

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Мажуга

Мажуга Андрей Михайлович

Вербально замкнутые подгруппы

Специальность 01.01.06 —

«математическая логика, алгебра и теория чисел»

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

14 НОЯ 2018



Москва — 2018

Работа выполнена на кафедре высшей алгебры Механико-математического факультета ФГБОУ ВО "Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова".

Научный руководитель: **Клячко Антон Александрович**,
кандидат физико-математических наук

Официальные оппоненты: **Романьков Виталий Анатольевич**,
доктор физико-математических наук, профессор, ФГБОУ
ВО "ОмГУ имени Ф.М. Достоевского", заведующий ка-
федрой компьютерной математики и программирования

Азаров Дмитрий Николаевич,
доктор физико-математических наук, доцент, ФГБОУ ВО
"Ивановский государственный университет", профессор
кафедры алгебры и математической логики

Дерябина Галина Сергеевна,
кандидат физико-математических наук, ФГБОУ ВО
"Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский
университет)", доцент кафедры вычислительной матема-
тики и математической физики (ФН-11)

Защита состоится 30 ноября 2018 г. в 16 часов 45 минут на заседании диссертационного совета МГУ.01.17 ФГБОУ ВО "Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова" по адресу: Российская Федерация, 119234, Москва, ГСП-1, Лененские горы, д. 1, МГУ имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, аудитория 14-08.
E-mail: msu.01.17@mail.ru

С диссертацией можно ознакомиться в читальном зале диссертаций Фундаментальной библиотеки ФГБОУ ВО "Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова" по адресу: Москва, Ломоносовский проспект, д. 27 и на сайте "Истина":
<https://istina.msu.ru/dissertations/150563554>

Автореферат разослан 30 октября 2018 года.

Ученый секретарь диссертационного
совета МГУ.01.17 ФГБОУ ВО МГУ
член-корреспондент РАН



Шафаревич Андрей Игоревич

Общая характеристика работы

Актуальность темы.

В диссертации изучаются понятия вербальной и алгебраической замкнутости подгрупп конкретных групп (не классов групп). Основные результаты связаны с установлением условий, при которых эти понятия эквивалентны. В основном изучаются подгруппы, строение которых в том или ином смысле близко к строению свободных групп (например, почти свободные группы, свободные произведения групп, фундаментальные группы замкнутых поверхностей с отрицательной эйлеровой характеристикой).

Алгебраически замкнутые объекты играют важную роль во многих (вероятно, всех) разделах современной алгебры. Чтобы исключить терминологическую путаницу, мы сразу приведем определение понятия алгебраической (а также экзистенциальной) замкнутости, которое сначала сформулируем в общем виде на языке теории моделей, а потом «переведем» его на групповой язык, которым и будем пользоваться в дальнейшем.

Пусть $\mathfrak{K}$ есть класс структур в языке первого порядка L без реляционных символов, тогда структура $A \in \mathfrak{K}$ называется алгебраически замкнутой в классе $\mathfrak{K}$, если для каждой позитивной экзистенциальной формулы $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ языка L с константами из A из того, что φ выполняется в некоторой структуре $B \in \mathfrak{K}$, содержащей A , следует, что φ выполняется в A . Если в приведенном определении вместо позитивных экзистенциальных формул рассматривать произвольные экзистенциальные формулы, то мы получим определение экзистенциально замкнутой структуры класса $\mathfrak{K}$. Общие факты об алгебраически замкнутых системах достаточно полно представлены в монографии Ходжеса (Hodges) ¹. Если L есть язык теоретико-групповой сигнатуры, а $\mathfrak{K}$ есть некоторый класс групп, то мы говорим, что группа H алгебраически замкнута в классе групп $\mathfrak{K}$, если любая конечная система уравнений с коэффициентами из H , имеющая решение в группе $G \in \mathfrak{K}$, содержащей H в качестве подгруппы, имеет решение в H .

Понятие группы, алгебраически (экзистенциально) замкнутой в классе групп, было введено Скоттом (Scott) для класса всех групп в работе ² и Селе (Szele) для класса всех абелевых групп в работе ³. Активное изучение экзистенциально замкнутых структур приходится на начало 70-х годов 20-го века ^{4,5}. Однако, алгебраические свойства алгебраически и экзистенциально замкнутых структур изучались лишь для немногих классов

¹ Hodges W. Model theory. — Cambridge University Press, 1993.

