На правах рукописи

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ИНСТИТУТ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ ИМ. Л.Д. ЛАНДАУ
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

Алешкин Константин Романович

Специальная Кэлерова геометрия и теории Ландау-Гинзбурга

По специальности: 01.04.02 – «Теоретическая физика»

АВТОРЕФЕРАТ
Диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный Руководитель

Белавин Александр Абрамович,

д-р физ.-мат. наук, чл.-кор. РАН

Москва – 2019

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау Российской академии наук.

Научнный руководитель:	**Белавин Александр Абрамович**, доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, ФГБУН Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН, главный научный сотрудник.
Официальные оппоненты:	**Исаев Алексей Петрович**, доктор физико-математических наук, Объединённый институт ядерных исследований, Лаборатория теоретической физики им. Н.Н. Боголюбова, заместитель директора Лаборатории по научной работе.
	Маршаков Андрей Владимирович, доктор физико-математических наук, ФГБУН Физический интитут им. П.Н. Лебедева РАН, ведуший научный сотрудник.
Ведущая организация:	Математический институт им. В.А. Стеклова РАН

Защита диссертации состоится 28 июня 2019 г. в 15 часов 00 минут на заседании диссертационного совета Д.002.207.01 при Институте теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН по адресу: 142432, Московская обл., Ногинский р-н, г. Черноголовка, просп. Академика Семенова, д. 1-А.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН.

Автореферат разослан ____ ___ 2019 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета,
доктор физико-математических наук Гриневич П.Г.

Общая характеристика работы

Данная работа посвящена применению геометрических методов для изучения бэкграундов теории струн. Работа разделена на три главы. Первая содержит краткое введение в теорию струн и переформулировку физических проблем в геометрических терминах. Основная часть работы содержится во второй главе. Она посвящена основному объекту исследования, а именно специальной Кэлеровой геометрии, которая определяет константы связи низкоэнергетической теории струн в бэкграунде компактификации на многообразие Калаби-Яу. В этой главе мы объясняем новый метод вычисления специальной геометрии, использующий связь с суперсимметричными теориями Ландау-Гинзбурга, и применяем его к большому числу струнных бэкграундов. Наконец в третьей части мы изучаем недавний подход к специальной геометрии основанный на связи суперструнных компактификаций с определёнными линейными сигма моделями, вычисления в которых проводятся с использованием суперсимметричной локализации.

Актуальность темы исследования. В теории суперструн сосредоточена значительная часть исследований математической и теоретической физики последних нескольких десятилетий. За это время теория струн позволила пролить свет на множество интегрируемых и суперсимметричных физических теорий в разных размерностях, а также спровоцировала большой скачок в математике.

Специальная геометрия является одним из важных объектов, который позволяет как вычислять корреляционные функции в соответствующих физических теориях, изучать различные дуальности, так и является важной математической характеристикой многообразий Калаби-Яу и входит в предмет исследования зеркальной симметрии.

Цель работы. На протяжении всего развития теории струн существенную роль в ней играют дуальности: T-дуальность, S-дуальность, AdS/CFT соответствие, интегрируемые дуальности, зеркальная симметрия, симплектическая дуальность и другие. Дуальности основаны на том, что одна и та же физическая теория может иметь совершенно различные описания, возможно, в разных режимах. В таком случае можно использовать методы каждого из описаний для исследования теории. Основной целью данной работы является применение дуальности Ландау-Гинзбург – Калаби-Яу для исследования специальной геометрии, возникающей при компактификации теории струн на многообразия Калаби-Яу.

Задачи научно-квалификационной работы. В первой части работы после построения соответствующего формализма мы предложим эффективный метод вычисления специальной Кэлеровой геометрии и применим его в ряде примеров. Затем мы проведём вычисления статистических сумм в специальных линейных сигма моделях и, с помощью зеркальной симметрии, построим соответствие со специальной геометрией многообразий Калаби-Яу изученных в основной части работы.

Научная новизна. Основные результаты диссертации состоят в следующем:

1. Разработан новый эффективный метод вычисления специальной Кэлеровой геометрии на пространстве модулей комплексных структур многообразий Калаби-Яу.

2. Проведено вычисление специальной геометрии в окрестности орбифолдных точек для ряда различных многообразий Калаби-Яу. В случае трёхмерной квинтики в проективном пространстве вычислена специальная геометрия на 101-мерном пространстве модулей. Для гиперповерхностей типа Ферма проведено вычисление для всех полиномиальных деформаций комплексных структур. Для многообразий Калаби-Яу типа Берглунда и Хубша, то есть задаваемых обратимыми особенностями во взвешенных проективных пространствах, найдена формула для метрики специальной геометрии при определённых ограничениях на полиномиальные деформации комплексной структуры.

3. Построены линейные калибровочные сигма модели зеркально двойственные гиперповерхностям Ферма. Явна посчитаны статистические суммы таких теорий на сфере, предъявлено зеркальное отображение, при котором статсумма совпадают с экспонентой Кэлерова потенциала специальной Кэлеровой метрики для соответствующей гиперповерхности Ферма. Таким образом проверена гипотеза о связи статсуммы линейной калибровочной сигма модели и специальной геометрии нелинейной сигма модели.

Научная и практическая значимость. Оригинальное вычисление специальной геометрии проведённое в работе Канделаса с соавторамиповлекло значительный толчок к развитию зеркальной симметрии - соответствию геометрии Кэлеровых и комплексных модулей различных многообразий Калаби-Яу. С тех пор роль специальной геометрии стала понятна во многих областях физики суперструн и математики. В частности, она необходима для описания квазиреалистичных вакуумов теории суперструн, которые претендуют на феноменологию Стандартной Модели.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались автором на семинаре сектора квантовой теории поля ИТФ РАН, семинаре “Интегрируемые структуры в статистических и полевых моделях” в Институте Проблем Передачи Информации. Также отдельные части докладывались на ряде конференций и семинаров. В частности: семинар группы интегрируемых систем в SISSA, Триест; конференция “Categorical and Analytic Invariants in Algebraic Geometry V”, Осака, семинар “Mathstring” IPMU, Токио; аспирантский семинар Caltech, Пасадина; семинар по математической физике в

Высшей Школе Экономики, семинар по математической физике в Сколтехе, конференция “StringMath”, Сендай; семинар “Современные геометрические методы” в МГУ.

Публикации и личный вклад автора. Данный текст отражает результат работы автора совместно с научным руководителем и коллегами. Большая часть представленных результатов опубликована в работах [1—5]

Структура научно-квалификационной работы. Первая глава этой работы является введением. В ней мы формулируем физические вопросы теории струн на геометрическом языке и развиваем необходимый математический формализм. Факты изложенные в этой главе являются переизложением хорошо известных в литературе по теории струн построений. После исторического введения в разделе 1.1 мы, следуя классикам, начинаем описание теории струн с точки зрения конформной теории поля на мировом листе. В частности, мы обсуждаем суперсимметрию в теории струн, ГСО-проекцию, и построение безмассового сектора в плоском бэкграунде. Во второй части главы мы переходим к описанию с точки зрения таргет-пространства и низкоэнергетических эффективных теорий супергравитации. Мы объясняем феномен струнной компактификации, которая интерпретируется как определённый класс суперсимметричных бэкграундов теории, а также объясняем роль многообразий Калаби-Яу в этой конструкции. Дальше, в разделе 1.4 мы приводим свойства многообразий Калаби-Яу, которые оказываются необходимы для изучения струнных компактификаций и показываем, как геометрия этих многообразий определяет физику безмассового сектора теории.

