**Жучок Юлія Володимирівна. Назва дисертаційної роботи: "Відносно вільні тріоїди"**

**Міністерство освіти і науки України**

**Київський національний університет імені Тараса Шевченка**

**На правах рукопису**

**ЖУЧОК ЮЛІЯ ВОЛОДИМИРІВНА**

**УДК 512.579, 512.53**

**ВІДНОСНО ВІЛЬНІ ТРІОЇДИ**

**01.01.06 – алгебра і теорія чисел**

**Дисертація**

**на здобуття наукового ступеня кандидата**

**фізико-математичних наук**

**Науковий керівник –**

**Кириченко Володимир Васильович,**

**доктор фізико-математичних наук,**

**професор**

**Київ – 2016**

**2**

**ЗМІСТ**

**ВСТУП 4**

**РОЗДІЛ 1. МНОЖИНИ З БІНАРНИМИ АСОЦІАТИВНИМИ**

**ОПЕРАЦІЯМИ 26**

**1.1. Дуплекси та n -кратні напівгрупи 26**

**1.2. Інтерасоціативність напівгруп 30**

**1.3. Відносно вільні дімоноїди 35**

**1.4. Триалгебри 41**

**Висновки до розділу 1 48**

**РОЗДІЛ 2. ТРІОЇДИ 49**

**2.1. Декомпозиції вільних тріоїдів 50**

**2.2. Вільні n -нільпотентні тріоїди 68**

**2.3. Вільні прямокутні трисполуки 78**

**Висновки до розділу 2 90**

**РОЗДІЛ 3. ВІЛЬНІ ЛІВІ n -ДІНІЛЬПОТЕНТНІ**

**ДІМОНОЇДИ 92**

**3.1. Зв’язки дімоноїдів з іншими алгебраїчними**

**структурами 93**

**3.2. Будова вільних об’єктів 99**

**3.3. Найменша ліва n -дінільпотентна конгруенція**

**на вільному дімоноїді 112**

**Висновки до розділу 3 117**

**3**

**РОЗДІЛ 4. g -ДІМОНОЇДИ 118**

**4.1. Приклади g -дімоноїдів 119**

**4.2. Вільні g -дімоноїди 126**

**4.3. Вільні n -нільпотентні g -дімоноїди 130**

**4.4. Вільні комутативні g -дімоноїди 135**

**Висновки до розділу 4 139**

**ВИСНОВКИ 141**

**СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ 143**

**4**

**ВСТУП**

**Однією з важливих мов для виразу властивостей алгебраїчних систем є**

**мова тотожностей. Проблематика, пов’язана з вивченням тотожностей,**

**обумовила формування широкого напряму в алгебрі, який називається теорією**

**многовидів. Термін ,,многовид” був введений Ф. Холом у 1949 році. Починаючи**

**з класичної роботи американського математика Г. Біркгофа [1], проводяться**

**інтенсивні дослідження многовидів алгебраїчних систем. У другій половині**

**20 ст. теорія многовидів перетворена в один із центральних напрямів сучасної**

**алгебри. Їй присвячено багато книг та наукових статей (див., наприклад, [2 – 5]).**

**Многовиди відіграють особливу роль в базах даних – вони пов’язані з важливою в теорії програмування ідеєю типу даних [6]. Сьогодні теорія многовидів**