² Scott W.R. Algebraically closed groups // Proc. Amer. Math. Soc. — 1951. — Vol. 2, № 1. — P. 118–121.

³ Szele T. Ein Analogon der Körpertheorie für abelsche Gruppen // Journ. reine u. angew. Math. — 1950 — Vol. 1950, № 188. — P. 167–192.

⁴ Eklof P.C., Sabbagh G. Model-completions and modules // Ann. Math. Logic. — 1971. — Vol. 2, № 3. — P. 251–295.

⁵ Macintyre A. On Algebraically Closed Groups // Ann. of Math. — 1972. — Vol. 96, № 1. — P. 53–97.

групп. В 1970-80-е большого прогресса в этом направлении удалось достичь для класса всех групп, см., например, работы Белеградека^{6,7}, Циглера (Ziegler)⁸, а также монографию Хигмана (Higman) и Скотта (Scott)⁹. В настоящее время достаточно много известно об алгебраической структуре алгебраически и экзистенциально замкнутых групп в классе $\mathcal{K}$, где $\mathcal{K}$ состоит, например, из определенных типов нильпотентных^{10,11}, разрешимых^{12,13} или локально конечных^{14,15} групп.

Об алгебраически замкнутых подсистемах конкретных систем (не классов) известно мало. Говорят, что подгруппа H алгебраически замкнута в группе G , если любая конечная система уравнений с коэффициентами из H , имеющая решение в G , имеет решение в H . Ясно, что ретракт любой группы (то есть образ такого эндоморфизма ρ , что $\rho \circ \rho = \rho$) является алгебраически замкнутой подгруппой. При определенных ограничениях на H и G (см. утверждение 4) верна обратная импликация, позволяющая при изучении алгебраически замкнутых подгрупп применять относительно хорошо разработанную технику, связанную с изучением ретрактов групп^{16,17,18,19,20}.

В работе²¹ (см. также^{22,23}) было введено понятие вербально замкнутой подгруппы

⁶Белеградек О.В. Об алгебраически замкнутых группах // Алгебра и логика. — 1971. — Т. 13, № 3. — С. 239–255.

⁷Белеградек О.В. Элементарные свойства алгебраически замкнутых групп // Fund. Math. — 1978. Т. 98, № 2. — С. 83–101.

⁸Ziegler M. Algebraisch abgeschlossene Gruppen, in S.I. Adian, W.W. Boone and G. Higman (eds.), Word Problems II, The Oxford Book, North-Holland, Amsterdam 1980, P. 449–576.

⁹Higman G., Scott E. Existentially Closed Groups. — Oxford University Press, 1988.

¹⁰Maier B.J. On existentially closed and generic nilpotent groups // Israel J. Math. — 1983. — Vol. 46, № 3. — P. 170–188.

¹¹Maier B.J. Existentially Closed Torsion-Free Nilpotent Groups of Class Three // J. Symb. Logic. — 1984. — Vol. 49, № 1. — P. 220–230.

¹²Maier B.J. Existenziall abgeschlossene Gruppen in nilpotenten Gruppenklassen, Dissertation, Albert-Ludwigs-Universität, Freiburg, 1981.

¹³Saracino D. Wreath products and existentially complete solvable groups // Trans. Amer. Math. Soc. — 1974. — Vol. 197. — P. 327–339.

¹⁴Leinen F. Uncountable existentially closed groups in locally finite group classes // Glasgow Math. J. — 1990. — Vol. 32, № 2. — P. 153–163.

¹⁵Leinen F. Existentially closed locally finite p groups // J. Algebra. — 1986. — Vol. 103, № 1. — P. 160–183.

¹⁶Martino A., Ventura E. Examples of retracts in free groups that are not the fixed subgroup of any automorphism // J. Algebra. — 2003. — Vol. 269, № 2. — P. 735–747.

