

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

Оганесян Дмитрий Алексеевич

**СЕМЕЙСТВА ПАР АБЕЛЯ НАД
АЛГЕБРАИЧЕСКИ ЗАМКНУТЫМИ ПОЛЯМИ**

Специальность 01.01.06 – «математическая логика, алгебра и теория
чисел»

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор Георгий Борисович Шабат

Москва – 2017

Работа выполнена на кафедре Высшей алгебры механико-математического факультета ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова».

Научный руководитель:

Шабат Георгий Борисович

доктор физико-математических наук,
профессор.

Официальные оппоненты:

Ландо Сергей Константинович

доктор физико-математических наук,
профессор, Факультет математики
НИУ ВШЭ, профессор.

Медных Александр Дмитриевич

доктор физико-математических наук,
профессор, Институт математики им.
С. Л. Соболева СО РАН, профессор.

Панина Гаянэ Юрьевна

доктор физико-математических наук,
профессор, Санкт-Петербургский ин-
ститут информатики и автоматизации
Российской академии наук, ведущий
научный сотрудник.

Защита диссертации состоится 8 декабря 2017 года в 16 часов 45 минут на заседании диссертационного совета МГУ.01.17 Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова» по адресу: по адресу: 119234, Москва, ГСП-1, Ленинские горы д. 1, ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова», механико-математический факультет, аудитория 14-08.

E-mail: msu.01.17@mail.ru.

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М.В. Ломоносова (Ломоносовский просп. д. 27) и на сайте ИАС «ИСТИНА»: <https://istina.msu.ru/dissertations/81177433/>

Автореферат разослан 8 ноября 2017 года.

Ученый секретарь диссертационного
совета МГУ.01.17 ФГБОУ ВО МГУ,
доктор физико-математических наук,
профессор, член-корр. РАН

Шафаревич А.И.

Общая характеристика работы

Актуальность темы

В 1979 году Г.В. Белый доказал знаменитую теорему¹, утверждающую, что гладкая проективная комплексная кривая $\mathcal{X}$ имеет модель на поле $\overline{\mathbb{Q}}$, тогда и только тогда, когда существует накрытие $\beta : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, разветвленное лишь над тремя точками проективной прямой.

В последствии накрытия проективной кривой, разветвленные не более чем над тремя точками стали называть функциями Белого, а пару из кривой и функции Белого на ней, $(\mathcal{X}, \beta)$, парами Белого.

Теорема Белого произвела впечатление на Александра Гротендика и в 1984 году он ввел понятие *детского рисунка* (*dessin d'enfant*), графа на поверхности, дополнением до которого являются диски. Такой комбинаторный объект оказывается взаимосвязанным с парами Белого. Действительно, рассмотрев прообраз при действии функции Белого отрезка действительных чисел от 0 до 1, мы получим детский рисунок на кривой Белого. Гротендик сформулировал программу исследований, опубликованную в 1997 году².

Выяснилось³, что взаимосвязь между детскими рисунками и кривыми над числовыми полями может быть поднята до эквивалентности категорий, дающей многочисленные нетривиальные связи между различными направлениями математики и теоретической физики, такими как: теория категорий, алгебра, алгебраическая геометрия, комплексный анализ, топология, матричные модели, теория струн, квантовые вычисления.

Начиная со второй половины восьмидесятых годов, раздел алгебры, посвященный изучению детских рисунков Гротендика, кривых над числовыми полями, рациональных функций с необщим числом критических значений, активно развивается.

Редукция пар Белого в поля положительной характеристики актуальный вопрос теории пар Белого и его исследованию посвящены множество публикаций. Отметим такие результаты как теорему Бекмана⁴, утвержда-

¹Г. В. Белый. *О расширениях Галуа максимального кругового поля* // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1979, Т.43. №2, С. 267–276

²Grothendieck A. *Esquisse d'un programme* // London Math.Soc. Lecture Notes Series-Cambridge: Cambridge Univ.Press. – 1997. – Т.243. – С. 3–43

³Г. Б. Шабат. Комбинаторно-топологические методы в теории алгебраических кривых. Москва. 1998. Докторская диссертация.

⁴S. Beckmann, *Ramified primes in the field of moduli of branched coverings of curves* // J. of Algebra. – 1989. – №125. – С. 236–255

ющую, что функция Белого имеет хорошую редукцию по модулю простых чисел, не делящих порядок группы ее монодромии. Теория пар Белого над полями положительной характеристики важна для понимания арифметики пар Белого над $\overline{\mathbb{Q}}$. Действительно, простые плохой редукции связаны с простыми ветвления поля определения пары Белого⁵.

Цели и задачи работы

Целью работы изучение свойств пар Белого с помощью их деформации в пары с большим числом критических значений. Деформация пар Белого, например в семейство накрытий проективной прямой, разветвлённое над четырьмя точками, развивающееся направление теории пар Белого⁶. С помощью таких деформаций предполагалось изучить свойства некоторых конкретных классов пар Белого, прежде всего их редукцию в поля положительной характеристики.

