqslant n, m_1 + 2m_2 \leqslant p - 1\}.$$

Раздел **1.3** посвящен численному сравнению полученных результатов с оценкой Райгородского, а также поиску оптимальных параметров в сформулированных выше теоремах. В данном разделе показывается, что в случае применения $(0, 1)$-векторов оценка Райгородского в некотором смысле является оптимальной, и невозможно добиться улучшения за счет изменения таких параметров, как доля единиц в используемых векторах. Кроме того, в данном разделе демонстрируется, что теорема 4 оказывается в ряде случаев сильнее результата Райгородского.

Наконец, в разделе **1.4** приводится доказательства теорем 3 и 4.

Вторая глава посвящена оценкам хроматических чисел сфер $\chi(S_r^{n-1}; l_q)$ в пространстве $\mathbb{R}^n$ с метрикой l_q. Данная глава состоит из 2 разделов.

В разделе **2.1** формулируются новые нижние оценки исследуемых величин и рассматривается численное сравнение данных оценок. Основная идея доказательства состоит в обобщении линейно-алгебраического метода на случай метрики l_q

и применении его результатов к некоторым дистанционным графам. Первая из представленных теорем касается случая, когда вершинами графа являются векторы с координатами, равными 0 или 1.

Теорема 6. *Пусть* $r > 1/2$, $q \in \mathbb{N}$, $c \in [0,1]$ *и* $k_1 \leqslant n/2$ *— натуральное число. Положим* $k_0 = n - k_1$ *и*

$$p_0 = p_0(r, k_1, n, q, c) = \frac{1}{2r^q}\biggl(k_1\,(1-c)^q + k_0 c^q\biggr).$$

Пусть $p = p(r, q, k_1, n, q, c)$ *— минимальное простое число, строго большее, чем* p_0. *Если при этом* $2p > k_1$, *то*

$$\chi(S_r^{n-1}; l_q) \geqslant \frac{C_n^{k_1}}{\sum\limits_{k=0}^{p-1} C_n^k}.$$

Второй результат основан на использовании $(-1,0,1)$-векторов при построении множества вершин графа.

Теорема 7. *Пусть* $r > 1/2, q \in \mathbb{N}$, $c \in [0,1]$, *а* k_1, k_{-1}, k_0 *— такие целые неотрицательные числа, что* $k_1 + k_{-1} + k_0 = n$. *Положим*

$$p_0 = p_0(r, k_1, k_{-1}, n, q, c) = \frac{1}{2r^q}\biggl(k_1\,(1-c)^q + k_{-1}\,(1+c)^q + k_0 c^q\biggr).$$

Пусть $p = p(r, k_1, k_{-1}, n, q, c)$ *— минимальное простое число, строго большее, чем* p_0. *Если при этом* $2p > 2^q k_{-1} + \min(k_1 - k_{-1}, k_0)$, *то*

$$\chi(S_r^{n-1}; l_q) \geqslant \frac{C_n^{k_1} C_{n-k_1}^{k_{-1}}}{\sum\limits_{k=0}^{p-1} 2^k C_n^k}.$$

Кроме того, в качестве некоторого следствия из полученных результатов приведены оценки хроматических чисел евклидовых сфер (то есть множеств точек, задающихся уравнением $\|\mathbf{x}\| = 1$) в пространстве $\mathbb{R}^n$ с метрикой l_q.

При численном сравнении устанавливается, что обе теоремы, представленные выше, работают по существу. При этом теорема 6 оказывается сильнее при достаточно больших q, в то время как при маленьких значениях q использование $(-1,0,1)$-векторов из теоремы 7 оказывается более оправданным. Что касается случая $q = 2$, то теоремы из главы 1 дают значительно более сильный результат за счет использования евклидовой структуры пространства при доказательстве линейно-алгебраического метода.

В разделе **2.2** приводится доказательства теорем 6 и 7.

Третья глава посвящена контрпримерам к гипотезе Борсука на сфере в евклидовом пространстве и, в частности, оценкам величины $f_r(d)$, определяемой как минимальное число частей диаметра, меньшего 1, на которые можно разбить всякое поднмножество сферы S_r^{d-1} диаметра 1. Данная глава состоит из 5 разделов.

В разделе **3.1** приводятся определения величин $f(d)$ и $f_r(d)$, а также формулируется теорема Купавского–Райгородского, дающая субэкспоненциальную нижнюю оценку величины $f_r(d)$. Обсуждается порядок роста данной оценки и ее численное выражение.

В разделе **3.2** формулируются новые нижние оценки величины $f_r(d)$. В первой из них используются $(-1,1)$-векторы с произвольной долей положительных и отрицательных координат, что обобщает идею доказательства теоремы Купавского–Райгородского.