¹⁷Bergman G.M. Supports of derivations, free factorizations, and ranks of fixed subgroups in free groups // Trans. Amer. Math. Soc. — 1999. — Vol. 351, № 4. — P. 1531–1550.

¹⁸Voce D.A. Test words of a free product of two finite cyclic groups // Proc. Edinburgh Math. Soc. — 1997. — Vol. 40. — P. 551–562.

¹⁹Turner E.C. Test Words for Automorphisms of Free Groups // Bull. London Math. Soc. — 1996. — Vol. 28, № 3. — P. 255–263.

²⁰O'Neill J.C., Turner E.C. Test Elements and the Retract Theorem in Hyperbolic Groups // New York J. Math. — 2000. — Vol. 6. — P. 107–117.

²¹Мясников А., Романков В. Вербально замкнутые подгруппы свободных групп // J. Group Theory. — 2014. Vol. 17, № 1. — P. 29–40.

²²Романков В.А., Хисматов Н.Г. Вербально и экзистенциально замкнутые подгруппы свободных нильпотентных групп // Алгебра и логика. — 2013. — Т. 52, № 4. — С. 502–525.

²³Романков В.А., Хисматов Н.Г., Кондратьева А.А. Алгебраически и вербально замкнутые подгруппы и ретракты конечно порожденных нильпотентных групп // Сиб. матем. журн. — 2017. — Т. 58, № 3. — С. 686–699.

группы. А именно, подгруппа H вербально замкнута в группе G , если любое расцепимое уравнение, имеющее решение в G , имеет решение в H . На первый взгляд свойство вербальной замкнутости слабее свойства алгебраической замкнутости. И это действительно так в общем случае (см. лемму 1 или пример 14 в работе ²³). Естественным образом возникают вопросы о том, при каких дополнительных ограничениях на подгруппу H и группу G вербальная замкнутость эквивалентна алгебраической замкнутости, и когда алгебраически замкнутая подгруппа H группы G является ретрактом G .

В работе ²¹ была установлена следующая теорема, показывающая, что в конечно порожденных свободных группах вербально замкнутые подгруппы, алгебраически замкнутые подгруппы и ретракты -- это одно и то же.

Теорема Мясникова-Романькова [²¹, теорема 1.2]. *Вербально замкнутые подгруппы конечно порожденных свободных групп являются ретрактами.*

Этот результат позволил ввести в работе ²¹ для свободных групп понятие вербально-го замыкания подмножества, доказать ряд утверждений алгоритмического характера, а также установить, что пересечение произвольного семейства вербально замкнутых подгрупп конечно порожденной свободной группы есть вербально замкнутая подгруппа (что неверно в общем случае, см. следствие 1 или пример 15 в работе ²³). Теорема, аналогичная теореме Мясникова-Романькова, была установлена в работе ²² для случая конечно порожденных свободных нильпотентных групп.

Теорема Романькова-Хисамиева [²², теорема 2.1]. *Вербально замкнутая подгруппа свободной нильпотентной группы $N_{r,c}$ ранга $r \geq 1$ и степени нильпотентности $c \geq 1$ является ретрактом группы $N_{r,c}$.*

Цели и задачи работы.

Основной целью данной работы является изучение условий, которые надо положить на группу H для того, чтобы она была сильно вербально замкнутой группой (группа H сильно вербально замкнута, если она является алгебраически замкнутой подгруппой в любой группе, содержащей H в качестве вербально замкнутой подгруппы).

Основные результаты.

Основными результатами, полученными в настоящей диссертации, являются:

- доказательство сильной вербальной замкнутости всех почти свободных групп, не имеющих нетривиальных нормальных конечных подгрупп (пункт 1) теоремы 1);
- доказательство сильной вербальной замкнутости фундаментальных групп всех замкнутых поверхностей, за исключением бутылки Клейна (пункт 1) теоремы 2);

- доказательство сильной вербальной замкнутости всех свободных произведений групп вида $\ast_{i \in I} H_i$, где I есть любое множество, содержащие хотя бы два элемента, и H_i суть нетривиальные группы, удовлетворяющие нетривиальным тождествам (возможно, разным) (пункт 2) теоремы 2);
- доказательство достаточных условий сильной вербальной замкнутости для групп, являющихся расширениями неабелевой свободной группы при помощи группы, удовлетворяющей нетривиальному тождеству (теорема 3).