Основные результаты

Основные результаты работы выносятся на защиту:

- Вычисление количества пар Абеля-Белого над алгебраически замкнутым полем любой характеристики и асимптотика их количества (Теорема 22).
- Вычисление количества примитивных пар Абеля-Белого над $\mathbb{C}$ (Теорема 15).
- Комбинаторное описание рисунка на базе семейства пар Абеля рода 1 и степени n , то есть на модулярной кривой $X_1(n)$ (Теорема 18).
- Нахождение необходимых и достаточных условий хорошей редукции дерева диаметра IV по модулю простого числа p . (Теорема 23). Этот результат сильнее полученных ранее А. М. Вашеvником⁷.

⁵S. Wewers, Three point covers with bad reduction // Journal of the American Mathematical Society. – 2003. – Т.16, №4. – С. 991-1032

⁶G. Shabat, *Calculating and drawing Belyi pairs* // Zapiski Nauch. Semin. LOMI. – 2016. – Т. 446 – С. 182–220.

⁷Вашевник А. М. Пары Белого над конечными полями и их редукция: Канд. дис. М., 2006.

Основные методы исследования

В работе используются методы теории детских рисунков Гротендика, алгебраической геометрии, комбинаторики, комбинаторной топологии, теории чисел, теории групп, Паде-аппроксимации и теории функций комплексного переменного.

Теоретическая и практическая ценность

Работа имеет теоретический характер.

Апробация работы

Результаты диссертации докладывались на международных конференциях «Embedded graphs» в Санкт-Петербурге в 2014 году и «Взрослая математика вокруг детских рисунков» в Москве в 2017 году; на семинарах мехмата МГУ, «Графы на поверхностях и кривые над числовыми полями» и «Научно-исследовательский семинар по алгебре», и семинаре матфака ВШЭ «Характеристические классы и теория пересечений».

Публикации автора

Результаты автора по теме диссертации опубликованы в 3 работах, список которых приводится в конце библиографии.

Структура диссертации

Диссертация состоит из введения, семи глав, заключения и списка литературы из 29 наименований, включая 3 работы автора. Диссертация содержит 17 иллюстраций. Общий объем диссертации составляет 107 страниц, включая 103 страницы основного текста.

Краткое содержание работы

Содержание главы 1

Глава 1 является вводной. В ней определяются основные объекты и приводится краткий обзор существующих методов и результатов (известных до работ автора). Приведём здесь некоторые ключевые определения.

Определение 1. *Картой* называется пара (X, Γ) , где X – компактная связная ориентированная поверхность, а Γ – граф на ней, такой, что рёбра Γ являются несамопересекающимися кривыми на X , не имеющими общих точек, отличных от вершин, и каждая из связных компонент дополнения $X \setminus \Gamma$ гомеоморфна открытому диску.

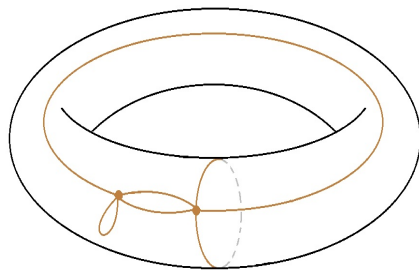


Рис. 1: Пример карты на торе

Определение 2. *Детским рисунком* называется карта с введенной на ее графе двудольной структурой, т.е. вершины рисунка раскрашены в чёрный и белый цвета так, что каждое ребро соединяет вершины разного цвета.

Обозначение 3. Пусть в детском рисунке a_i – валентности чёрных вершин, b_i – валентности белых вершин, c_i – числа белых вершин на границах клеток. Будем записывать эти валентности следующим образом: $(a_1, \dots, a_k | b_1, \dots, b_m | c_1, \dots, c_l)$ и называть такой набор валентностей *паспортом* детского рисунка.

Определение 4. Под пространством Гурвица $\mathcal{HR}_{g,n}$ понимается пространство классов изоморфизмов пар (X, ψ) , где X – алгебраическая кривая и ψ – рациональная функция на ней; такие пары (X_1, ψ_1) и (X_2, ψ_2)

считаются изоморфными, если существует такой изоморфизм $f : X_1 \rightarrow X_2$, что $\psi_2 \circ f = \psi_1$.

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{f} & X_2 \\ & \searrow \psi_1 & \swarrow \psi_2 \\ & \mathbb{P}^1(\mathbb{k}) & \end{array}$$

Определение 5. *Парой Белого* $(\mathcal{X}, \beta)$ называется алгебраическая кривая $\mathcal{X}$ над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{k}$ и непостоянная рациональная функция β (функция Белого), заданная на $\mathcal{X}$, имеющая не более трёх критических значений. Функция Белого называется *чистой*, если все её ветвления над одним из критических значений имеют порядок 2.