Глава 2 этой работы является основной и содержит бо́льшую часть результатов [1—4]. Она начинается с описания основного объекта исследования данной работы - специальной Кэлеровой геометрии и того, как она возникает в теории суперструн в контексте первой главы, после чего мы рассматриваем специальную геометрию в контексте нелинейных сигма моделей в разделе 2.1.1. Там же мы описываем математические объекты, связанные со специальной геометрией, которые также естественно появляется в теориях Ландау-Гинзбурга и топологических теориях поля, а именно Фробениусовы многообразия и tt^*-геометрию.

После этого, в разделе 2.2 мы переходим к описанию непосредственно теорий Ландау-Гинзбурга, которые мы будем использовать для вычисления специальной геометрии для нелинейных сигма моделей. Наконец, результаты автора этой работы представлены в разделе 2.3.

На хорошо известном примере зеркальной квинтики, где вычисления специальной геометрии уже были проделаны, мы объясняем основные идеи нашего метода. В частности, киральные кольца $\mathcal{R}_0^Q$, представление периодов через осциллирующие интегралы, понятие вещественной структуры $M_i^{\bar{j}}$ на киральном кольце и основную рабочую формулу для специальной геометрии (2.3.72).

После описания нашего метода и вычисления для случая зеркальной квинтики, мы переходим к самой квинтике, для которой первое вычисление специальной геометрии появилось в совместной работе автора с научным руководителем [2]. В этом же разделе мы демонстрируем ещё один способ вычисления вещественной структуры основанный на монодромии и получаем явную формулу для специальной геометрии (2.3.122).

Следующая серия примеров - гиперповерхности Ферма, которые существенно обобщают пример квинтики. Среди трёхмерных многообразий Калаби-Яу имеется почти сто топологически различных гиперповерхностей заданных уравнением типа Ферма. Обобщение нашего метода на эти случаи не составляет труда. Единственное осложнение заключается в том, что для многообразий такого типа все модули комплексных структур не всегда реализуются полиномиальными деформациями, а наш метод работает именно с такими. Демонстрируя ещё один метод вычисления вещественной структуры мы получаем ответ для специальной геометрии (2.3.161).

Последний и самый общий случай, для которого мы используем наш метод в этой работе носит название обратимых особенностей или случая Берглунда и Хубша. Количество таких многообразий в трёх измерениях составляет несколько тысяч. Накладывая некоторые ограничения на вид полиномиальных деформаций или самого многообразия мы естественно обобщаем наши рассуждения, используем очередной метод для нахождения вещественной структуры и получаем формулу (2.3.204).

Вторая глава данной работы заканчивается заключением, где мы формулируем часть приложений наших формул, а также намечаем направления дальнейших исследований.

Глава 3 посвящена связи специальной геометрии и суперсимметричной локализации. Ещё давно Виттен показал, что как теории Ландау-Гинзбурга, так и нелинейные сигма модели можно получать определёнными пределами так называемых линейных калибровочных сигма моделей (ЛКСМ). В частности через ЛКСМ можно проследить соответствие топологически твистованных моделей. Относительно недавно две группы учёных: Бенини, Кремонези и Гомиз с Дороудом провели вычисления статистической суммы ЛКСМ на двумерной сфере с круглой метрикой. Джокерс с соавторами высказали гипотезу, которая связывает эту статсумму со специальной геометрией Кэлеровых модулей. В начале главы мы обсуждаем ЛКСМ, которые будут использоваться в дальнейшем. Во второй части главы мы обсуждаем зеркальную симметрию в подходе Батырева, после чего модифицируем конструкцию так, чтобы построить явно ЛКСМ, которые соответствуют зеркальным образам квинтики и всех гиперповерхностей типа Ферма. После чего мы проводим вычисления статсуммы на сфере и предъявляем зеркальное отображение, при котором эта статсумма совпадает с точностью до несущественного множителя, с экспонентой Кэлерова потенциала специальной метрики (3.2.16), (3.2.31). Таким образом, с одной стороны мы получаем независимую проверку гипотезы Джокерса в большом числе случаев, а с другой получаем ещё одно удобное выражение для специальной геометрии.

Структура и объём работы. Диссертация состоит из введения и трёх глав, содержит 152 страницы, включая 8 рисунков и список литературы из 94 наименований.

Содержание работы

Первая глава работы посвящена обзору проблемы компактификации в теории струн и не содержит существенно новых результатов. Целью этой главы является построение связи между физическими аспектами теории струн и геометрией многообразий Калаби-Яу, а также подготовка необходимого языка для второй главы.

Во введении 1.1 проводится обзор основных идей суперструнных компактификаций, а также обрисовывается подход используемый в данной работе.

Раздел 1.2 посвящён описанию теории суперструн в плоском десятимерном пространстве-времени. В первой части теория струн строится с помощью конформной теории поля на мировом листе в формализме Невьё-Шварца-Рамона. Для этого рассматривается теория десяти свободных бозонов и фермионов, которая обладает N=(2,2) суперконформной симметрией. Интегрирование по всевозможным двумерным поверхностям проводится с помощью духов Фаддеева-Попова, а именно $b - c - \beta - \gamma$ системы, которая также обладает N=(2,2) симметрией. Взаимолокальность и стабильность теории достигается ГСО-проекцией, оставляющей состояния с фиксированной чётностью фермионного числа. В безмассовом секторе теории имеются частицы, которые интерпретируются как гравитоны и их суперпартнёры в десятимерном пространстве-времени. Во второй части раздела описывается подход пространства-времени к описанию безмассового сектора теории как десятимерной теории IIA или IIB супергравитации.

В разделе 1.3 описывается компактификация суперструны на шестимерное многообразие с точки зрения низкоэнергетической теории безмассового сектора состояний струны. Используя обобщение редукции Калуцы-Клейна низкоэнергетическая четырёхмерная теория оказывается теорией супергравитации, константы связи которой определяются компактифицирующим многообразием.

Наличие ненарушенной четырёхмерной суперсимметрии требует существования ковариантно постоянного спинора на компактном многообразии. Такие многообразия оказываются многообразиями Калаби-Яу, и раздел 1.4 посвяшён описанию основных свойств их геометрии и связи этой геометрии с четырёхмерной теорией супергравитации. В частности, элементы групп когомологий соответствуют безмассовым четырёхмерным мультиплетам получающимся при компактификации теории суперструн. После изучения когомологий многообразий Калаби-Яу раздел завершается конкретным описанием частиц четырёхмерной супергравитации в терминах когомологий компактифицирующего многообразия.