**алгебраїчних систем має багату проблематику, розвивається активно й плідно.**

**Одним із напрямів досліджень теорії многовидів є дослідження вільних**

**систем у многовидах. Многовиди завжди володіють вільними системами, а**

**елементи заданого многовиду можна охарактеризувати як гомоморфні образи**

**вільних систем. Конструкції різних вільних систем можна знайти, наприклад, в**

**книгах [6 – 8]. Важливими прикладами многовидів є такі класи, як клас усіх**

**напівгруп, клас усіх груп, клас усіх кілець, клас усіх решіток, клас усіх алгебр**

**Буля.**

**Іншим змістовним класом алгебраїчних систем є клас тріоїдів. Тріоїдом**

**називається непорожня множина з трьома бінарними асоціативними операціями**

** , та , які задовольняють вісім аксіом:**

**( ) = ( ), x y z x y z     ( 1) T**

**( ) = ( ), x y z x y z     ( 2) T**

**( ) = ( ), x y z x y z     ( 3) T**

**( ) = ( ), x y z x y z     ( 4) T**

**5**

**( ) = ( ), x y z x y z     ( 5) T**

**( ) = ( ), x y z x y z     ( 6) T**

**( ) = ( ), x y z x y z     ( 7) T**

**( ) = ( ). x y z x y z     ( 8) T**

**Теорія тріоїдів бере свій початок з основоположної праці Ж.-Л. Лоде та**

**М. О. Ронко [9] і має широке застосування в теорії триалгебр. Нагадаємо, що**

**триалгебра є лінійним аналогом тріоїда. Поняття триалгебри та тріоїда виникли**

**в контексті алгебраїчної топології під час дослідження планарних дерев.**

**Триалгебри та тріоїди мають зв’язки з алгебрами Хопфа [10], з алгебрами**

**Лейбніца [11] та з операторами Рота–Бакстера [12]. Триалгебри вивчалися в**

**роботах Ж.-С. Новеллі і Ж.-І. Тібона [10, 13], Ж. M. Касаса [14], K. Ібрахімі–**

**Фарда [12]. Першим результатом про тріоїди є опис вільного тріоїда рангу 1 [9].**

**У [15] вивчаються конгруенції на тріоїдах за допомогою методу напівретракцій.**

**Деякі найменші конгруенції на тріоїдах з обмеженнями на операції описано в**

**[16]. Вивчення ендоморфізмів однопороджених вільних тріоїдів здійснено у**

**роботі [17]. Тріоїди є предметом вивчення оглядової статті [18], вони також**

**вивчалися у роботах [19 – 23].**

**Якщо дві конкретні операції триалгебри (тріоїда) збігаються, то**

**отримуємо поняття діалгебри (дімоноїда) [24]. Нагадаємо, що діалгеброю**

**називається векторний простір над полем, наділений двома бінарними**

**білінійними асоціативними операціями  і , які задовольняють аксіоми ( 1) T –**

**( 3) T . Якщо у визначенні діалгебри замість векторного простору над полем**

**взяти множину та опустити білінійність операцій  , , то отримуємо поняття**

**дімоноїда. Поняття діалгебри та дімоноїда були введені Ж.-Л. Лоде під час**

**вивчення феномену періодичності в алгебраїчній K -теорії. Нагадаємо, що будьяка асоціативна алгебра дає алгебру Лі, якщо покласти [ , ] = x y xy yx  .**

**Діалгебри пов’язані з алгебрами Лейбніца аналогічно тому як пов’язані між**

**6**

**собою асоціативні алгебри і алгебри Лі. Вони є універсальними обгортуючими**

**для алгебр Лейбніца та вивчалися в роботах різних математиків. Так, в [25]**

**наведено базис Грьобнера–Ширшова для діалгебр. Многовиди діалгебр**

**вивчалися в [26, 27]. Діалгебрам та їх зв’язкам з потрійними системами**

**присвячено роботу [28]. Першим результатом про дімоноїди є опис Ж.-Л. Лоде**

**вільного дімоноїда [24]. Розвитку теорії дімоноїдних многовидів присвячено**

**роботи [29 – 37]. Декомпозиції дімоноїдів у дісполуки піддімоноїдів та деякі**

**найменші конгруенції на дімоноїдах з обмеженнями на операції**

**охарактеризовано в [29, 31 – 39]. У роботі [40] побудовано вільний добуток**

**дімоноїдів. У [40, 41] досліджено структурні властивості вільних добутків**

**дімоноїдів. Нещодавно в [42] було показано, що будь-який дімоноїд ізоморфно**

**занурюється в деякий дімоноїд, побудований із напівгрупи. Вивченню**

**властивостей дімоноїдів присвячено монографію [43]. Слід відзначити, що якщо**

**операції діалгебри (дімоноїда) збігаються, то вона (він) перетворюється в**

**асоціативну алгебру (напівгрупу). Таким чином, діалгебри (дімоноїди)**

**узагальнюють асоціативні алгебри (напівгрупи).**

**О. П. Пожидаєв [44] і П. С. Колесников [26] розглянули поняття 0-**

**діалгебри, тобто векторного простору над полем, наділеного двома бінарними**

**операціями  і , які задовольняють аксіоми: ( ) = ( ) , x y z x y z    **

**x y z x y z     ( ) = ( ) . Це поняття пов’язано з асоціативними діалгебрами [24]**

**та з алгебрами Рота–Бакстера [44]. Поняття асоціативної 0-діалгебри [44], тобто**

**0-діалгебри з двома бінарними асоціативними операціями  і , є лінійним**

**аналогом поняття узагальненого дімоноїда (або просто g -дімоноїда для**

**стислості), розглянутого в [45]. Для того, щоб отримати g -дімоноїд, необхідно**

**опустити аксіому ( 2) T внутрішньої асоціативності у визначенні дімоноїда. Клас**

**усіх g -дімоноїдів утворює многовид. Вільний g -дімоноїд нещодавно був**

**7**

**побудований в [45]. Зрозуміло, що всі результати, отримані для g -дімоноїдів,**

**можуть бути застосовані до асоціативних 0-діалгебр.**

**Теорія многовидів тріоїдів, дімоноїдів та g -дімоноїдів, з одного боку,**

**може бути розглянута як одна з природних та важливих частин загальної теорії**

**многовидів алгебраїчних систем та, з іншого боку, мова многовидів є потужним**

**засобом вивчення й класифікації тріоїдів, дімоноїдів та g -дімоноїдів.**

**Додатковий інтерес викликає зіставлення окремих питань про тріоїдні,**

**дімоноїдні ( g -дімоноїдні) многовиди з відповідними фактами для таких**

**алгебраїчних систем як напівгрупи.**

**Актуальність теми дисертаційної роботи обумовлена проблемами теорії**

**многовидів тріоїдів, дімоноїдів та g -дімоноїдів, до яких відносяться проблеми**

**класифікації підмноговидів в многовидах тріоїдів, дімоноїдів і g -дімоноїдів та**

**опису вільних об’єктів у заданих многовидах. Разом з тим принциповий інтерес**

**представляють питання дослідження структурних та факторизаційних**

**властивостей побудованих відносно вільних алгебр.**

**Зв’язок роботи з науковими програмами, планами, темами.**

**Дисертаційні дослідження проводилися на кафедрі геометрії, топології і**

**динамічних систем механіко-математичного факультету Київського**

**національного університету імені Тараса Шевченка як частина науководослідної теми „Застосування алгебро-геометричних методів у теоріях груп,**