Теорема 11. *Пусть $r > 1/2$ — радиус сферы. Зададим действительные числа $k'_1 \geqslant k'_{-1}$, удовлетворяющие соотношению $k'_1 + k'_{-1} = 1$, произвольное действительное число α, а также функцию $g'(k) = 1/2 - (k'_1 - k'_{-1})^{2k}/2$ (считая числа k'_1 и k'_{-1} фиксированными, мы опускаем зависимость от этих параметров). Определим натуральное число k из соотношения*

$$k = \min\left\{k' \in \mathbb{N}\colon \frac{(\alpha-1)^2 + 4\alpha g'(k') + 2k'}{8k'} < r^2\right\}.$$

Данное определение является корректным, поскольку $r > 1/2$, а выражение, стоящее в левой части неравенства, стремится к $1/4$ при $k' \to \infty$. Зададим

$$n = \max\{m\colon m \equiv 0 \pmod 4,\ \sum_{i=0}^{2k} C_m^i < d\}$$

Обозначим $k_1 = [k'_1 n],\ k_{-1} = n - k_1$.

Далее, рассмотрим функцию $u(a)$:

$$u(a) = \frac{(\alpha+1)^2 g'(k) + (\alpha-1)^2(1-g'(k)) + 2ka^{2k-1}}{2 + 4ka^{2k-1} + (4k-2)a^{2k}}.$$

Заметим, что данная функция непрерывна на отрезке $[0,1]$, при этом в силу определения параметра k

$$u(1) = \frac{(\alpha-1)^2 + 4\alpha g'(k) + 2k}{8k} < r^2.$$

Заметим, что $u(0) = (\alpha-1)^2 + 4\alpha g'(k)$, *и допустим, что* $u(0) > r^2$. *В таком случае уравнение*

$$u(a) = r^2$$

имеет по меньшей мере одно решение. Обозначим $a_0 \in (0,1)$ *минимальное решение данного уравнения. Наконец, пусть* a *минимальное натуральное число, большее* $a_0 n$, *при котором* $p = \frac{a}{4} + \frac{n}{4}$ *является простым числом. Обозначим* $p' = \frac{a_0}{4} + \frac{1}{4}$.

При $0 \leqslant y \leqslant x \leqslant 1$ *определим выражение* $c_x^y = \frac{x^x}{y^y(x-y)^{x-y}}$ *(здесь при необходимости формально* $0^0 = 1$*). Тогда для любого* $\varepsilon > 0$

$$f_{r+\varepsilon}(d) \geqslant \left(\frac{c_1^{k'_1}}{c_1^{p'}} + o(1)\right)^{\sqrt[2k]{d\cdot(2k)!}}.$$

Идея следующей теоремы заключается в том, чтобы расширить класс векторов, на которых строится доказательство, и использовать $(-1,0,1)$-векторы.

Теорема 12. *Зафиксируем неотрицательные действительные числа* k'_1, k'_{-1}, k'_0, *удовлетворяющие соотношениям* $k'_1 + k'_{-1} + k'_0 = 1$ *и* $k'_1 \geqslant k'_{-1}$. *Пусть*

$$g'_0(k) = 1 - (k'_1 + k'_{-1})^{2k};$$
$$g'_+(k) = \frac{(k'_1 + k'_{-1})^{2k} + (k'_1 - k'_{-1})^{2k}}{2};$$
$$g'_-(k) = \frac{(k'_1 + k'_{-1})^{2k} - (k'_1 - k'_{-1})^{2k}}{2}.$$

Здесь для упрощения записи мы опускаем зависимость функций g'_0, g'_- *и* g'_+ *от параметров* k'_1, k'_{-1} *и* k'_0, *которые предполагаем фиксированными. Пусть* α *— произвольное действительное число. Введем функцию* $u_1(k')$*:*

$$u_1(k') = \frac{(\alpha+1)^2 g'_-(k') + (\alpha-1)^2 g'_+(k') + \alpha^2 g'_0(k') + 2k'(k'_{-1} + k'_1)}{2(k'_1 + k'_{-1})^{2k'} + 4k'(k'_1 + k'_{-1} + 1) - 2}.$$

Определим натуральное число k *из соотношения (корректность данного определения доказана в тексте диссертации)*

$$k = \min\left\{k' \in \mathbb{N}\colon u_1(k') < r^2\right\}.$$

Зададим

$$n = \max\{m \in \mathbb{N}\colon \sum_{i_1 + 2i_2 \leqslant 2k} C_m^{i_1} C_{m-i_1}^{i_2} < d\}$$

и обозначим $k_1 = [k_1' n],\ k_{-1} = [k_{-1}' n],\ k_0 = n - k_1 - k_{-1}$.