Вторая глава диссертации является основной и содержит бо́льшую часть новых результатов. Эта глава основана на результатах статей [1—4]. Раздел 2.1 посвящён описанию специальной Кэлеровой геометрии. Изложение начинается с изучения констант связи в четырёхмерных $N = 2$ суперсимметричных калибровочных теориях. Векторный $N = 2$ мультиплет группы $U(1)$ состоит из калибровочного поля, двух Майорановских фермионов и комплексного скаляра. Этот мультиплет раскладывается в сумму $N = 1$ векторного и кирального мультиплетов

$$(A_\mu, \lambda_\alpha, \tilde{\lambda}_\alpha, \phi) = (A_\mu, \lambda_\alpha) + (\tilde{\lambda}_\alpha, \phi). \tag{1}$$

В d=4 N=1 суперсимметричной калибровочной теории скаляры киральных мультиплетов являются координатами на Кэлеровом многообразии, а для векторных мультиплетов имеется симплектическая электромагнитная дуальность. В N=2 суперсимметрии эти две структуры смешиваются преобразованиями суперсимметрии, а потому самосогласованы друг с другом.

Из условия согласования следует наличие препотенциала F, являющегося голоморфной функцией скалярных полей и определяющего все константы связи N=2 векторных мультиплетов. Кэлеров потенциал метрики (кинетического члена скаляров) на пространстве модулей выражается формулой

$$K(\phi, \bar{\phi}) = i(\phi^i \overline{\partial_i F(\phi)} - \overline{\phi^i} \partial_i F(\phi)). \tag{2}$$

Трёхточечные константы связи пропорциональны третьим производным препотенциала. Формулы специальной геометрии инвариантны относительно симплектических преобразований вектора $(\phi^i, \partial_j F(\phi))$.

В теории гравитации специальная геометрия модифицируется и носит название локальной или проективной специальной геометрии. В гравитационном супермультиплете имеется векторный гравифотон, который смешивается с обычными фотонами, в результате чего теория включающая n векторных мультиплетов описывается проективной специальной геометрией с n+1 однородной координатой, только n из которых являются независимыми. Однородные координаты z^a являются сечениями линейного расслоения $\mathscr{L}$ над таргет-многообразием скаляров $\mathscr{M}$. В теориях супергравитации существует препотенциал степени однородности 2, а формула (2) описывает метрику на тотальном пространстве расслоения $\mathscr{L}$. Метрика на базе расслоения $\mathscr{M}$ является естественной фактор-метрикой и имеет Кэлеров потенциал

$$e^{-K(X,\bar{X})} = i(z^a \overline{F_a} - \overline{z^a} F_a), \tag{3}$$

где $F_a = \partial_a F(X)$. Математически локальная специальная геометрия на многообразии $\mathscr{M}$ задаётся следующим образом: имеется плоское $Sp(2n+2, \mathbb{R})$ голоморфное расслоение $V \to \mathscr{M}$, линейное расслоение $\mathscr{L} \to \mathscr{M}$ и сечение их тензорного произведения $\Omega \in \Gamma(\mathscr{M}, V \otimes \mathscr{L})$ такие, что Кэлерова форма ω на $\mathscr{M}$ задаётся по формуле

$$\omega = -\frac{i}{2\pi}\partial\bar{\partial}\log\langle\Omega, \overline{\Omega}\rangle, \tag{4}$$

(в частности, $c_1(\mathscr{L}) = \omega$) и

$$\langle\Omega, D_a\Omega\rangle = \langle\Omega, \partial_a\Omega - \partial_a K\Omega\rangle = \langle\Omega, \partial_a\Omega\rangle = 0. \tag{5}$$

В следующей части раздела идёт описание локальной специальной геометрии возникающей при компактификации струн типа IIA и IIB на трёхмерные комплексные многообразия Калаби-Яу. В случае струны типа IIB специальные координаты и производные препотенциала (z^a, F_a) являются интегралами (периодами) голоморфной формы объёма Ω по базису трёхмерных циклов с симплектической матрицей пересечений и не имеют квантовых поправок:

$$z^a = \int_{A^a}\Omega, \;\; F_b = -\int_{B_b}\Omega, \tag{6}$$

где $A^a \cap A^b = B_a \cap B_b = 0$, а $A^a \cap B_b = \delta^a_b$. В этом случае Кэлеров потенциал специальной метрики выражается непосредственно через интеграл Ω:

$$e^{-K} = \int \Omega \wedge \overline{\Omega}. \tag{7}$$

Таким образом, для вычисления констант связи эффективной теории необходимо научиться вычислять периоды голоморфной формы объёма на многообразии. Заметим, что форма объёма определена с точностью до умножения на голоморфную функцию координат $\mathscr{M}$, что выражает тот факт, что периоды являются сечениями расслоения $\mathscr{L}$.

В теории струн типа IIA препотенциал выражается через числа пересечения 2-форм на многообразии и содержат квантовые поправки в виде вкладов от голоморфных инстантонов, инвариантов Громова-Виттена. Раздел завершается опиcнием другой структуры, которая тесно связана с голоморфным препотенциалом F, а именно структуры Фробениусова многообразия снабжённого tt^*-метрикой.

Раздел 2.2 посвяшён описанию N=(2,2) суперсимметричных моделей Ландау-Гинзбурга. Лагранжиан теории состоит из кинетического D-члена и голоморфного суперпотенциала $W(x)$, F-члена. Так называемые киральный и антикиральный сектора состояний теории оказываются нечувствительны к кинетическому D-члену, и их корреляционные функции полностью определяются суперпотенциалом. Корреляционные функции удобно вычислять используя топологический твист [17] теории. Киральное кольцо изоморфно кольцу Милнора суперпотенциала

$$\mathcal{R} = \frac{\mathbb{C}[X_1, \cdots, X_n]}{(\partial_1 W, \cdots, \partial_n W)}. \tag{8}$$

Топологическая двухточечная функция полей Φ_i, Φ_j (являющаяся частным случаем трёхточечной функции оригинальной теории) выражается формулой

$$\eta_{ij} = \mathrm{Res}\frac{\Phi_i(x)\,\Phi_j(x)\,\zeta^2(x,t)\mathrm{d}^n x}{\partial_1 W \cdots \partial_n W}. \tag{9}$$

При деформации Лагранжиана теории Ландау-Гинзбурга киральными полями корреляционные функции получают зависимость от параметров деформации t_i. Деформированная двухточечная функция задаёт плоскую метрику на пространстве деформации выражающуюся через так называемую *примитивную форму* $\zeta = \zeta(x,t)\mathrm{d}^n x$:

$$\eta_{ij} = \mathrm{Res}\frac{\Phi_i(x)\,\Phi_j(x)\,\zeta^2(x,t)\mathrm{d}^n x}{\partial_1 W \cdots \partial_n W}. \tag{10}$$

Трёхточечные функции являются производными голоморфного препотенциала

$$C_{ijk} = \nabla_i \nabla_j \nabla_k F(t). \tag{11}$$

Таким образом, корреляционные функции топологически твистованной деформированной теории Ландау-Гинзбурга определяются структурой Фробениусового многообразия на пространстве деформаций $\mathscr{M}$.