Если $\mathcal{X}$ является проективной прямой, а β является многочленом от некоторой координаты на $\mathcal{X}$, то β называется *многочленом Шабата*.

Определение 6. *Парой Фрида* (X, φ) называется алгебраическая кривая X над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{k}$ и непостоянная рациональная функция φ (функция Фрида), заданная на X , имеющая не более четырёх критических значений.

Определение 7. *Семейством Фрида* называется четверка $(\mathfrak{X}, \mathcal{B}, \pi, \Phi)$, где $\mathfrak{X}$ – поверхность, $\mathcal{B}$ – кривая, $\pi : \mathfrak{X} \rightarrow \mathcal{B}$ и $\Phi : \mathfrak{X} \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{k})$ морфизмы, такие, что общий слой π – гладкая полная кривая и ограничение Φ на слой $\pi^{-1}(b)$ – функция Фрида.

$$\begin{array}{ccc} & \mathfrak{X} & \\ \pi \swarrow & & \searrow \Phi \\ \mathcal{B} & & \mathbb{P}^1(\mathbb{k}) \end{array}$$

Содержание главы 2

В главе 2 вводится одно из основных понятий работы, *Пара Абеля*.

Определение 8. *Парой Абеля* называется пара $(\mathcal{X}, \alpha)$, где $\mathcal{X}$ – это полная гладкая алгебраическая кривая над полем $\mathbb{k}$ и α – ненулевая рациональная функция на ней, дивизор которой имеет вид $\text{div}(\alpha) = nA - nB$. Такая функция α называется *функцией Абеля*.

Мотивировкой такого определения является изучение пар одновременно являющихся парами Белого и парами Абеля (в дальнейшем такие

пары мы будем называть *парами Абеля-Белого*) с помощью деформации в «достаточно удобное» подпространство пар Гурвица.

Объясним выбор названия «пара Абеля»: Абелю принадлежит⁸ результат о выразимости в элементарных функциях интеграла вида $\int \frac{\rho dz}{\sqrt{R}}$, где $\rho, R \in \mathbb{C}[z]$. Этот результат можно переформулировать с помощью пар Абеля:

Теорема 9. *Для заданного многочлен $R \in \mathbb{C}[z]$, тогда и только тогда существует многочлен $\rho \in \mathbb{C}[z]$, такой, что интеграл $\int \frac{\rho dz}{\sqrt{R}}$ выражается в элементарных функциях, когда на кривой $\mathcal{X}$, заданной уравнением $y^2 = R(x)$, существует функция Абеля α с нулем и полюсом только в бесконечно удаленных точках кривой $\mathcal{X}$.*

Далее в главе изучаются первые свойства пар Абеля, как использующиеся в дальнейшей работе, так и представляющие самостоятельный интерес.

Мы рассмотрим категорию пар Абеля, определив морфизмы между парами Абеля. Определим понятие *примитивной* пары Абеля, как пары из которой не существует нетривиальных морфизмов. Определим на парах Абеля функцию *Power*, сопоставляющую паре Абеля максимальную степень корня, которую можно извлечь из функции Абеля.

Далее в главе мы рассмотрим уравнения пары Абеля и более частный случай уравнения гиперэллиптической пары Абеля. Отдельно мы рассмотрим случай пары Абеля рода 1:

Теорема 10. *Пусть $(\mathcal{X}, \alpha)$ – пара Абеля рода 1 и степени n , $\text{char } \mathbb{k} \neq 2$. Тогда уравнение $\mathcal{X}$ можно представить в виде $\alpha^2 + \alpha P(x) + x^n = 0$, где $P(0) \neq 0$, $\deg P \leq n/2$, причем для случая чётного n так же требуется $P(x) = \pm 2x^{n/2} + L(x)$, где $\deg P - \deg L$ нечетно.*

Это представление единственно с точностью до замен $P(x) \rightarrow \pm P(x)$ и $x \rightarrow \zeta x$, где ζ корень из 1 n -ой степени.

Сопоставим общей паре Абеля над $\mathbb{C}$ вложенный граф, с помощью которого найдем количество пар Абеля-Белого фиксированной степени.

В заключение мы рассмотрим преобразование Жуковского пар Абеля, с помощью которого построим некоторые Галуа-инварианты на парах Абеля-Белого.

⁸N. H. Abel, *Über die Integration der Differential-Formel $\rho dx/\sqrt{R}$, wenn R und ρ ganze Funktionen sind.* // J. für Math. – 1826 – T.1. – С. 185–221.