**напівгруп, кілець, зображень до задач прикладної алгебри та захисту**

**інформації” (номер державної реєстрації 0111U005264) та на кафедрі алгебри та**

**системного аналізу Навчально-наукового інституту фізики, математики та**

**інформаційних технологій Державного закладу «Луганський національний**

**університет імені Тараса Шевченка» в рамках науково-дослідної теми**

**„Напівгрупи та структурні властивості дімоноїдів” (номер державної реєстрації**

**0115U000199).**

**8**

**Мета і задачі дослідження. Метою дослідження є побудова вільних**

**об’єктів в деяких многовидах тріоїдів, дімоноїдів і g -дімоноїдів та вивчення їх**

**структурних і факторизаційних властивостей. Основними задачами при цьому**

**є:**

** класифікація декомпозицій вільних тріоїдів у трисполуки підтріоїдів**

**та характеризація деяких найменших конгруенцій на вільному**

**тріоїді;**

** побудова вільного n -нільпотентного тріоїда, вільної прямокутної**

**трисполуки та дослідження їх структурних і факторизаційних**

**властивостей;**

** характеризація найменшої лівої (правої) n -дінільпотентної**

**конгруенції на вільному дімоноїді;**

** побудова g -дімоноїда, ізоморфного вільному g -дімоноїду,**

**вільного n -нільпотентного g -дімоноїда, вільного комутативного**

**g -дімоноїда, а також характеризація найменшої n -нільпотентної**

**конгруенції на вільному g -дімоноїді;**

** побудова нових класів тріоїдів, дімоноїдів та g -дімоноїдів.**

**Об’єктом дослідження є тріоїди, дімоноїди та g -дімоноїди.**

**Предметом дослідження є структура та властивості тріоїдів, дімоноїдів і**

**g -дімоноїдів.**

**Методи дослідження – загальноалгебраїчні з використанням основних**

**методів теорії напівгруп, теорії дімоноїдів, метод декомпозиції.**

**Наукова новизна одержаних результатів. У дисертації отримано такі**

**нові теоретичні результати:**

**1. Наведено декомпозиції вільних тріоїдів у трисполуки і сполуки**

**підтріоїдів, охарактеризовано найменшу ліву ідемпотентну, найменшу**

**9**

**праву ідемпотентну, найменшу прямокутну, найменшу n -нільпотентну**

**та найменшу трипрямокутну конгруенції на вільному тріоїді.**

**2. Побудовано вільний n -нільпотентний тріоїд та в термінах введеного**

**поняття 0-трисполуки підтріоїдів описано його структуру.**

**3. Побудовано вільну прямокутну трисполуку, описано її структурні**

**властивості та охарактеризовано деякі найменші конгруенції на ній.**

**4. Представлено найменшу ліву (праву) n -дінільпотентну конгруенцію на**

**вільному дімоноїді.**

**5. Побудовано g -дімоноїд, який є ізоморфним вільному g -дімоноїду,**

**вільний n -нільпотентний g -дімоноїд та охарактеризовано найменшу**

**n -нільпотентну конгруенцію на вільному g -дімоноїді.**

**6. Побудовано вільний комутативний g -дімоноїд та наведено численні**

**приклади g -дімоноїдів.**

**7. Наведено нові приклади нільпотентних тріоїдів, прямокутних**

**трисполук та дімоноїдів.**

**Отримані результати доповнюють результат Ж.-Л. Лоде та М. О. Ронко**

**про вільні тріоїди рангу 1, розвивають добре відомі результати теорії напівгруп**

**про будову вільної n -нільпотентної напівгрупи, вільної прямокутної сполуки,**

**вільної комутативної напівгрупи, а також роблять значний внесок у теорію**

**многовидів алгебраїчних систем.**

**Теоретичне та практичне значення одержаних результатів. Усі**

**результати дисертації є новими. Результати роботи мають теоретичне значення**

**як такі, що є внеском у подальший розвиток теорії многовидів триалгебр та**

**тріоїдів, теорії многовидів дімоноїдів та g -дімоноїдів. Вони можуть бути**

**застосовані до вивчення будови різних класів триалгебр, тріоїдів, діалгебр,**

**дімоноїдів, g -дімоноїдів і напівгруп.**

**10**

**Особистий внесок здобувача. Основні результати дисертації, які**

**виносяться на захист, отримані автором особисто. У роботах, опублікованих у**

**співавторстві, особистий внесок здобувача полягає в наступному: у роботі [46] –**

**характеризація найменшої лівої (правої) n -дінільпотентної конгруенції на**

**вільному дімоноїді; у роботі [47] – побудова вільного комутативного g -**

**дімоноїда та отримання нового прикладу g -дімоноїда.