Двухточечные функции кирального и антикирального полей на достаточно вытянутой сфере (для проекции на основные состояния теории) задают tt^* метрику на Фробениусовом многообразии $\mathscr{M}$. Для подходящих орбифолдов теорий Ландау-Гинзбурга, имеющих в ИК пределе конформную теорию поля с центральным зарядом 9, ограничение структуры Фробениусового многообразия и tt^* геометрии на пространство маргинальных (то есть конформных) деформаций совпадает со специальной Кэлеровой геометрией на пространстве комплексных модулей определённых многообразий Калаби-Яу, для которых суперпотенциал интерпретируется как уравнение $W = 0$, задающее многообразие как гиперповерхность в подходящем пространстве.

Раздел 2.3 содержит основную часть результатов автора. Мы формулируем наш метод вычисления специальной геометрии на пространстве комплексных деформаций многообразия Калаби-Яу на хорошо изученном [6] примере зеркальной квинтики в проективном пространстве в подразделе 2.3.1. Пространство комплексных деформаций зеркальной квинтики $\check{\mathcal{Q}}$ моделируется на одномерном семействе многообразий $\check{\mathcal{Q}}_{\phi_1}$ заданных уравнениями

$$W(x,\phi_1) := \sum_{i\le 5} x_i^5 + \phi_1 \prod_{i\le 5} x_i = 0 \tag{12}$$

в комплексном проективном пространстве $\mathbb{P}^4$. Сама зеркальная квинтика является фактором таких многообразий по $\mathbb{Z}_5^3$, однако вычисление специальной геометрии нечувствительно к возникающим таким образом особенностям. В отличие от классических вычислений в окрестности $\phi_1 = \infty$, мы вычисляем специальную геометрию в окрестности точки $\phi_1 = 0$, известной под названием орбифолдной точки пространства модулей или точки Ландау-Гинзбурга. Характеристическим свойством такой точки является наличие у полинома $W_0(x) := W(x, 0)$ повышенной группы симметрии, так называемой группы фазовой симметрии Π_{W_0}.

Фазовая симметрия, это преобразования растягивающие координаты на $\mathbb{C}^5$ и оставляющие полином $W_0(x)$ инвариантным, то есть $g \in \Pi_{W_0}$ действует как

$$g \cdot x_i = \lambda_i x_i, \ W_0(g \cdot x) = W_0(x). \tag{13}$$

Для квинтики это группа $\mathbb{Z}_5^5 = (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^5$, действующая умножениями на корни пятой степени из 1 на каждую из координат. При этом в Π_{W_0} есть подгруппа $Q_{W_0} = \mathbb{Z}_5$ действующая диагонально. Эта подгруппа является подгруппой однородных растяжений проективного пространства и поэтому действует тривиально на $\mathbb{P}^4$. Она исторически называется группой *квантовой симметрии* [11].

Группа фазовой симметрии (а точнее её фактор по квантовой симметрии) действует на пространстве параметров деформации $\{\phi_1\}$ и соответствующие многообразия Калаби-Яу имеют одинаковую комплексную структуру. Из-за этого пространство модулей в окрестности орбифолдной точки является орбифолдом, то есть фактором пространства параметров по группе фазовой симметрии.

Группа фазовой симметрии Π_{W_0} действует на периодах монодромией вокруг начала координат в пространстве параметров. Группы гомологий и когомологий разбиваются по одномерным представлениям Π_{W_0}, а инвариантность относительно монодромии определяет их общий вид.

Основным средством вычисления периодов в данной работе являются осциллирующие интегралы [7], а именно имеет место формула

$$\int_\gamma \Omega = \int_\Gamma e^{-W(x,\phi_1)} \mathrm{d}^5 x. \tag{14}$$

В этом равенстве цикл γ принадлежит третьей группе гомологий зеркальной квинтики $\check{\mathcal{Q}}$, а цикл Γ лежит в группе циклов, которые уходят на бесконечность в областях, где вещественная часть показателя экспоненты меньше нуля и интеграл сходится. Такие циклы математически задаются группой относительных гомологий:

$$\mathscr{H}_5^+ := H_5(\mathbb{C}^5, \mathrm{Re}(W) >> 0; \mathbb{Z}) = \lim_{N\to\infty} H_5(\mathbb{C}^5, \mathrm{Re}(W) > N; \mathbb{Z}). \tag{15}$$

Формула (14) может быть доказана математически, но имеет физическую интерпретацию. Левая часть формулы является одноточечной функцией на диске в нелинейной сигма-модели в $\check{\mathcal{Q}}_{\phi_1}$ с граничным условием заданным циклом γ (более точно, специальным Лагранжевым представителем в его классе гомологий), а правая часть интерпретируется как одноточечная функция на диске в орбифолде Ландау-Гинзбурга с суперпотенциалом $W(x,\phi_1)$ с граничным условием заданным циклом Лефшеца имеющим класс гомологий Γ.

Осциллирующие интегралы вычисляются с помощью рекуррентного использования формулы Стокса. Для любой голоморфной 4-формы α, растущей не быстрее полинома на бесконечности должно выполняться

$$0 = \int_\Gamma \mathrm{d}(e^{-W}\alpha) = \int_\Gamma e^{-W}\left(\mathrm{d}\alpha - \mathrm{d}W \wedge \alpha\right). \tag{16}$$

Введём соответствующий дифференциал, твистованный дифференциал де-Рама

$$D_- := \mathrm{d} - \mathrm{d}W\wedge = e^W \mathrm{d} e^{-W}. \tag{17}$$

Имеем $D_-^2 = 0$, и комплексный оциллирующий интеграл не меняется при добавке к интегранту форм вида $D_-\alpha$. Таким образом, группа когомологий, в которой лежит интегрант, задаётся фактором полиномиальных голоморфных 5-форм на $\mathbb{C}^5$ по твистованному дифференциалу D_- и называется группой относительных когомологий де-Рама:

$$H^5_{D_-}(\mathbb{C}^5) := \Omega^5(\mathbb{C}^5)/D_-(\Omega^4(\mathbb{C}^5)). \tag{18}$$

Эта группа изоморфна как векторное пространство кольцу Милнора $\mathcal{R}$ особенности $W(x,\phi_1)$. Таким образом, если выбрать в кольце Милнора базис, то осциллирующий интеграл любой формы равен линейной комбинации интегралов от базисных форм с коэффициентами, которые можно найти рекуррентно по степени (как полинома) коэффициентов дифференциальной формы.