Апробация работы.

Основные результаты диссертации докладывались на:

- научно-исследовательском семинаре по алгебре под руководством профессора Н.В. Аржанцева, профессора В.А. Артамонова, профессора Е.П. Буинной, профессора Э.Б. Винберга, профессора Е.С. Голода, профессора А.Э. Гутермана, профессора М.В. Зайцева, профессора В.П. Латышева, профессора А.В. Михалева, профессора А.Ю. Олишанского, профессора Ю.Г. Прохорова и профессора Ю.П. Размыслова (механико-математический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова, 2017, 2018);
- на семинаре «Теория групп» под руководством профессора А.Ю. Олишанского, доцента А.А. Клячко и доцента О.В. Куликовой (механико-математический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова, 2013-2018, неоднократно);
- на семинаре «Кольца, модули и матрицы» под руководством профессора Е.С. Голода, профессора А.Э. Гутермана, профессора В.П. Латышева, профессора А.В. Михалева, доцента В.Т. Маркова и доцента О.В. Марковой (механико-математический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова, 2018);
- международной алгебраической конференции памяти А.Г. Куроша, 2018;
- международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2017»;
- международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2018».

Основные методы исследования.

В диссертации используются методы комбинаторной теории групп.

Теоретическая и практическая значимость.

Диссертация носит теоретический характер. Результаты и методы настоящей работы могут найти применение в теории групп.

Публикации.

Основные результаты данной диссертации опубликованы в 4 статьях [1–4] и 2 тезисах.

Работы [1–4] опубликованы в научных журналах из списка, рекомендованного ВАК, и соответствуют пункту 2.3. Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова.

Работа [3] написана в соавторстве с А.А. Клячко, работа [4] написана в соавторстве с А.А. Клячко и В.Ю. Мирошниченко.

Структура и объем диссертации.

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы из 53 наименований. Полный объем диссертации составляет 68 страниц.

Содержание работы

Во введении приведена краткая история вопроса и перечислены основные результаты диссертации.

В главе 1 вводятся основные обозначения, определения, устанавливается ряд общих и вспомогательных результатов.

В разделе 1.1 вводятся основные обозначения и даются ключевые для данной работы определения вербально и алгебраически замкнутой подгруппы:

- подгруппа H группы G называется вербально замкнутой (в G), если любое уравнение вида $w(x_1, \dots, x_n)h^{-1} = 1$, где $w(x_1, \dots, x_n) \in F_n(x_1, \dots, x_n)$ и $h \in H$, имеющее решение в G , имеет решение в H ;
- подгруппа H группы G называется алгебраически замкнутой (в G), если любая система уравнений вида:

$$\{w_i(x_1, \dots, x_n, H) = 1 \mid i = 1, \dots, m\}, \quad (1)$$

где $w_i(x_1, \dots, x_n, H) \in F_n(x_1, \dots, x_n) * H$, $i = 1, \dots, m$, имеющая решение в G , имеет решение в H .

Также в этом разделе перечисляются основные свойства вербально и алгебраически замкнутых подгрупп, в частности:

- доказывается, что вербально замкнутая подгруппа может не быть алгебраически замкнутой подгруппой (лемма 1);
- доказывается, что пересечение двух вербально замкнутых подгрупп может не быть вербально замкнутой подгруппой (следствие 1);
- устанавливаются достаточные условия, при которых гомоморфный образ вербально (алгебраически) замкнутой подгруппы вербально (алгебраически замкнут) (лемма 2).

Помимо этого, мы устанавливаем следующую лемму, показывающую, что (в общем случае) условие вербальной замкнутости слабее условия алгебраической замкнутости. Отметим, что, по сути, аналогичное утверждение было установлено независимо от нас в работе [23, см. пример 14].