**

**Апробація результатів дисертації. Результати дисертації оприлюднено**

**на:**

** Науково-практичній конференції викладачів і студентів кафедри**

**загальної математики Луганського національного університету імені**

**Тараса Шевченка (м. Луганськ, квітень, 2014);**

** Міжнародній конференції «Алгебра и математическая логика: теория**

**и приложения» (м. Казань, Росія, червень, 2014);**

** Міжнародній алгебраїчній конференції, присвяченій 100-річчю**

**Л. А. Калужніна (м. Київ, липень, 2014);**

** Міжнародній конференції «Мальцевские чтения», присвяченій**

**75-річчю Ю. Л. Єршова (м. Новосибірськ, Росія, травень, 2015);**

** XIII Міжнародній конференції «Алгебра, теория чисел и дискретная**

**геометрия: современные проблемы и приложения», присвяченій**

**85-річчю з дня народження професора С. С. Ришкова (м. Тула, Росія,**

**травень, 2015);**

** X Міжнародній алгебраїчній конференції в Україні, присвяченій**

**70-річчю Ю. А. Дрозда (м. Одеса, серпень, 2015);**

** Міжнародній науковій конференції «Дискретная математика, алгебра**

**и их приложения», присвяченій сторіччю з дня народження академіка**

**Д. А. Супруненка (м. Мінськ, Республіка Білорусь, вересень, 2015);**

**11**

** Алгебраїчному семінарі Інституту математики факультету**

**природничих наук Університету Павла Йозефа Шафарика (м. Кошице,**

**Словацька Республіка, березень, 2016);**

** Алгебраїчному семінарі факультету гуманітарних та природничих**

**наук Пряшівського університету в Пряшові (м. Пряшів, Словацька**

**Республіка, березень, 2016);**

** Алгебраїчному семінарі Київського національного університету імені**

**Тараса Шевченка (м. Київ, вересень, 2016);**

** Алгебраїчному семінарі Луганського національного університету імені**

**Тараса Шевченка (м. Старобільськ, 2014 – 2016 рр.).**

**Публікації. Публікацію основних результатів дисертації здійснено у 6**

**статтях у фахових наукових виданнях [46 – 51] (3 статті в наукових виданнях**

**України, з яких 2 входять до міжнародних наукометричних баз даних; 3 статті в**

**іноземних наукових виданнях, з яких 2 входять до міжнародних**

**наукометричних баз даних) та 7 тезах наукових конференцій [52 – 58].**

**Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається зі вступу,**

**чотирьох розділів, висновків та списку використаних джерел. Загальний обсяг**

**дисертації складає 151 сторінку, з яких основний зміст дисертації викладено на**

**142 сторінках, список використаних джерел містить 100 найменувань та займає**

**9 сторінок.**

**У першому розділі ,,Множини з бінарними асоціативними**

**операціями” подається огляд результатів за темою дисертації.**

**У підрозділі 1.1. ,,Дуплекси та n -кратні напівгрупи” містяться**

**визначення дуплексу, n -кратної напівгрупи та n -кратної алгебри асоціативного**

**типу. Побудовано вільний дуплекс за допомогою планарних дерев. Розглянуто**

**кілька дуплексів з додатковими умовами, а також наведено приклад n -кратної**

**12**

**алгебри асоціативного типу. Матеріал цього підрозділу базується на результатах**

**Т. Пірашвілі [59] та М. Корешкова [60].**

**У підрозділі 1.2. ,,Інтерасоціативність напівгруп” визначено поняття**

**інтерасоціативності, сильної інтерасоціативності, P-зв’язаних напівгруп.**

**Охарактеризовано всі інтерасоціативності моногенної напівгрупи та вільної**

**комутативної напівгрупи, вказано необхідні та достатні умови, за якими дві**

**інтерасоціативності моногенної напівгрупи (вільної комутативної напівгрупи) є**

**ізоморфними. Результати цього підрозділу базуються на результатах Б. Гівенса,**

**К. Лінтона, А. Росіна, Л. Дішмана [61], М. Гоулда, К. Лінтона, А. Нельсона [62],**

**О. Б. Горбаткова [63], Є. Хьюіта і Х. Цукермана [64].**

**У підрозділі 1.3. ,,Відносно вільні дімоноїди” введено поняття**

**дімоноїду, розглянуто вільний дімоноїд, введений Ж.-Л. Лоде та побудовано**

**дімоноїд, ізоморфний вільному дімоноїді. Крім того, побудовано вільний**

**комутативний дімоноїд, вільний прямокутний дімоноїд та наведено декілька**

**відносно вільних дімоноїдів з ідемпотентними операціями. Матеріал цього**

**підрозділу базується на результатах, отриманих у роботах Ж.-Л. Лоде [24] та**

**А. В. Жучка [29, 30, 35].**

**У підрозділі 1.4. ,,Триалгебри”, який базується на результатах,**

**отриманих у роботі Ж.-Л. Лоде та М. О. Ронко [9], наведено поняття**

**асоціативної діалгебри, асоціативної триалгебри, асоціативного тріоїду.**

**Побудовано конструкції вільної асоціативної триалгебри та вільного тріоїду**

**ранга 1 і розглянуто приклади асоціативних триалгебр.**

**Другий розділ ,,Тріоїди” присвячено вивченню структурних та**

**факторизаційних властивостей відносно вільних тріоїдів.**

**У підрозділі 2.1. ,,Декомпозиції вільних тріоїдів” розглянуто**

**конструкцію вільного тріоїду та наведено декомпозиції вільних тріоїдів у**

**трисполуки і сполуки підтріоїдів. Введено поняття прямокутної трисполуки та**

**13**

**наведено приклади прямокутних трисполук. Охарактеризовано найменшу**

**прямокутну конгруенцію, найменшу ліву ідемпотентну конгруенцію і**

**найменшу праву ідемпотентну конгруенцію на вільному тріоїді.**

**Нагадаємо, що непорожня множина T , наділена трьома бінарними**

**асоціативними операціями ,  і , які задовольняють аксіоми ( 1) T –( 8) T ,**

**називається тріоїдом. Тріоїд ( , , , ) T    називається ідемпотентним тріоїдом або**

**трисполукою [23], якщо напівгрупи ( , ) T  , ( , ) T  і ( , ) T  є ідемпотентними.