Удобнее всего проводить вычисление периодов в базисе циклов, которые являются собственными векторами относительно действия группы фазовой симметрии. Для этого фиксируется базис когомологий $\{e_i(x)\,\mathrm{d}^5x\}_{i=1}^{\mu} \subset H^5_{D_-}(\mathbb{C}^5)$ в точке $\phi_1 = 0$, который является собственным относительно действия Π_{W_0}. По нему можно построить дуальный базис циклов $\{\Gamma_i^+\}_{i=1}^{\mu} \subset \mathscr{H}_5^+$

$$\int_{\Gamma_+^j} e_i(x)\, e^{-W_0(x)}\mathrm{d}^5x = \delta_i^j. \tag{19}$$

Тогда периоды по таким циклам вычисляются разложением экспоненты в ряд по параметру деформации ϕ_1 и рекуррентному приведению подынтегрального выражения к линейной комбинации форм $e_i(x)\,e^{-W_0(x)}\mathrm{d}^5x$:

$$\sigma_k(\phi_1) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(m+\frac{k+1}{5}\right)^5}{\Gamma\left(\frac{k+1}{5}\right)^5}\frac{(-\phi_1)^{5n+k}}{(5n+k)!}. \tag{20}$$

Эти периоды определённо являются собственными относительно преобразования монодромии $\phi_1 \to e^{2\pi i/5}\phi_1$, но циклы интегрирования Γ_k^+ не являются геометрическими циклами, а являются линейными комбинациями последних с комплексными трансцендентными коэффициентами.

Кэлеров потенциал специальной метрики можно разложить как Эрмитову форму по периодам в произвольном базисе целочисленных циклов $q_k \in H_3(\check{\mathcal{Q}}, \mathbb{Z})$:

$$e^{-K} = \int_{\check{\mathcal{Q}}} \Omega \wedge \overline{\Omega} = \omega_k(\phi) C^{kj} \overline{\omega_j(\phi)}, \tag{21}$$

где $\omega_k(\phi) := \int_{q_k} \Omega_\phi$ и $(C^{-1})_{kl} = q_k \cap q_l$.

Рассмотрим матрицу перехода между периодами по циклам с целочисленными и комплексными коэффициентами

$$\omega_i(\phi) = T_i^j \sigma_j(\phi). \tag{22}$$

Подставим эту формулу в (21) получаем

$$e^{-K} = \omega(\phi)^t T^t C \overline{T} \overline{\omega(\phi)}. \tag{23}$$

Матрица $T^t C \overline{T}$ выражается через голоморфную обратную матрицу "пересечений" циклов $\eta := T^t C T$ по формуле

$$T^t C \overline{T} = \eta T^{-1} \overline{T} = \eta M, \tag{24}$$

где мы определили матрицу *вещественной структуры* $M = T^{-1}\overline{T}$. Матрица M не зависит от явного выбора циклов q_i пока они остаются целочисленными или даже вещественными, а также удовлетворяет свойству $M\bar{M} = 1$. Матрица вещественной структуры является матрицей операции операции комплексного сопряжения на группе $\mathscr{H}_5^+ \otimes \mathbb{C} = H_5(\mathbb{C}^5, \mathrm{Re}(W) >> 0; \mathbb{C})$ в базисе циклов Γ_+^i. Подставляя матрицу вещественной структуры в формулу (21) мы получаем нашу основную формулу для вычисления специальной геометрии, которая используется во всех примерах, рассматриваемых в диссертации:

$$e^{-K} = \sigma_i(\phi) \eta^{ij} M_j^{\bar{k}} \overline{\sigma_k(\phi)}, \tag{25}$$

где матрица η^{ij} являтся обратной матрицей (голоморфной) пересечений циклов $\Gamma_j^\pm$, а $M_i^{\bar{k}}$ матрицей вещественной структуры.

Как показывается в этом же разделе, голоморфная матрица пересечений циклов η^{ij} в орбифолдной точке пространства модулей в базисе циклов Γ_j^+ равняется двухточечной функции топологически твистованной теории Ландау-Гинзбурга:

$$(-1)^l \eta_{jl} = \mathrm{Res} \frac{e_j(x) e_l(x)\, \mathrm{d}^5 x}{\partial_1 W_0 \cdots \partial_5 W_0} = \delta_{j+l=3}. \tag{26}$$

Существует множество способов нахождения матрицы вещественной структуры $M_i^{\bar{j}}$. В разделе 2.3.1 мы извлекаем её из известных формул для периода по целочисленному циклу $\omega_0(\phi)$.

В итоге подставляя (20), (26) и формулу для вещественной структуры в (25) получаем финальный ответ для Кэлерова потенциала специальной метрики на пространстве модулей комплексных структур зеркальной квинтики:

$$e^{-K} = \sum_{k=0}^{3} (-1)^k \gamma \left(\frac{k+1}{5} \right)^5 |\sigma_k(\phi)|^2, \tag{27}$$

где $\gamma(x) = \Gamma(x)/\Gamma(1-x)$. Этот ответ, разумеется, совпадает с выражением из работы [6]. Наш способ вычисления специальной геометрии использует вычисления в инвариантном кольце Милнора особенности, задаваемой уравнением зеркальной квинтики. Также при вычислении не использовались моделезависимые соображения монодромии и не пришлось искать симплектический базис в когомологиях. Симплектический базис, в принципе, можно найти применяя процедуру ортогонализации Грамма-Шмидта к матрице пересечений вещественных циклов $\Gamma_+^i + \Gamma_+^j M_j^{\bar{k}}$.

В разделе 2.3.2 вычисляется специальная Кэлерова геометрия на 101-мерном пространстве модулей комплексных структур самой квинтики. Как упоминалось выше, уравнение квинтики общего вида записывается

$$W(x, \phi) = W_0(x) + \sum_{s=1}^{101} \phi_s e_s(x) = \sum_{i \le 5} x_i^5 + \sum_{s=1}^{101} \phi_s x_1^{s_1} \cdots x_5^{s_5}. \tag{28}$$

Здесь ϕ без индекса обозначает вектор из 101 элемента, s без индекса - номер от 1 до 101, а $0 \le s_i \le 3$ означает экспоненты монома соответствующего деформации ϕ_s, в частности, $\sum_{i\le 5} s_i = 5$. Деформации разбиваются по классам под действием группы перестановок S_5: (1,1,1,1,1), (2,1,1,1,0), (2,2,1,0,0), (3,1,1,0,0), (3,2,0,0,0).

Каждый моном имеет уникальный вес под действием группы фазовой симметрии $\Pi_{W_0} \simeq \mathbb{Z}_5^5$. Группа квантовой симметрии (то есть подгруппа фазовой симметрии действующая тождественным преобразованием на самой квинтике) значительно меньше, чем в предыдущем случае и состоит из диагональных растяжений : $\mathbb{Z}_5 \simeq Q \subset \Pi_{W_0}$.

В отличие от предыдущих методов вычисления специальной геометрии, общая идея вычисления остаётся той же. Главное отличие заключается в том, что инвариантное кольцо Милнора в случае квинтики значительно больше.

Периоды по-прежнему задаются осциллирующими интегралами,

$$\int_\gamma \Omega_\phi = \int_{\Gamma_+} e^{-W(x,\phi)} \mathrm{d}^5 x, \tag{29}$$

где циклы интегрирования Γ_+ лежат в группе

$$(\mathscr{H}_5^+)^Q = H_5(\mathbb{C}^5, \mathrm{Re}(W) >> 0; \mathbb{Z})^{\mathbb{Z}_5}. \tag{30}$$

Обозначим собственный относительно фазовой симметрии базис группы $H^5_{D_-}(\mathbb{C}^5)^Q$ за $e_m(x)\,\mathrm{d}^5x := x_1^{m_1}\cdots x_5^{m_5}\,\mathrm{d}^5x,\ \sum_{i\le 5} m_i = 0, 5, 10, 15$.