Лемма 1. Пусть группа G имеет вид $G = Q_8 \times_C Q_8 \times B$, где $Q_8 \times_C Q_8$ есть прямое произведение двух экземпляров группы кватернионов (порядка восемь) с объединенными центрами (то есть $C = \{\pm 1\}$), а B есть произвольная группа. Пусть подгруппа H группы G есть прямое произведение второго и третьего сомножителей группы G , то есть $H = C \times_C Q_8 \times B$. Тогда подгруппа H вербально замкнута в группе G , но не алгебраически замкнута в G .

В разделе 1.2 мы напоминаем известный факт о том, что в определении алгебраически замкнутой подгруппы достаточно рассматривать лишь системы уравнений, состоящие из расцепленных уравнений определенного вида (см. утверждение 3).

В разделе 1.3 рассматривается вопрос о том, при каких условиях, наложенных на H и G , алгебраически замкнутая подгруппа H группы G является ретрактом G (то есть является образом такого эндоморфизма ρ группы G , что $\rho \circ \rho = \rho$).

Группу H называют петеровой по уравнениям^{24,25}, если каждая система уравнений с коэффициентами из H и конечным числом неизвестных эквивалентна (то есть имеет такое же множество решений в H) своей конечной подсистеме. Говорят, что группа G конечно порождена над своей подгруппой H , если $G = \langle X, H \rangle$ для некоторого конечного множества $X \subseteq G$.

Основными фактами, установленными в данном разделе, являются следующие пункты утверждения 4 (см. [21, предложение 2.2]):

²⁴ Baumslag G., Myasnikov A., Roman'kov V. Two Theorems about Equationally Noetherian Groups // J. Algebra. – 1997. – Vol. 194, № 2. – P. 654–664.

²⁵ Гриня И. К., Романовский И. С. Петеровость по уравнениям некоторых разрешимых групп // Алгебра и логика. – 2007. – Т. 46, № 1. – С. 46–59.

- если группа G конечно порождена над H и H есть нетерова по уравнениям алгебраически замкнутая подгруппа в G , то H является ретрактом группы G ;
- нетерова по уравнениям подгруппа H группы G алгебраически замкнута в G тогда и только тогда, когда она является ретрактом каждой конечно порожденной над H подгруппы группы G .

В разделе 1.4 вводится еще одно ключевое для данной работы определение — определение сильно вербально замкнутой группы:

- группа H сильно вербально замкнута, если H является алгебраически замкнутой подгруппой в любой группе, в которой она является вербально замкнутой подгруппой.

Также в этом разделе устанавливаются достаточные условия, при которых прямое произведение сильно вербально замкнутых групп является сильно вербально замкнутой группой. А именно, мы доказываем следующие два утверждения.

Запись $C_G(X)$ обозначает централизатор подмножества $X \subseteq G$ в группе G .

Утверждение 5. Пусть сильно вербально замкнутые группы A и B таковы, что существуют такие элементы $v_j \in A$ и $u_j \in B$, $j = 1, \dots, k$, что $\bigcap_{j=1}^k C_A(v_j) = \{1\}$ и $\bigcap_{j=1}^k C_B(u_j) = \{1\}$. Тогда группа $H = A \times B$ сильно вербально замкнута.

Утверждение 6. Пусть A есть абелева группа, B есть сильно вербально замкнутая группа и существуют такие элементы $u_j \in B$, $j = 1, \dots, k$, что $\bigcap_{j=1}^k C_B(u_j) = \{1\}$. Тогда группа $H = A \times B$ сильно вербально замкнута.

В главе 2 устанавливается сильная вербальная замкнутость почти свободных групп, не имеющих нетривиальных конечных нормальных подгрупп.

Материал главы 2 основан на результатах работ [3] и [1].

В разделе 2.1, являющемся введением к главе 2, формулируется основной результат данной главы — теорема 1.

Группа H называется почти свободной группой, если в H существует свободная подгруппа конечного индекса.

Теорема 1. Пусть H есть почти свободная группа, не имеющая нетривиальных нормальных конечных подгрупп. Тогда:

- 1) группа H сильно вербально замкнута;
- 2) если группа G конечно порождена над H и подгруппа H вербально замкнута в G , то H является ретрактом группы G .