**

**Тріоїд ( , , , ) T    називається прямокутною трисполукою, якщо напівгрупи**

**( , ) T  , ( , ) T  і ( , ) T  є прямокутними сполуками.**

**Побудуємо вільний тріоїд.**

**Нехай X – довільна непорожня множина, X x x X = { | }  , Y X X =  і**

**F Y[ ] – вільна напівгрупа на Y . Нехай далі P F Y  [ ] – піднапівгрупа, яка**

**містить слова w з елементами x ( ) x X  , які з’являються в w принаймні один**

**раз. Для кожного w P  через w позначимо слово, отримане з w шляхом заміни**

**всіх літер x ( ) x X  на x . Визначимо операції ,  і  на множині P за**

**правилами:**

**  w u wu w u wu w u wu   = , = , = **

**для всіх w u P ,  . Алгебру ( , , , ) P    позначимо через Frt X( ). Згідно з**

**твердженням п. 2.1.1 Frt X( ) – вільний тріоїд.**

**Якщо 1 2 f T T :  – гомоморфізм тріоїдів, то відповідну конгруенцію на T1**

**будемо позначати через  f**

**.**

**Розглянемо поняття трисполуки підтріоїдів [23].**

**Нехай S – довільний тріоїд, J – деяка трисполука і нехай**

**  : : S J x x   – гомоморфізм. Тоді кожен клас конгруенції **

**є підтріоїдом**

**тріоїда S, а сам тріоїд S є об’єднанням таких тріоїдів S J ,**

**   , що**

**14**

**= = = { | ( , ) } x**

**x x S t S x t          **

**,**

**S S S S S S ,**

**              ,**

**S S S S S      **

**, =         **

**.**

**У цьому випадку говорять, що S розкладається в трисполуку підтріоїдів (або S**

**є трисполукою J підтріоїдів S J ( ) **

**  ). Якщо J – напівгрупа ідемпотентів**

**(сполука), то кажуть, що S є сполукою J підтріоїдів S J ( ) **

**  . Якщо J є**

**комутативною сполукою, то говорять, що S – напіврешітка J підтріоїдів**

**S J ( ) **

**  .**

**Через  позначатимемо множину всіх натуральних чисел.**

**Нехай = {1,2,..., } n**

**I n , n > 1, і нехай { }i i I**

**n**

**X **

**– сім’я довільних непорожніх**

**множин , X i I i n  . Визначимо операції ,  і  на**

**2 k**

**i**

**i I**

**X  **

**, де k  , поклавши**

**1 2 2 1 2 2 1 2 2 1 2 ( , ,..., ) ( , ,..., ) = ( , ,..., , ) k k k k x x x y y y x x x y  **

**,**

**1 2 2 1 2 2 1 2 2 ( , ,..., ) ( , ,..., ) = ( , ,..., ) k k k x x x y y y x y y  ,**

**1 2 2 1 2 2 1 2 1 2 ( , ,..., ) ( , ,..., ) = ( , ,..., , ,..., ) k k k k k x x x y y y x x x y y  **

**для всіх**

**2**

**1 2 2 1 2 2 ( , ,..., ),( , ,..., )**

**k**

**k k i i I**

**x x x y y y X **

** . Згідно з лемою п. 2.1.5 алгебра**

**2**

**( , , , )**

**k**

**i**

**i I**

**X      є прямокутною трисполукою. Тріоїд 4**

**( , , , ) X    позначимо**

**через FRT X( ) .**

**Визначимо операції ,  і  на 3 X за правилами:**

**1 1 1 2 2 2 1 1 1 ( , , ) ( , , ) = ( , , ) a b c a b c a b c  ,**

**1 1 1 2 2 2 1 2 2 ( , , ) ( , , ) = ( , , ) a b c a b c a b c  ,**

**1 1 1 2 2 2 1 1 2 ( , , ,) ( , , ) = ( , , ) a b c a b c a b c **

**для всіх 3**

**1 1 1 2 2 2 ( , , ),( , , ) a b c a b c X  . Згідно з лемою п. 2.1.2 алгебра 3**

**( , , , ) X    є**

**прямокутною трисполукою. Позначатимемо її через Xlz rd ,**

**.**

**Визначимо операції ,  і  на 3 X , поклавши**

**15**

**1 1 1 2 2 2 1 1 2 ( , , ) ( , , ) = ( , , ) a b c a b c a b c  ,**

**1 1 1 2 2 2 2 2 2 ( , , ) ( , , ) = ( , , ) a b c a b c a b c  ,**

**1 1 1 2 2 2 1 2 2 ( , , ,) ( , , ) = ( , , ) a b c a b c a b c **

**для всіх 3**

**1 1 1 2 2 2 ( , , ),( , , ) a b c a b c X  . Згідно з лемою п. 2.1.3 алгебра 3**

**( , , , ) X    є**

**прямокутною трисполукою. Позначимо її через Xrd rz ,**

**.**

**Визначимо операції ,  і  на 2 X за правилами:**

**1 1 2 2 1 1 1 1 2 2 2 2 ( , ) ( , ) = ( , ), ( , ) ( , ) = ( , ) a b a b a b a b a b a b   ,**

**1 1 2 2 1 2 ( , ) ( , ) = ( , ) a b a b a b **

**для всіх 2**

**1 1 2 2 ( , ),( , ) a b a b X  . Згідно з лемою п. 2.1.4 алгебра 2**

**( , , , ) X    є**

**прямокутною трисполукою. Позначатимемо її через ,**

**rb Xlz rz .**

**Нехай   F Y[ ] і w Frt X  ( ). Позначимо першу (відповідно, останню)**

**літеру слова  через (0)  (відповідно,**

**(1)  ). Припустимо, що u – початкове**

**(відповідно, кінцеве) підслово слова w мінімальної довжини таке, що (1) u X **

**(відповідно,**

**(0) u X  ). У цьому випадку (1)**

**u (відповідно, (0)**

**u ) будемо позначати**

**через [0] w (відповідно,**

**[1] w ). Для кожного  F Y[ ] множину всіх літер, що**

**входять в , будемо позначати через c( )  і для кожного w Frt X  ( ) покладемо**

** c w c w ( ) = ( ) **

**.**

**Візьмемо довільну непорожню скінченну підмножину C з X . Нехай**

**( ) C**

**B X – множина всіх скінченних підмножин A з X таких, що C A  , а**

**( ) B X C**

**– напіврешітка, визначена на ( ) C B X за допомогою операції теоретикомножинного об’єднання. Нехай далі i j k s X , , ,  ,**