Периоды по дуальному базису циклов вычисляются аналогично одномерному случаю с помощью рекуррентного применения формулы Стокса

$$\begin{gathered}\sigma_a(\phi) = \prod_{i\le 5}\left(\frac{a_i+1}{5}\right)_{n_i}\sum_{\sum_{s=1}^{101} m_s s_i = 5n_i + a_i}\frac{\phi_1^{m_1}\cdots\phi_{101}^{m_{101}}}{m_1!\cdots m_{101}!},\\ a = (a_1,\ldots,a_5),\ 0\le a_i\le 3, \sum_{i\le 5} a_i = 0,\ 5,\ 10,\ 15.\end{gathered} \tag{31}$$

Голоморфная матрица пересечений циклов η^{ij} выражается через двухточечную функцию в топологически твистованной теории Ландау-Гинзбурга

$$\eta_{ab} = (-1)^{\sum_i b_i/5}\mathrm{Res}\frac{e_a(x)\,e_b(x)\,\mathrm{d}^5x}{\partial_1 W_0\cdots\partial_5 W_0}. \tag{32}$$

Для случая квинтики мы используем другой приём для нахождения матрицы вещественной структуры. Мы пользуемся инвариантностью метрики при монодромии при обходе ϕ_1 вокруг бесконечности, где деформация ϕ_1 соответствует моному $x_1x_2x_3x_4x_5$.

В итоге Кэлеров потенциал специальной метрики на 101-одномерном пространстве модулей квинтики в окрестности орбифолдной точки выражается следующей формулой

$$e^{-K} = \sum_{\substack{k_1,\ldots,k_5\le 3,\\ \sum_i k_i = 0,5,10,15}}(-1)^{\sum_i k_i/5}\prod_{i\le 5}\gamma\left(\frac{k_i+1}{5}\right)|\sigma_{(k_1,\ldots,k_5)}(\phi)|^2. \tag{33}$$

Зеркальное отображение в орбифолдной точке выражается через вычисленные нами периоды:

$$t^s_{LG}(\phi) = \sigma_s(\phi)/\sigma_{(00000)}(\phi_1), \tag{34}$$

В следующем подразделе 2.3.3 мы вычисляем специальную Кэлерову геометрию на пространствах модулей гиперповерхностей типа Ферма. Такие гиперповерхности являются естественными обобщениями квинтики и задаются взвешенными однородными уравнениями вида

$$W_0(x) = x_1^{d/k_1} + x_2^{d/k_2} + x_3^{d/k_3} + x_4^{d/k_4} + x_5^{d/k_5} = 0, \tag{35}$$

где d, k_i и d/k_i натуральные числа. Такой полином имеет хорошо определённое множество нулей во *взвешенном проективном пространстве* $\mathbb{P}^4_{(k_1,k_2,k_3,k_4,k_5)}$. Взвешенное проективное пространство определяется как

$$\mathbb{P}^4_{\bar{k}} = \mathbb{P}^4_{(k_1,k_2,k_3,k_4,k_5)} := \{x_i\in\mathbb{C}^5 \mid x_i \simeq \lambda^{k_i}x_i,\ \bar{x}\neq 0\}. \tag{36}$$

Гиперповерхности Ферма определяются как решения уравнений $W_0(x) = 0$ в $\mathbb{P}^4_{\bar{k}}$. Такие многообразия зачастую оказываются особыми из-за особенностей взвешенных проективных пространств, однако такие особенности не оказывают влияния на модули комплексной структуры. В размерности 3 имеется 97 различных семейств гиперповерхностей Ферма [13]. Полином $W_0(x)$ обладает группой фазовой симметрии $\Pi_{W_0} = \mathbb{Z}_{d/k_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{d/k_5}$.

Для вычисления специальной геометрии мы рассматриваем полиномиальную деформацию гиперповерхности Ферма общего вида

$$W(x,\phi) = \sum_{i=1}^{5} x_i^{d/k_i} + \sum_{s=1}^{h^{2,1}_{poly}} \phi_s e_s(x), \tag{37}$$

где $e_s(x) := x_1^{s_1} \cdots x_5^{s_5}$, $h^{2,1}_{poly} \leq h^{2,1}$ означает число нетривиальных полиномиальных деформаций, а также выполняются условия невырожденности $0 \leq s_i \leq d/k_i - 2$ и однородности $\sum_i s_i k_i = d$. Основным отличием от случая квинтики является то, что некоторые деформации комплексной структуры нельзя представить полиномиальной деформацией $W_0(x)$. Непосредственное применение нашего метода позволяет вычислить специальную геометрию на подпространстве комплексных модулей.

В остальном вычисление проходит аналогично случаю квинтики. Выбирая подходящий собственный относительно фазовой симметрии базис кольца Милнора мы находим периоды в собственном базисе циклов

$$\begin{gathered}\sigma_a(\phi) = \prod_{i \leq 5} \left(\frac{k_i(a_i+1)}{d}\right)_{n_i} \sum_{\sum_{s=1}^{h} m_s s_i = d/k_i n_i + a_i} \frac{\phi_1^{m_1} \cdots \phi_h^{m_h}}{m_1! \cdots m_h!}, \\ a = (a_1, \ldots, a_5),\ 0 \leq a_i \leq d/k_i - 2, \sum_{i \leq 5} k_i a_i = 0,\ d,\ 2d,\ 3d\end{gathered} \tag{38}$$

и голоморфную матрицу пересечений циклов

$$\eta_{ab} = (-1)^{\sum_i k_i b_i/d} \delta_{a+b,2h+3}. \tag{39}$$

Для нахождения матрицы вещественной структуры мы вычисляем осциллирующие интегралы по специальным циклам с целочисленными коэффициентами. Эти циклы связаны с циклами Лефшеца, а интегралы по ним разбиваются в произведение пяти одномерных интегралов, которые легко берутся. Матрица вещественной структуры вычисляется с помощью матрицы перехода между периодами $\sigma_k(\phi)$ и периодами по целочисленным циклам как в случае зеркальной квинтики. Кэлеров потенциал специальной метрики на пространстве модулей равняется

$$e^{-K} = \sum_{\substack{a_i \leq d/k_i - 2 \\ \sum_i k_i a_i = 0,d,2d,3d}} (-1)^{\sum_i k_i a_i/d} \prod_{i=1}^{5} \gamma\left(\frac{k_i(a_i+1)}{d}\right) |\sigma_a(\phi)|^2. \tag{40}$$

При $k_i = 1,\ d = 5$ эта формула воспроизводит формулу Кэлерова потенциала для квинтики (33).

Ограничениями формулы (40) на подпространства параметров мы получаем известные в литературе вычисления как частные случаи [12; 14; 15].