Содержание главы 3

В Главе 3 мы сосредоточимся на парах Абеля рода 1. Сначала мы убедимся, что пространство пар Абеля рода 1 состоит из одномерных семейств, базами которых являются модулярные кривые $Y_1(n)$:

Теорема 11. (i) *Пространство модулей пар Абеля рода 1 и степени n имеет $\sigma_0(n) - 1$ компонент, где $\sigma_0(n)$ – количество делителей n . Каждому делителю $d \mid n$, $d < n$, соответствует компонента, состоящая из пар $(\mathcal{X}, \alpha)$ с $\text{Power}(\alpha) = d$.⁹*

(ii) *Кривая $Y_1(n)$ изоморфна пространству параметров примитивных пар Абеля рода 1 и степени n .*

Далее мы изучим компоненту, состоящую из примитивных пар Абеля. Для начала компактифицируем семейство примитивных пар Абеля. Действительно, кривая $Y_1(n)$ имеет проколы и её компактификация – модулярная кривая $X_1(n)$ ¹⁰. Чтобы компактифицировать все семейство примитивных пар Абеля рода 1, мы используем теорему 10, запишем уравнение пар Абеля семейства и продолжим его на проколы $Y_1(n)$.

В результате над проколами добавятся кривые рода 0 и функции на них, полностью описанные в разделе 3.2

Введем теперь на базах семейств примитивных пар Абеля рода один функцию Белого:

Теорема 12. (i) *Общая (лежащая над точкой в некотором открытом по Зарисскому подмножестве базы $X_1(n)$) функция Абеля α на кривой рода 1 имеет два конечных ненулевых критических значения, $\{k_1, k_2\}$, определённых с точностью до умножения на ненулевую константу и перестановки.*

(ii) $\varkappa_n = \frac{2 - \frac{k_1}{k_2} - \frac{k_2}{k_1}}{4} = -\frac{(k_1 - k_2)^2}{4k_1k_2}$ является корректно определенной функцией Белого на $X_1(n)$.

Эта функция будет является одним из основных наших инструментов исследования пар Абеля рода 1. Действительно, ее критические значения

⁹Следует из утверждения 3.2. из D. Chen, I. Coskun, "Extremal effective divisors on the $\mathcal{M}_{1,n}$," Mathematische Annalen 08/2014; 359(3)

¹⁰F. Diamond, J. Shurman, A First Course in Modular Forms, Springer Science & Business Media.

лишь 0, 1 и ∞ , причем среди ее критических точек над 0 лежат лишь слои, содержащие пары Абеля-Белого, а полю соответствуют слоям, в которых падает род.

Далее (раздел 3.4) мы полностью опишем кратности критических точек $\varkappa_n$ (теоремы 3.4.1 и 3.4.2). Окажется, что кратность нуля $\varkappa_n$ зависит от набора валентностей пары Абеля-Белого: в слое над нулями кратности 2 лежат пары Абеля-Белого с набором валентностей $(n|n|2, 2, 1, \dots, 1)$, а в слое над нулем кратности 3 – $(n|n|3, 1, \dots, 1)$.

В разделе 3.5 мы опишем семейства импримитивных пар Абеля рода 1 и степени n . По теореме 11, каждому семейству таких пар соответствует делитель $d \mid n$, и $1 < d < n$, и d это максимальная степень корня, который извлекается из функций семейства. Мы покажем, что база такого семейства $Y_1(n/d)$, а функция Белого на базе такого семейства – $\varkappa_{d|n} = \frac{1-T_d(1-2\varkappa_l)}{2}$, где T_d – многочлен Чебышёва.

В разделе 3.6 мы покажем, как с помощью преобразования Жуковского, семейство пар Абеля рода 1 преобразуется в семейство пар Фрида рода 0.

В завершение главы изложен метод вычисления семейств пар Абеля рода 1 с помощью теории Паде-аппроксимаций.

Пусть эллиптическая кривая $\mathcal{E}$ задана уравнением $y^2 = 1 + ax + bx^2 + cx^3$ и $n \geq 3$ натуральное число. Пусть $\frac{p_n(x)}{q_n(x)}$ является Паде-аппроксимацией в нуле функции $\sqrt{1 + ax + bx^2 + cx^3}$, где $\deg p_n(x) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, $\deg q_n(x) = \lfloor \frac{n-3}{2} \rfloor$.

Утверждение 13. *Обозначим функцию $\varphi_n = p_n(x) - q_n(x)y \in \mathbb{k}(\mathcal{E})$ и за $A \in \mathcal{E}$ точку с координатами $x = 0$, $y = 1$ и за C – бесконечно удаленную точку $\mathcal{E}$. Тогда дивизор $\operatorname{div}(\varphi_n) - (n-1)A + nC$ является эффективным.*

Это утверждение позволяет явно вычислять семейства пар Абеля рода 1. Действительно, коэффициенты многочленов p_n и q_n определяются коэффициентами разложения в ряд Тейлора в нуле $\sqrt{1 + ax + bx^2 + cx^3}$ и легко вычисляются в системах компьютерной алгебры. Условие $A = B$ задается алгебраическим уравнением на коэффициенты p_n и q_n . Таким образом мы получим задание уравнением семейства пар Абеля рода 1 и степени n .

С помощью этого метода получено множество примеров, изложенных в главе 7.