**M i j k s i j k i j k i j = {( , , , ), ( , , ), [ , , ], [ , ]}**

**і**

** **

**(0) (1) [0] [1]**

**( , , , ) = { ( ) | ( , , , ) = ( , , , )} U w Frt X w w w w i j k s i j k s  ,**

**16**

****

**(0) [0] [1]**

**( , , ) = { ( ) | ( , , ) = ( , , )} U w Frt X w w w i j k i j k  ,**

****

**(1) [0] [1]**

**[ , , ] = { ( ) | ( , , ) = ( , , )} U w Frt X w w w i j k i j k  ,**

**[0] [1]**

**[ , ] = { ( ) | ( , ) = ( , )} U w Frt X w w i j i j  .**

**Для будь-якого l M покладемо \***

**l – множина, що містить всі**

**компоненти l . Розглянемо множину = { | ( ) = }, A U w U c w A l l   де \***

**( )**

**l**

**A B X  і**

**l M .**

**Наступна структурна теорема дає декомпозиції вільного тріоїда Frt X( ) у**

**трисполуки підтріоїдів.**

**Теорема (п. 2.1.6). Нехай Frt X( ) – вільний тріоїд. Мають місце такі**

**твердження:**

**(i) Frt X( ) є трисполукою FRT X( ) підтріоїдів U( , , , ) i j k s , ( , , , ) ( ) i j k s FRT X  .**

**Кожен тріоїд U( , , , ) i j k s , ( , , , ) ( ) i j k s FRT X  , є напіврешіткою \***

**( , , , )**

**( )**

**i j k s**

**B X**

**підтріоїдів ( , , , )**

**A U i j k s , \***

**( , , , )**

**( )**

**i j k s**

**A B X  ;**

**(ii) Frt X( ) є трисполукою Xlz rd , підтріоїдів U( , , ) i j k ,**

**,**

**( , , ) lz rd i j k X  . Кожен**

**тріоїд U( , , ) i j k ,**

**,**

**( , , ) lz rd i j k X  , є напіврешіткою \***

**( , , )**

**( )**

**i j k**

**B X підтріоїдів ( , , )**

**A U i j k ,**

**\***

**( , , )**

**( )**

**i j k**

**A B X  ;**

**(iii) Frt X( ) є трисполукою Xrd rz , підтріоїдів U[ , , ] i j k ,**

**,**

**( , , ) rd rz i j k X  . Кожен**

**тріоїд U[ , , ] i j k ,**

**,**

**( , , ) rd rz i j k X  , є напіврешіткою \***

**[ , , ]**

**( )**

**i j k**

**B X підтріоїдів [ , , ]**

**A U i j k ,**

**\***

**[ , , ]**

**( )**

**i j k**

**A B X  ;**

**(iv) Frt X( ) є трисполукою ,**

**rb Xlz rz підтріоїдів U[ , ] i j ,**

**,**

**( , ) rb**

**lz rz i j X  . Кожен**

**тріоїд U[ , ] i j ,**

**,**

**( , ) rb**

**lz rz i j X  , є напіврешіткою \***

**[ , ]**

**( )**

**i j**

**B X підтріоїдів [ , ]**

**A U i j ,**

**\***

**[ , ]**

**( )**

**i j**

**A B X  .**

**17**

**У пунктах 2.1.7 та 2.1.8 описано інші декомпозиції вільного тріоїда у**

**трисполуки підтріоїдів. Теорема п. 2.1.9 описує декомпозиції вільного тріоїда у**

**сполуки підтріоїдів.**

**Результати підрозділу 2.2. ,,Вільні n -нільпотентні тріоїди” розвивають**

**теорію многовидів тріоїдів. У цьому підрозділі введено поняття n -**

**нільпотентного тріоїда, побудовано вільний n -нільпотентний тріоїд і описано**

**його структуру. Також охарактеризовано найменшу n -нільпотентну**

**конгруенцію на вільному тріоїді і наведено приклади нільпотентних тріоїдів**

**індексу нільпотентності 2 .**

**Елемент 0 тріоїда ( , , , ) T    називається нулем, якщо x x   0 = 0 = 0 для**

**всіх x T  і      { , , }. Тріоїд ( , , , ) T    з нулем називатимемо нільпотентним,**

**якщо для деякого n і будь-яких i**

**x T  , 1 1    i n , і { , , } j**

**     , 1 j n,**

**будь-яка розстановка дужок у 1 1 2 2 1 n n x x x     **

**дає 0T . Найменше серед**

**таких n будемо називати індексом нільпотентності тріоїда ( , , , ) T    . Для**

**k  нільпотентний тріоїд індексу нільпотентності  k будемо називати k -**

**нільпотентним.