Отметим, что каждая нетривиальная свободная группа H удовлетворяет всем условиям теоремы и, следовательно, является ретрактом в любой конечно порождённой группе, содержащей H в качестве вербально замкнутой подгруппы (очевидно, что тривиальная подгруппа является ретрактом любой группы). Следовательно, теорема 1 обобщает теорему Мясникова-Романькова, сформулированную ранее.

В разделе 2.2 рассматривается ряд примеров, показывающих, что теорема 1 не улучшается в некотором смысле. В частности, мы показываем, что, с одной стороны, условие отсутствия в H нетривиальных конечных нормальных подгрупп нельзя отбросить в формулировке теоремы 1, а с другой стороны, это условие не является необходимым.

Раздел 2.3 посвящен доказательству теоремы 1. Основная сложность здесь заключается в доказательстве первого пункта, тогда как второй пункт достаточно легко выводится из первого пункта и известных результатов. Наше доказательство пункта 1) теоремы 1 разделено на две части. В первой части мы рассматриваем случай почти циклической группы H (то есть случай, когда в H существует циклическая подгруппа конечного индекса), во второй части мы рассматриваем случай не почти циклической H .

В подразделе 2.3.1, являющимся первой частью доказательства пункта 1) теоремы 1, мы рассматриваем случай почти циклической группы H . Основную трудность здесь представляет доказательство сильной вербальной замкнутости бесконечной диэдральной группы, $D_\infty \simeq \langle a, b \mid a^2, b^2 \rangle$, которую мы выводим из утверждения 4 и леммы 6, представляющей отдельный интерес как своего рода критерий вербальной замкнутости для подгруппы D_∞ . Мы не приводим здесь формулировку леммы 6, так как для ее понимания необходимо ввести целый ряд вспомогательных понятий (см. стр. 30-33).

Также в этом разделе мы доказываем сильную вербальную замкнутость всех абелевых групп (см. утверждение 7) и устанавливаем критерий вербальной замкнутости для абелевой подгруппы (см. следствие 2).

В подразделе 2.3.2, являющимся второй частью доказательства пункта 1) теоремы 1, мы рассматриваем случай не почти циклической группы H .

В начале подраздела мы вводим понятие C -тестового слова L_n ²⁶:

C -тестовым словом L_n от m переменных для свободной группы F_r ранга r называют такой элемент $L_m(z_1, \dots, z_m) \in F_m(z_1, \dots, z_m)$, что одновременно выполнены условия:

- 1) если $L_m(g_1, \dots, g_m) = L_m(g'_1, \dots, g'_m) \neq 1$ в F_r , то элементы $g'_i \in F_r$ получаются из элементов $g_i \in F_r$ одновременным сопряжением, то есть для некоторого $s \in F_r$ имеют место равенства $g'_i = g_i^s$ для всех $i = 1, \dots, m$;

²⁶ Lee D. On Certain C -Test Words for Free Groups // J. Algebra. — 2002. — Vol. 247. № 2. — P. 509-540.

- 2) $L_m(g_1, \dots, g_m) = 1$ тогда и только тогда, когда элементы $g_1, \dots, g_m$ группы F_r лежат в одной циклической подгруппе.

На основании существования C -тестовых слов L_n для всех $m, r \geq 2$ мы доказываем (см. лемму 8) существование универсального C -тестового слова L_n от $m \geq 2$ переменных, то есть такого элемента $L(z_1, \dots, z_m) \in F_m$, что свойства 1) и 2) выполняются во всех свободных группах.

Далее мы приводим доказательство пункта 1) теоремы 1 для случая не почти циклической группы H . Наше доказательство опирается на существование универсального C -тестового слова L_n для любого $m \geq 2$.

В главе 3 мы продолжаем изучение сильно вербально замкнутых групп. Основной результат этой главы — это доказательство достаточных условий сильной вербальной замкнутости для группы, являющихся расширениями неабелевой свободной группы при помощи группы, удовлетворяющей нетривиальному тождеству (теорема 3). Используя эти условия и полученные ранее результаты, мы также устанавливаем сильную вербальную замкнутость некоторых типов групп (теорема 2).

Материал главы 3 основан на результатах работ [1] и [4].

В разделе 3.1, являющемся введением к главе 3, формулируются теорема 2 и теорема 3 — основной результат главы 3.