Аналогично предыдущей теореме рассмотрим функцию $u(a)$*:*

$$u(a) = \frac{(\alpha+1)^2 g_-'(k) + (\alpha-1)^2 g_+'(k) + \alpha^2 g_0'(k) + 2ka^{2k-1}(k_1' + k_{-1}')}{2(k_1' + k_{-1}')^{2k} + 4ka^{2k-1}(k_1' + k_{-1}') + (4k-2)a^{2k}}.$$

Данная функция непрерывна на отрезке $[0,1]$ *и при этом, согласно определению параметра* k,

$$u(1) = u_1(k) < r^2.$$

Несложно видеть, что

$$u(0) = \frac{(\alpha+1)^2 g_-'(k) + (\alpha-1)^2 g_+'(k) + \alpha^2 g_0'(k)}{2(k_1' + k_{-1}')^{2k}}.$$

Потребуем, чтобы выполнялось неравенство $u(0) > r^2$. *Тогда уравнение* $u(a) = r^2$ *имеет по крайней мере одно решение на интервале* $(0,1)$. *Обозначим* a_0 *минимальное решение данного уравнения и пусть* a *минимальное натуральное число, превосходящее* $[a_0 n]$, *при котором* $p = a + k_1 + k_{-1}$ *является простым числом. Обозначим также* $p' = a_0 + k_1' + k_{-1}'$.

Тогда для любого $\varepsilon > 0$

$$f_{r+\varepsilon}(d) \geqslant \left(\frac{c_1^{k_1'} c_{1-k_1'}^{k_{-1}'}}{\max\limits_{(m_1', m_2') \in \mathcal{B}'} c_1^{m_1'} c_{1-m_1'}^{m_2'}} + o(1) \right)^{\sqrt[2k]{d \cdot (2k)!}},$$

где

$$\mathcal{B}' = \{(m_1, m_2) \colon m_1 + m_2 \leqslant 1,\ m_1 + 2m_2 \leqslant p'\}.$$

Разделы **3.3** и **3.4** посвящены доказательствам теорем 11 и 12.

В разделе **3.5** приводится наглядное численное сравнение полученных результатов. Теорема 11 оказывается всегда сильнее теоремы Купавского–Райгородского за счет более точного подсчета размерности пространства, в котором лежит конструкция, дающая контрпример к гипотезе Борсука. При этом оптимальным является случай равной доли единиц и минус единиц в векторах, из которых состоит данная конструкция. Теорема же 12, использующая $(-1,0,1)$-векторы, дает улучшение лишь вблизи $r = 1/\sqrt{2}$. Более того, доказывается, что данная теорема не может давать содержательную оценку в случае, когда $\sqrt{5/18} < r < 2/3$. Наконец, в этом разделе показывается монотонность функции u, использованной в формулировках теорем 11 и 12, при выполнении одного из двух условий: $\alpha = 0$

или $k'_1 = k'_{-1}$. Это позволяет избавиться от ε в формулировках представленных результатов.

В **заключении** приведены основные результаты диссертации и перспективы дальнейшего развития работы.

Результаты диссертации состоят в следующем:

- Получены новые нижние оценки хроматических чисел сфер в евклидовом пространстве.
- Получены новые нижние оценки хроматических чисел сфер в пространстве $\mathbb{R}^n$ с метрикой l_q для произвольного $q \in \mathbb{N}$.
- Получены новые нижние оценки величин $f_r(d)$.

Наиболее естественным направлением развития изученных задач представляется получение более сильных оценок для линейно-алгебраического метода как в евклидовом случае, так и в случае метрики l_q. Улучшение оценок чисел независимости соответствующих дистанционных графов потенциально позволило бы улучшить оценки хроматических чисел сфер. Что же касается величины $f_r(d)$, то здесь представляется вероятным получить улучшение оценок за счет использования более сложных конструкций в пространствах более низкой размерности.

Благодарности

Автор выражает глубокую признательность своему научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору Райгородскому Андрею Михайловичу за постановку задач и неоценимую поддержку в работе.

Также автор благодарит за ценные советы и замечания профессора Михаэля Рассиаса.

Работы автора по теме диссертации

[1] *Костина О. А., Райгородский А. М.* О нижних оценках хроматического числа сферы // Доклады РАН. — 2015. — Т. 463, № 6. — С. 639–641.

[2] *Костина О. А., Райгородский А. М.* О новых нижних оценках хроматического числа сферы // Труды МФТИ. — 2015. — Т. 7, № 2. — С. 20–26.

[3] *Костина О. А.* О нижних оценках хроматического числа сферы // Математические заметки. — 2019. — Т. 105, № 1. — С. 18–31.

[4] *Костина О. А.* О сферах в пространстве $\mathbb{R}^n$ с метрикой l_q // Труды МФТИ. — 2019. — Т. 11, № 3. — С. 70–81.

[5] *Костина О. А.* О контрпримерах к гипотезе Борсука на сфере // Труды МФТИ. — 2019. — Т. 11, № 4. — С. 3–21.