**

**Клас усіх n -нільпотентних тріоїдів є підмноговидом многовиду тріоїдів.**

**Тріоїд, який є вільним у многовиді n -нільпотентних тріоїдів, називатимемо**

**вільним n -нільпотентним тріоїдом.**

**Нехай A – довільна непорожня множина і нехай  – довільне слово в**

**алфавіті A. Довжину слова  позначимо через l**

**.**

**Нехай n і P P n  – множина, яка містить слова w з довжиною не**

**більше, ніж n (див. п. 2.1.1). Визначимо операції  ,  і  на множині {0} Pn **

**за правилами:**

**  , , , ,**

**= =**

**0, > , 0, > ,**

**wu wu**

**wu wu**

**wu l n wu l n**

**w u w u**

**l n l n**

**           **

** **

**18**

**, ,**

**= 0 = 0 = 0 0 = 0**

**0, > ,**

**wu**

**wu**

**wu l n**

**w u w w**

**l n**

** **

**    **

****

**для всіх , w u P  n**

**і   { , , }   . Алгебру ( {0}, , , ) Pn     позначимо через**

**0**

**( ) P X n**

**.**

**Основним результатом підрозділу 2.2 є наступна теорема.**

**Теорема (п. 2.2.3). 0**

**( ) P X n**

**– вільний n -нільпотентний тріоїд.**

**У п. 2.2.4 введено поняття 0-трисполуки підтріоїдів, яке узагальнює**

**поняття 0-дісполуки піддімоноїдів і поняття 0-сполуки напівгруп. Теореми**

**п. 2.2.4 та пп. 2.2.5, 2.2.6 описують декомпозиції вільного n -нільпотентного**

**тріоїда в 0-сполуки підтріоїдів та, відповідно, в 0-трисполуки підтріоїдів.**

**У підрозділі 2.3. ,,Вільні прямокутні трисполуки” побудовано вільну**

**прямокутну трисполуку, описано її структуру і групу автоморфізмів, а також**

**охарактеризовано найменшу ліву ідемпотентну конгруенцію, найменшу праву**

**ідемпотентну конгруенцію, найменшу прямокутну конгруенцію і найменшу**

**напівструктурну конгруенцію на вільній прямокутній трисполуці. Крім цього,**

**представлено найменшу трипрямокутну конгруенцію на вільному тріоїді.**

**Клас усіх прямокутних трисполук є підмноговидом многовиду тріоїдів.**

**Тріоїд, який є вільним у многовиді прямокутних трисполук, називатимемо**

**вільною прямокутною трисполукою.**

**Основним результатом підрозділу 2.3 є наступна теорема.**

**Теорема (п. 2.3.1). FRT X( ) – вільна прямокутна трисполука.**

**Теореми пп. 2.3.4, 2.3.6, 2.3.7 дають декомпозиції тріоїда FRT X( ) в**

**сполуки підтріоїдів, відповідно, в трисполуки піднапівгруп та в трисполуки**

**підтріоїдів.**

**У третьому розділі ,,Вільні ліві n -дінільпотентні дімоноїди” введено**

**до розгляду ліві (праві) n -дінільпотентні дімоноїди, які є аналогами**

**нільпотентних зліва (справа) напівгруп рангу n , розглянутих Б. М. Шайном**

**19**

**[65]. Розв’язано проблему побудови вільного лівого (правого) n -**

**дінільпотентного дімоноїда та охарактеризовано найменшу ліву (праву) n -**

**дінільпотентну конгруенцію на вільному дімоноїді. Крім того,**

**охарактеризовано групу автоморфізмів вільного лівого (правого) n -**

**дінільпотентного дімоноїда.**

**У підрозділі 3.1. ,,Зв’язки дімоноїдів з іншими алгебраїчними**

**структурами” розглянуто зв’язки між дімоноїдами і рестриктивними**

**бінапівгрупами, між комутативними дімоноїдами і інтерасоціативністю та**

**сильною інтерасоціативністю напівгрупи. Введено поняття лівого (правого) n -**

**дінільпотентного дімоноїда.