Теорема 2 устанавливает сильную вербальную замкнутость некоторых типов групп.

Пусть $I(x_1, \dots, x_r) \neq 1$ есть элемент свободной группы $F_r(x_1, \dots, x_r)$ с базисом $x_1, \dots, x_r$, тогда мы говорим, что группа G удовлетворяет нетривиальному тождеству I , если для всех $g_1, \dots, g_r \in G$ мы имеем $I(g_1, \dots, g_r) = 1$ в G .

Теорема 2. *Сильно вербально замкнутыми являются:*

- 1) *фундаментальные группы всех замкнутых поверхностей, за исключением, возможно, бутылки Клейна;*
- 2) *все свободные произведения $\ast_{i \in I} H_i$, где I есть любое множество, содержащие хотя бы два элемента, и H_i суть нетривиальные группы, удовлетворяющие нетривиальным тождествам (возможно, разным).*

Отметим, что мы не знаем, является ли фундаментальная группа бутылки Клейна, то есть группа $\langle a, b \mid a^2b^2 \rangle$, сильно вербально замкнутой.

Теорема 3 устанавливает достаточные условия, при которых группа, являющаяся расширением неабелевой свободной группы при помощи группы, удовлетворяющей нетривиальному тождеству, является сильно вербально замкнутой. Прежде чем сформулировать эту теорему, введем необходимые понятия.

Пусть $I(x_1, \dots, x_r)$ есть элемент свободной группы $F_r(x_1, \dots, x_r)$ с базисом $x_1, \dots, x_r$, тогда вербальной подгруппой группы G , порожденной словом I , $I(G)$, мы называем группу $I(G) = \langle \{I(g_1, \dots, g_r) \mid g_1, \dots, g_r \in G\} \rangle$. Например, символы $I(\langle x \rangle_\infty)$ и $I(H)$ обозначают вербальные подгруппы бесконечной циклической группы $\langle x \rangle_\infty$ и группы H , порожденные словом I , соответственно. Нормальным замыканием подмножества $X \subseteq H$ в группе H , X^H , мы называем (нормальную) подгруппу $X^H = \langle \{h^{-1}xh \mid x \in X, h \in H\} \rangle$ группы H (например, символ $I(H)^{(x)_\infty * I(H)}$ обозначает нормальное замыкание $I(H)$ в группе $\langle x \rangle_\infty * I(H)$). Мы называем группу G делимой группой, если G абелева, и для любого $g \in G$ и $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ в G разрешимо уравнение $z^n = g$. Для подгруппы H и U группы G , где U нормальна в G , символ $H \cdot U$ обозначает подгруппу $\{hu \mid h \in H, u \in U\}$ в G . Короткой точной последовательностью групп мы называем последовательность групп вида:

$$1 \rightarrow G_1 \xrightarrow{\varphi_1} G_2 \xrightarrow{\varphi_2} G_3 \rightarrow 1,$$

где φ_1 — мономорфизм, φ_2 — эпиморфизм, и образ φ_1 совпадает с ядром φ_2 . Символы $Z(H)$ и H' обозначают центр и коммутант группы H соответственно.

Теорема 3. *Если группа H такова, что существует:*

- T1) *короткая точная последовательность групп вида $1 \rightarrow F \rightarrow H \rightarrow A \rightarrow 1$, где F есть неабелева свободная группа, и A есть группа, удовлетворяющая тривиальному тождеству I_A ;*
- T2) *делимая подгруппа Q группы H такая, что $Q \subseteq Z(H)$ и $Q \cap H' = \{1\}$;*
- T3) *порождающее множество $U = U^{-1}$ группы H такое, что для любого $u \in U$ существуют такие элементы $E_{u,k}(x, I_A(H)) \in I_A(\langle x \rangle_\infty) \cdot I_A(H)^{(x)_\infty * I_A(H)}$, $k = 1, \dots, n_u$, что (относительно x) система уравнений:*

$$\{E_{u,k}(x, I_A(H)) = E_{u,k}(u, I_A(H)) \mid k = 1, \dots, n_u\}$$

имеет единственное решение в факторгруппе H/Q ,

то H есть сильно вербально замкнутая группа.