В разделе 2.3.4 представлен наиболее общий случай вычисления специальной геометрии. Рассматриваемые многообразия Калаби-Яу также задаются гиперповерхностями во взвешенных проективных пространствах, но уравнение имеет гораздо более общий вид

$$W_0(x) = \sum_{i=1}^{5} \prod_{j=1}^{5} x_j^{M_{ij}}, \tag{41}$$

является обратимой. Такие особенности $W_0(x)$ называются обратимыми. Гиперповерхности Ферма, рассматриваемые в предыдущем разделе, являются частным случаем обратимых особенностей с диагональной матрицей M. Обратимые особенности обладают большой группой фазовой симметрии Π_{W_0}, и, в частности, являются взвешенными однородными.

Пространство (полиномиальных) деформаций комплексной структуры моделируется семейством

$$W(x, \phi) = W_0(x) + \sum_{s=1}^{h^{2,1}_{poly}} \phi_s e_s(x), \tag{42}$$

где $h^{2,1}_{poly}$ - это число независимых полиномиальных деформаций комплексной структуры, а $e_s(x) \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_5]/(\partial_i W_0)$ - базис в пространстве однородных деформаций невырожденных в первом порядке.

Любая обратимая особенность, которая задаёт достаточно гладкое многообразие Калаби-Яу во взвешенном проективном пространстве, раскладывается [13] в прямую сумму одного из трёх строительных блоков

$$\begin{aligned} x^a &\text{ - точка}, \\ x_1^{a_1} x_2 + x_2^{a_2} x_3 + \cdots + x_n^{a_n} &\text{ - цепь}, \\ x_1^{a_1} x_2 + x_2^{a_2} x_3 + \cdots + x_n^{a_n} x_1 &\text{ - петля}. \end{aligned} \tag{43}$$

В случае обратимых особенностей наш метод вычисления работает не всегда. Без существенных изменений он обобщается на случай особенностей состоящих из “точек” и “петель” длины 3 или 5, а также для определённого поднабора полиномиальных деформаций в остальных случаях.

Ограничиваясь рассмотрением таких случаев мы вычисляем периоды и специальную геометрию небольшой модификацией рассчётов для квинтики и гиперповерхностей Ферма:

$$\begin{aligned} &\sigma_a(\phi) = \prod_{i\le 5} \left((a_j+1)M^{-1}_{ji}\right)_{v_i} \sum_{\sum_{s=1}^h m_s s_i = M_{ij}v_j + a_i} \frac{\phi_1^{m_1}\cdots\phi_h^{m_h}}{m_1!\cdots m_h!},\\ &a = (a_1,\ldots,a_5) \in \mathcal{R}_0,\\ &\sum_{i\le 5} M_{ij}a_j = 0,\, d,\, 2d,\, 3d. \end{aligned} \tag{44}$$

Вещественная структура на пространстве циклов находится с помощью вещественной структуры на пространстве относительных когомологий $H^5_{D_-}(\mathbb{C}^5)$, которая считается с помощью интегралов по целым циклам, разбивающихся, как и в случае Ферма, на произведение одномерных интегралов.

Кэлеров потенциал выражается следующей формулой:

$$e^{-K} = \sum_{\substack{\bar{a}\in\mathcal{R}_0 \\ \sum_i a_j M^{-1}_{ji} = 0,1,2,3}} (-1)^{\sum_i a_j M^{-1}_{ji}} \prod_{i=1}^5 \gamma\left((a_j+1)M^{-1}_{ji}\right) |\sigma_a(\phi)|^2. \tag{45}$$

Таким образом, специальная Кэлерова геометрия для любой обратимой особенности вокруг орбифолдной точки выражается через простой степенной ряд от параметров деформации с коэффициентами записывающимися с помощью обратной матрицы M^{-1}_{ij} экспонент потенциала $W_0(x)$. Трансцендентные коэффициенты вещественной структуры выражаются через гамма функции с аргументами включающими ту же самую матрицу M^{-1}_{ij}. Заметим, что наша формула перестаёт быть верной ровно в тех случаях, когда аргументы гамма-функций и символов Похгаммера становятся целыми.

Вторая глава завершается заключением, в котором обсуждаются применения полученных результатов и направления для дальнейшего развития.

Третья глава посвящена связи специальной геометрии с Линейными Калибровочными Сигма Моделями (ЛКСМ) и зеркальной симметрии и основана на результатах статьи [5]. В этой главе мы используем конструкцию Батырева [8] зеркальной симметрии для построения специальных ЛКСМ, чьи сферические статсуммы совпадают с экспонентами Кэлеровых потенциалов специальной геометрии для примеров рассмотренных во второй главе. Мы вычисляем статсуммы этих ЛКСМ на сфере с круглой метрикой, используя локализационную формулу [9] в определённой фазе. Наши вычисления находятся в согласии с гипотезой о статсуммах двумерных ЛКСМ [16] и зеркальной симметрией [8].

В разделе 3.1 приводятся необходимые факты из двумерных ЛКСМ и зеркальной симметрии. В частности, в подразделе 3.1.1 объясняется локализационная формула для статсуммы [9; 10] на круглой сфере, а в разделе

3.1.2 мы описываем ряд построений из торической геометрии и конструкцию Батырева, основанную на дуальных многогранниках.

В разделе 3.2 мы приводим наши вычисления для случаев квинтики и гиперповерхностей Ферма в подразделе 3.2.1. Опишем основную идею. Мономы составляющие гиперповерхность вида

$$W(x,\phi) = x_1^{d/k_1} + x_2^{d/k_2} + x_3^{d/k_3} + x_4^{d/k_4} + x_5^{d/k_5} + \sum_{s=1}^{h} \phi_s x_1^{s_1} \cdots x_5^{s_5} = 0. \tag{46}$$

можно интерпретировать как целочисленные точки многогранника, определяющего само взвешенное проективное пространство $\mathbb{P}^4_{\bar{k}}$

$$v_{ij} = \begin{cases} d\delta_{i,j}, & 1 \leq i \leq 5, \\ k_j s_{i-5,j}, & 6 \leq i \leq 106. \end{cases} \tag{47}$$

Идея зеркальной симметрии в применении к этому случаю заключается в том, что эти точки можно использовать для построения веера, определяющего зеркально двойственное многообразие. Более точно, зеркально двойственным к гиперповерхности Ферма является гиперповерхность Калаби-Яу, лежащая в торическом многообразии, построенном по вееру связанному с v_{ij}.