Содержание главы 4

В главе 4 мы перейдем к рассмотрению детских рисунков, соответствующих парам Абеля-Белого рода 1 над $\mathbb{C}$. Мы найдем наборы валентностей таких рисунков.

Утверждение 14. *Набор валентностей торических рисунков, соответствующих парам Абеля-Белого степени n , имеет вид либо $(n|n|3, 1, 1, \dots, 1)$, либо $(n|n|2, 2, 1, \dots, 1)$.*

Причем, рисунки с наборами валентностей $(n|n|3, 1, 1, \dots, 1)$ получаются добавлением висячих белых вершин к рисунку с набором валентностей $(3|3|3)$, а рисунки $(n|n|2, 2, 1, \dots, 1)$ добавлением висячих белых вершин к рисунку с набором валентностей $(4|2, 2|4)$.

Используя это, занумерируем все торические рисунки, соответствующие парам Абеля-Белого: Висячие вершины можно добавить в 3 угла меж-

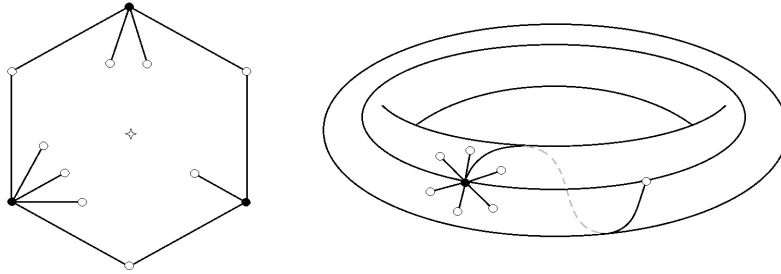


Рис. 2: $\Diamond_{4,2,3}$

ду рёбрами, исходящими из чёрной вершины рисунка $(3|3|3)$. Пусть количество этих рёбер против часовой стрелки $a - 1$, $b - 1$, $c - 1$. Будем обозначать получившийся рисунок $\Diamond_{a,b,c}$. Аналогично для ребра $(4|4|2, 2)$, добавляя $a - 1$, $b - 1$, $c - 1$, $d - 1$ рёбра в четыре угла, получим рисунок, соответствующий паре Белого-Абеля; будем обозначать получившийся рисунок $\square_{a,b,c,d}$.

Занумеровав рассматриваемые детские рисунки, мы получим различные их свойства, прежде всего количество:

Теорема 15. (i) *Количество рисунков типа $\Diamond$ степени n равно $\frac{(n-1)(n-2)}{6}$, а примитивными из них являются*

$$\frac{\varphi(n)\psi(n)}{6} - \frac{\varphi(n)}{2}$$

где $\varphi(n)$ – функция Эйлера и $\psi(n)$ – пси-функция Дедекинда.

- (ii) Количество рисунков типа $\Diamond$ степени n равно $A_{\square}(n) = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$, а примитивными из них являются

$$\frac{(n-6)\varphi(n)\psi(n)}{24} + \frac{\varphi(n)}{2}$$

Кроме того мы найдем автоморфизмы пар Абеля-Белого рода 1 и покажем, что $\text{Power}(\alpha_{\Diamond_{a,b,c}}) = \text{НОД}(a, b, c)$ и $\text{Power}(\alpha_{\square_{a,b,c,d}}) = \text{НОД}(a + b, b + c, c + d)$.

В разделе 4.4 мы рассмотрим преобразование Жуковского применное к парам Абеля-Белого рода 1.

Утверждение 16. Пусть $(\mathcal{E}, \alpha)$ – пара Абеля-Белого рода 1 с $\text{div}(\alpha) = nA - nB$ и i – эллиптическая инволюция, меняющая местами A и B . Рассмотрим пару $(\mathcal{E}, \frac{\alpha+1/\alpha+2}{4})$, её фактор по инволюции i : $(\mathbb{P}^1(\mathbb{K}), \frac{\alpha+1/\alpha+2}{4})$ и соответствующий рисунок.

- (i) Если паре $(\mathcal{E}, \alpha)$ соответствовал рисунок $\Diamond_{a,b,c}$, то результатом преобразования станет плоский граф ”пропеллер” (см. рис 2) с длинами ветвей a, b, c .
- (ii) Если паре $(\mathcal{E}, \alpha)$ соответствовал рисунок $\square_{a,b,c,d}$, то результатом преобразования станет плоский граф ”крест” (см. рис 2) с длинами ветвей a, b, c, d .