**

**Нагадаємо, що дімоноїдом називається непорожня множина з двома**

**бінарними асоціативними операціями  і , які задовольняють аксіоми ( 1) T –**

**( 3) T .**

**Через  позначимо сигнатуру дімоноїда, тобто   { , }  . Нехай**

**1**

**, , n**

**x x  – індивідуальні змінні. Через 1**

**( , , ) T x x  n**

**будемо позначати множину**

**термів алгебр сигнатури , які мають вигляд 1 1 1 n n x x **

**   з розстановкою**

**дужок, де 1 1 , ,   n . Дімоноїд ( , , ) D   будемо називати лівим**

**дінільпотентним, якщо для деякого n, будь-якого x D та будь-якого**

**1 1 ( , , ) ( , , )**

**n n**

**t x x T x x    мають місце наступні тотожності:**

**1 1 ( , , ) = ( , , )**

**n n**

**t x x x t x x    ,**

**1 1 ( , , ) = n n**

**t x x x x x      .**

**Найменше серед таких n будемо називати індексом лівої дінільпотентності**

**дімоноїда ( , , ) D   . Для k  лівий дінільпотентний дімоноїд з індексом лівої**

**дінільпотентності  k будемо називати лівим k -дінільпотентним.**

**Двоїстим чином визначається правий k -дінільпотентний дімоноїд.**

**У підрозділі 3.2. ,,Будова вільних об’єктів” побудовано вільний лівий**

**n -дінільпотентний дімоноїд довільного рангу та окремо розглянуто вільні ліві**

ВИСНОВКИ

Уроботіпобудовановільніоб’єктивдеякихмноговидахтріоїдів

дімоноїдівідімоноїдівтавивченоїхструктурнітафакторизаційні

властивості

Наведенодекомпозиціївільнихтріоїдівутрисполукиісполуки

підтріоїдівОхарактеризованонайменшупрямокутнуконгруенціюнайменшу

лівуідемпотентнуконгруенціюінайменшуправуідемпотентнуконгруенціюна

вільномутріоїді

Введенопоняттянільпотентноготріоїдунаведеноприклади

нільпотентнихтріоїдівіндексунільпотентностііпобудовановільний

нільпотентнийтріоїдВведенопоняттятрисполукипідтріоїдівівтермінах

трисполукпідтріоїдівописаноструктурувільнихнільпотентнихтріоїдів

Охарактеризованонайменшунільпотентнуконгруенціюнавільномутріоїді

Введенопоняттяпрямокутноїтрисполукиінаведеноприклади

прямокутнихтрисполукПобудовановільнупрямокутнутрисполукуописаноїї

структуруігрупуавтоморфізмівПредставленодеякінайменшіконгруенціїна

вільнихпрямокутнихтрисполукахзокреманайменшутрипрямокутну

конгруенціюнавільномутріоїді

ВведенолівіправідінільпотентнідімоноїдиДлявказанихмноговидів

побудовановільніоб’єктитаокреморозглянутовільнілівіправі

дінільпотентнідімоноїдирангуВстановленощогрупаавтоморфізмів

вільноголівогоправогодінільпотентногодімоноїдаізоморфнасиметричній

групіОхарактеризованонайменшулівуправудінільпотентнуконгруенцію

навільномудімоноїді

Розглянутодімоноїдиякіємножинамиздвомабінарними

асоціативнимиопераціямищозадовольняютьдвідодатковіаксіомиНаведено

численніприкладидімоноїдівпобудованодімоноїдізоморфнийвільному



дімоноїдудовільногорангуізокремарозглянутовільнідімоноїдирангу

Введенопоняттянільпотентногодімоноїдупобудовановільний

нільпотентнийдімоноїддовільногорангутаокреморозглянутовільні

нільпотентнідімоноїдирангуОхарактеризованонайменшу

нільпотентнуконгруенціюнавільномудімоноїдіВведенопоняття

комутативногодімоноїдапобудовановільнийкомутативнийдімоноїді

представленонайменшукомутативнуконгруенціюнавільномудімоноїді