Такой веер (или торическое многообразие) определяет двумерную ЛКСМ с зарядами, которые выражают линейные соотношения между векторами веера. Удобно выбрать нецелочисленный базис в линейных соотношениях, который отвечает нецелочисленным "зарядам"

$$Q_{ai} = \begin{cases} k_i s_{ai}, & 1 \leq i \leq 5, \\ -d\delta_{i-5,a}, & 6 \leq i \leq h. \end{cases} \tag{48}$$

Статсумма теории на сфере задаётся многомерным контурным интералом

$$\begin{aligned} Z_{S^2} = \sum_{m_l \in V} \int_{\mathcal{C}_1} \cdots \int_{\mathcal{C}_h} \prod_{l=1}^{h} \frac{d\tau_l}{(2\pi i)} \left(z_l^{-\tau_l + \frac{m_l}{2}} \bar{z}_l^{-\tau_l - \frac{m_l}{2}} \right) \times \\ \times \frac{\Gamma\big(1 - d(\tau_1 - \frac{m_1}{2})\big)}{\Gamma\big(d(\tau_1 + \frac{m_1}{2})\big)} \prod_{a=1}^{5} \frac{\Gamma\big(\sum_l k_a s_{la}(\tau_l - \frac{m_l}{2})\big)}{\Gamma\big(1 - \sum_l k_a s_{la}(\tau_l + \frac{m_l}{2})\big)} \prod_{l=2}^{h} \frac{\Gamma\big(-d(\tau_l - \frac{m_l}{2})\big)}{\Gamma\big(1 + d(\tau_l + \frac{m_l}{2})\big)}, \end{aligned} \tag{49}$$

где

$$z_l := e^{-(2\pi r_l + i\theta_l)}, \tag{50}$$

r_l и θ_l - параметры Файе-Илиопулоса и тэта-углы в ЛКСМ. Контуры C проходят немного левее мнимых осей $\tau_l = -\epsilon + it_l$. Набор V определён условием квантования в базисе Q_{ai}, то есть $m \in V \iff \sum_{a \leq h} m_a Q_{ai} \in \mathbb{Z}$. Мы вычисляем этот интеграл в подходящей области значений параметров

Файе-Илиопулоса или же в фазе Ландау-Гинзбурга, которая задаётся условием $|z_l| >> 0$ для всех l, или $r_l << 0$. Интеграл (49) вычисляется по вычетам, а результат совпадает с экспонентой Кэлерова потенциала специальной геометрии для поверхностей Ферма с точностью до множителя при замене координат (зеркальном отображении)

$$z_a = -\phi_l^{-d}. \tag{51}$$

Третья глава завершается заключением, в котором подытоживаются результаты главы, а также предлагаются направления для дальнейшей работы.

Работы автора по теме диссертации

1. *Aleshkin K.*, *Belavin A.* A new approach for computing the geometry of the moduli spaces for a Calabi–Yau manifold // J. Phys. — 2018. — Т. A51, № 5. — С. 055403. — DOI: 10.1088/1751-8121/aa9e7a. — arXiv: 1706.05342 [hep-th].
2. *Aleshkin K.*, *Belavin A.* Special geometry on the moduli space for the two-moduli non-Fermat Calabi–Yau // Phys. Lett. — 2018. — Т. B776. — С. 139—144. — DOI: 10.1016/j.physletb.2017.11.030. — arXiv: 1708.08362 [hep-th].
3. *Aleshkin K.*, *Belavin A.* Special geometry on the 101 dimesional moduli space of the quintic threefold // JHEP. — 2018. — Т. 03. — С. 018. — DOI: 10.1007/JHEP03(2018)018. — arXiv: 1710.11609 [hep-th].
4. *Aleshkin K.*, *Belavin A.* Exact Computation of the Special Geometry for Calabi–Yau Hypersurfaces of Fermat Type // JETP Lett. — 2018. — Т. 108, № 10. — С. 705—709. — DOI: 10.1134/S0021364018220010. — arXiv: 1806.02772 [hep-th].
5. *Aleshkin K.*, *Belavin A.*, *Litvinov A.* JKLMR conjecture and Batyrev construction // Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment. — 2019. — Март. — Т. 2019, № 3. — С. 034003. — DOI: 10.1088/1742-5468/ab081a. — URL: https://doi.org/10.1088%2F1742-5468%2Fab081a.

Список литературы

6. A Pair of Calabi-Yau manifolds as an exactly soluble superconformal theory / P. Candelas [и др.] // Nucl. Phys. — 1991. — Т. B359. — С. 21—74. — DOI: 10.1016/0550-3213(91)90292-6. — [AMS/IP Stud. Adv. Math.9,31(1998)].
7. *Arnold V.*, *Varchenko A.*, *Gusein-Zade S.* Singularities of Differentiable Maps. — Birkhauser Basel, 1985.
8. *Batyrev V. V.* Dual Polyhedra and Mirror Symmetry for Calabi-Yau Hypersurfaces in Toric Varieties // arXiv e-prints. — 1993. — Окт. — alg—geom/9310003. — arXiv: alg-geom/9310003 `[math.AG]`.
9. *Benini F.*, *Cremonesi S.* Partition Functions of $\mathcal{N} = (2,2)$ Gauge Theories on S^2 and Vortices // Commun. Math. Phys. — 2015. — Т. 334, № 3. — С. 1483—1527. — DOI: 10.1007/s00220-014-2112-z. — arXiv: 1206.2356 `[hep-th]`.
10. Exact Results in D=2 Supersymmetric Gauge Theories / N. Doroud [и др.] // JHEP. — 2013. — Т. 05. — С. 093. — DOI: 10.1007/JHEP05(2013)093. — arXiv: 1206.2606 `[hep-th]`.
11. *Greene B.*, *Plesser M.* Duality in Calabi-Yau moduli space // Nuclear Physics B. — 1990. — Т. 338, № 1. — С. 15—37. — ISSN 0550-3213. — DOI: https://doi.org/10.1016/0550-3213(90)90622-K. — URL: http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/055032139090622K.
12. *Klemm A.*, *Theisen S.* Recent efforts in the computation of string couplings // Theor. Math. Phys. — 1993. — Т. 95. — С. 583—594. — DOI: 10.1007/BF01017144. — arXiv: hep-th/9210142 `[hep-th]`. — [Teor. Mat. Fiz.95,293(1993)].
13. *Kreuzer M.*, *Skarke H.* On the classification of quasihomogeneous functions // Commun. Math. Phys. — 1992. — Т. 150. — С. 137. — DOI: 10.1007/BF02096569. — arXiv: hep-th/9202039 `[hep-th]`.
14. Mirror symmetry for two parameter models. 1. / P. Candelas [и др.] // Nucl. Phys. — 1994. — Т. B416. — С. 481—538. — DOI: 10.1016/0550-3213(94)90322-0. — arXiv: hep-th/9308083 `[hep-th]`. — [AMS/IP Stud. Adv. Math.1,483(1996)].

15. Mirror symmetry for two parameter models. 2. / P. Candelas [и др.] // Nucl. Phys. — 1994. — Т. B429. — С. 626—674. — DOI: 10.1016/0550-3213(94)90155-4. — arXiv: hep-th/9403187 [hep-th].

16. Two-Sphere Partition Functions and Gromov-Witten Invariants / H. Jockers [и др.] // Commun. Math. Phys. — 2014. — Т. 325. — С. 1139—1170. — DOI: 10.1007/s00220-013-1874-z. — arXiv: 1208.6244 [hep-th].

17. *Witten E.* On the Structure of the Topological Phase of Two-dimensional Gravity // Nucl. Phys. — 1990. — Т. B340. — С. 281—332. — DOI: 10.1016/0550-3213(90)90449-N.