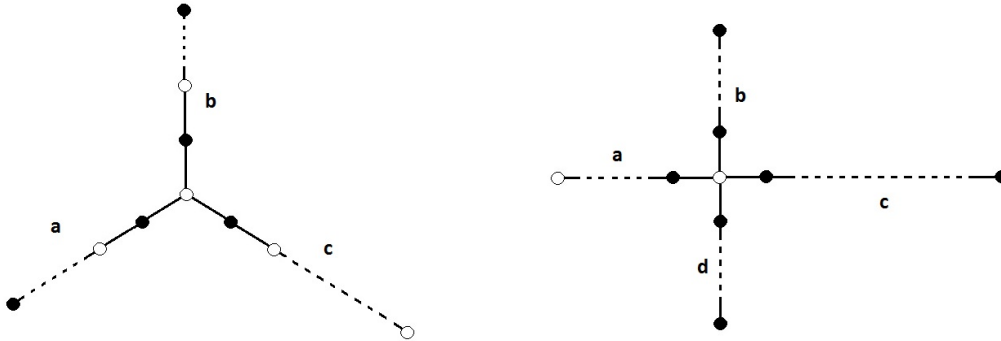


Рис. 3: ”пропеллер” и ”крест”

Следствием предыдущего является результат о Галуа-инвариантах пар Абеля-Белого рода 1:

Следствие 17. (i) Галуа-инвариантами рисунка вида $\Diamond_{a,b,c}$ являются $k = \text{НОД}(a, b, c)$ и количество чётных среди чисел $a/k, b/k, c/k$

(ii) Галуа-инвариантами рисунка вида $\square_{a,b,c,d}$ являются $k_1 = \text{НОД}(a, b, c, d)$, $k_2 = \text{НОД}(a+b, b+c, c+d)$ и количество чётных среди чисел $a/k_1, b/k_1, c/k_1, d/k_1$.

Однако эта система Галуа-инвариантов пар Абеля-Белого рода 1 не является точной, и полное описание орбит Галуа пар Абеля-Белого рода 1 открытый вопрос.

Так же мы опишем, как устроен деский рисунок на $X_1(n)$ соответствующий функции Белого $\varkappa_n$:

Теорема 18. В графе, соответствующем $\varkappa_n$,

(i) При $a, b, c > 1$, $\Diamond_{a,b,c}$ соединён ребром с $\square_{1,a-1,b+1,c-1}$, $\square_{a-1,1,b-1,c+1}$ и $\square_{a+1,b-1,1,c-1}$.

(ii) При $b, c > 1$, $\Diamond_{1,b,c}$ соединён ребром с $\Diamond_{1,b+1,c-1}$, $\Diamond_{1,b-1,c+1}$ и $\square_{2,b-1,1,c-1}$.

(iii) При $c > 1$, $\Diamond_{1,1,c}$ соединён ребром с $\Diamond_{1,2,c-1}$, $\Diamond_{2,1,c-1}$ и особым слоем.

(iv) При $a, b, c, d > 1$, $\square_{a,b,c,d}$ соединён ребрами с $\square_{a-1,b+1,c-1,d+1}$ и $\square_{a+1,b-1,c+1,d-1}$.

(v) При $b, c, d > 1$, $\square_{1,b,c,d}$ соединён ребрами с $\Diamond_{b+1,c-1,d+1}$ и $\square_{2,b-1,c+1,d-1}$.

(vi) При $c, d > 1$, $\square_{1,1,c,d}$ соединён ребрами с $\Diamond_{2,c-1,d+1}$ и $\Diamond_{2,c+1,d-1}$.

(vii) При $b, d > 1$, $\square_{1,b,1,d}$ соединён ребрами с $\square_{2,b-1,2,c-1}$ и особым слоем.

(viii) При $d > 1$, $\square_{1,1,1,d}$ соединён ребрами с $\Diamond_{2,2,c-1}$ и особым слоем.

Содержание главы 5

В главе 5 мы отвлечемся от пар Абеля и рассмотрим другое подпространство пространства Гурвица, а именно функции на сфере, чей дивизор имеет вид $a_1P_1 + a_2P_2 + \dots + a_sP_s - n\infty$.

Мы будем действовать в контексте того же подхода что и с парами Абеля: рассмотрим однопараметрические семейства пар Фрида и функции Белого на их базах.

Такие рациональные функции имеют вид $C(1-A_1x)^{a_1}\dots(1-A_sx)^{a_s}$, где $C, A_i \in \mathbb{K}^\times$. Мы будем рассматривать их с точностью до эквивалентности: $R_1(x) \equiv C_1R_2(C_2x)$, где $C_1, C_2 \in \mathbb{K}^\times$. Таким образом все пространство рассматриваемых функций с точностью до эквивалентности является открытым подмножеством $\mathbb{P}_{s-1}(\mathbb{K})$, дополнение к которому составляют гиперплоскости, задаваемые уравнениями $A_i = 0$ и $A_i = A_j$.

Найдем произведение ненулевых критических значений рациональной функции с помощью теоремы:

Теорема 19. Пусть $P = (1-A_1x)^{a_1}\dots(1-A_sx)^{a_s}$, где $A_i \neq A_j$ при $i \neq j$. Пусть $n = a_1 + \dots + a_s$ и $b_1, \dots, b_t$ – критические точки с ненулевыми критическими значениями и $k_1, \dots, k_t$ их кратности. Тогда

$$\prod_{1 \leq i \leq t} P(b_i)^{k_i-1} = \frac{a_1^{a_1} \cdot a_2^{a_2} \cdot \dots \cdot a_s^{a_s}}{(-n)^n} \cdot \frac{\prod_{1 \leq i, j \leq s} (A_j - A_i)^{a_i}}{A_1^{n-a_1} \cdot A_2^{n-a_2} \cdot \dots \cdot A_s^{n-a_s}}$$

С помощью этой теоремы, мы найдем функцию Белого на базе интересующих нас семейств Фрида рода 0 (теорема 5.4.2).

Нас будут интересовать пары Белого с набором валентностей вида $(s, 1, \dots, 1|a_1, a_2, \dots, a_s|n)$, то есть набор валентностей дерева диаметра 4. Включим их в семейство пар Фрида с набором валентностей $(s-1, 1, \dots, 1|a_1, a_2, \dots, a_s|2, 1, \dots, 1|n)$. Далее мы опишем уравнение этой кривой Фрида и функцию Белого на ее базе:

Теорема 20. (i) Кривая $\mathcal{F}_{a_1, \dots, a_s}$ задаётся системой уравнений:

$$\begin{cases} a_1A_1 + a_2A_2 + \dots + a_sA_s = 0 \\ a_1A_1^2 + a_2A_2^2 + \dots + a_sA_s^2 = 0 \\ \dots \\ a_1A_1^{s-2} + a_2A_2^{s-2} + \dots + a_sA_s^{s-2} = 0 \end{cases}$$

(ii)

$$\varkappa = \frac{a_1^{a_1} \cdot a_2^{a_2} \cdot \dots \cdot a_s^{a_s}}{(-n)^n} \cdot \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq s} (A_j - A_i)^{a_i+a_j}}{A_1^{n-a_1} \cdot A_2^{n-a_2} \cdot \dots \cdot A_s^{n-a_s}}$$

Далее, как и для случая пар Абеля-Белого рода 0 мы опишем критические точки $\varkappa$, и какие слои над ними лежат.

Содержание главы 6

В главе 6 мы рассмотрим конструкции из предыдущих глав над алгебраически замкнутыми полями положительной характеристики.

Определение 21. Простое число называется *простым плохой редукции* для данного набора валентностей, если число пар Белого с таким набором валентностей разное для $\mathbb{C}$ и $\mathbb{F}_p$ ¹¹.

Мы воспользуемся результатами главы 4 о нулях и полюсах функции Белого $\varkappa_n$ на базах семейств пар Абеля рода 1. а именно, мы сравним степень $\varkappa_n$ и количество ее критических точек над $\mathbb{C}$ и $\overline{\mathbb{F}_p}$. Используя подобные рассуждения, мы найдем количество пар Абеля-Белого рода 1 над полем $\overline{\mathbb{F}_p}$.

Для краткости приведем лишь асимптотику этих количеств:

Теорема 22. Пусть $p > 3$ – фиксированное простое число. Тогда для n , не делящихся на p , имеем

- (i) Количество пар Абеля-Белого рода 1 и степени n с набором валентностей $(n|n|3, 1, \dots, 1)$ равно

$$\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2p}\right)n^2 + O(n)$$

.

- (ii) Количество пар Абеля-Белого рода 1 и степени n с набором валентностей $(n|n|2, 2, 1, \dots, 1)$ равно

$$\left(\frac{1}{24} - \frac{1}{12p} + \frac{1}{48p(p+1)}\right)n^3 + O(n^2)$$

.

Подобным методом, используя результаты главы 5, мы получим и теорему о простых плохой редукции деревьев диаметра 4.

Теорема 23. Пусть $p > s$, $p \nmid n$. Тогда редукция набора валентностей $(a_1, \dots, a_s|s, 1, \dots, 1|n)$ хорошая, тогда и только тогда, когда для любого непустого набора индексов $I \subset \{1, \dots, s\}$ выполняется условие $p \nmid \sum_{i \in I} a_i$.

¹¹В. А. Дремов А. М. Вашевник. О парах Белого над произвольными полями
Фундаментальная и прикладная математика. – 2006. – Т.12, №3. – С. 3–8

Содержание главы 7

В главе 7 изложены большое количество примеров. Вычислены семейства примитивных пар Абеля рода 1 всех степеней, для которых род базы этого семейства равен 0, то есть для $n \leq 10$ и $n = 12$. Найдены функции Белого на базах этих семейств, найдены лежащие в них пары Абеля-Белого, орбиты Галуа и нормы j -инвариантов этих пар. Для семейства пар Абеля степени 6 приводится пример редукции в поле характеристики 5. Приводится пример семейства импримитивных пар Абеля для степени 12. Также приведен пример семейства многочленов Золотарёва, содержащего многочлены Шабата с набором валентностей $(a, b, c|3, 1, \dots, 1|n)$.

Приведем семейство пар Абеля рода 1 и степени 5, пусть t параметр на базе семейства и $(\mathcal{X}, \alpha)$ пара Абеля семейства, тогда кривая $\mathcal{X}$ в слое над t задается уравнением:

$$\alpha^2 + (t - (2t + 1)x + (t + 3)x^2)\alpha + x^5 = 0$$

Функция Белого на базе:

$$\varkappa_5 = \frac{4}{5^{10}} \frac{(-1 + 11t + t^2)(t + 8)^2(3t + 4)^3(3t - 1)^3}{t^4}$$

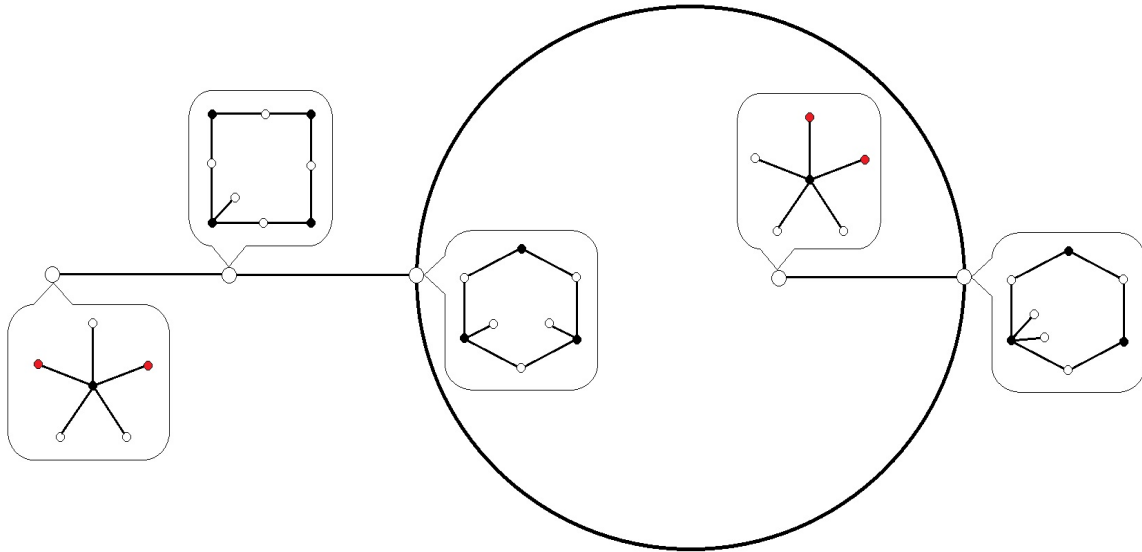


Рис. 4: Рисунок на $X_1(5)$ соответствующий функции $\varkappa_5$

Список пар Белого рода 1 в семействе:

n	Рисунок	t	Поле определения	j	простые плохой редукции
5	$\square_{1,1,3}$	$1/3$	$\mathbb{Q}$	$\frac{2^{12} \cdot 5}{3^5}$	3
5	$\square_{1,2,2}$	$-4/3$	$\mathbb{Q}$	$-\frac{269^3}{2^{10} 3^5}$	2,3
5	$\square_{1,1,1,2}$	-8	$\mathbb{Q}$	$\frac{5 \cdot 211^3}{2^{15}}$	2

Заключение

В этом разделе мы опишем возможные обобщения основных результатов диссертации и пути дальнейшего исследования.

Основные результаты диссертации получены с помощью включения пар Белого в семейства пар с большим числом критических значений. Мы рассматривали только некоторые классы пар Белого, пары Абеля-Белого и деревья диаметра 4. Первый возможный путь продолжения исследований – обобщение результатов на более широкие классы пар Белого.

Другой возможный путь продолжения исследований, применение полученных результатов к изучению арифметики пар Белого, например, нахождение норм j -инвариантов кривых Абеля-Белого рода 1 или дискриминантов их полей определения.

Некоторые подобные результаты автор планирует к публикации в будущем.

Благодарности

Автор выражает признательность за помощь в создании этой работы моему научному руководителю, Георгию Борисовичу Шабату, участникам семинара МГУ, "Графы на поверхностях и кривые над числовыми полями"; Анастасии Аристовой за исправление ошибок по существу и моей маме, Ирине Кимовне Оганесян, за огромный вклад в мое математическое образование.

Публикации автора по теме диссертации

1. Д. Оганесян. *О рациональных функциях с двумя критическими точками максимальной кратности*// Фундамент. и прикл. матем.— 2013. — Т.18 №6.— С. 185–208; Journal of Mathematical Sciences. — 2015. — Т.209 №2. — С. 292—308.
2. D. Oganessian. *Abel Pairs and Modular Curves*// Zapiski Nauch. Semin. LOMI. — 2016. — Т. 446 — С. 165–181.
3. D. Oganessian *Zolotarev polynomials and reduction of Shabat polynomials into a positive characteristic*// Moscow Univ. Math. Bull.— 2016. — Т.71 №248. — С. 47–51.