Также в этом разделе устанавливается следующее утверждение, аналогичное, в определенном смысле, пункту 2) теоремы 1.

Утверждение. *Если H есть фундаментальная группа замкнутой поверхности, отличной от бутылки Клейна, то H есть ретракт любой конечно порожденной над H группы G , содержащей H в качестве вербально замкнутой подгруппы.*

В разделе 3.2 мы приводим ряд примеров и следствий, демонстрирующих применение теоремы 3. В частности, в этом разделе мы, по сути, доказываем теорему 2 при дополнительных предположениях о том, что в пункте 2) индексирующее множество I конечно, и $H \not\cong \langle a, b \mid a^2, b^2 \rangle$ (см. лемму 12 и следствие 4).

Также в этом разделе мы устанавливаем следующее следствие, являющуюся «упрощенной версией» теоремы 3.

Следствие 3. Пусть $1 \rightarrow F \rightarrow H \rightarrow A \rightarrow 1$ есть такая короткая точная последовательность групп, что F есть свободная неабелева группа, а группа A удовлетворяет нетривиальному тождеству I_A . Тогда, если $Z(H)$ есть делимая группа, $Z(H) \cap H' = \{1\}$ и найдутся такие элементы $f_1, \dots, f_m \in I_A(H)$, что $C_H(f_1, \dots, f_m) = Z(H)$, то H есть сильно вербально замкнутая группа.

Раздел 3.3 посвящен доказательству теорем 2 и 3. Основную трудность здесь представляет доказательство теоремы 3, тогда как теорема 2 легко выводится из теоремы 3 и уже установленных фактов. Ключевую роль при доказательстве теоремы 3 играет следующая лемма, где символ $\underline{x}$ обозначает кортеж вида $x_1, \dots, x_n$, а $F(\underline{x})$ есть свободная группа с базисом $x_1, \dots, x_n$.

Лемма 14. Пусть $I(H)$ и $I(F(\underline{x}))$ суть вербальные подгруппы групп H и $F(\underline{x})$, порожденные словом I соответственно. Если $I(H)$ есть неабелева свободная группа, и H есть вербально замкнутая подгруппа в группе G , то каждая система уравнений (относительно переменных $\underline{x}$) вида:

$$\{w_i(\underline{x}, I(H)) = 1 \mid i = 1, \dots, m\}, \quad (2)$$

где $w_i(\underline{x}, I(H)) \in I(F(\underline{x})) \cdot I(H)^{F(n) \cdot I(H)}$, имеющая решение в G , имеет решение в H .

Доказательство леммы 14, как и доказательство пункта 1) теоремы 1 для случая не почти циклической группы H , основано на использовании универсальных C -тестовых слов Лн.

В заключении перечисляются основные результаты работы, приводятся ряд результатов, которые планируется установить в дальнейшем, и формулируются некоторые открытые вопросы.

В частности, из установленных в работе результатов выводится следующая теорема, объединяющая первые три основных результата, выносимые на защиту.

Теорема. Пусть:

- 1) $\mathcal{M}_n$ есть множество всех почти свободных не почти циклических групп, не имеющих нетривиальных нормальных конечных подгрупп;

- 2) M_f есть множество всех групп вида $\ast_{i \in I} B_i$, где I есть любое множество, содержащее хотя бы два элемента, и B_i суть нетривиальные группы, удовлетворяющие нетривиальным тождествам (возможно, разным);
- 3) M_s есть множество всех фундаментальных групп замкнутых поверхностей с отрицательной эйлеровой характеристикой.

Тогда группа вида $A \times H_1 \times \dots \times H_n$, где $n \geq 0$, A есть абелева группа, и все $H_i \in M_v \cup M_f \cup M_s$, сильно вербально замкнута.

Также в этом разделе мы приводим формулировки некоторых утверждений, которые планируется установить в дальнейшем. Помимо этого, мы формулируем несколько нерешенных проблем.

Заключение

В настоящей диссертации автором получены следующие основные результаты:

- доказана сильная вербальная замкнутость всех почти свободных групп, не имеющих нетривиальных нормальных конечных подгрупп;
- доказана сильная вербальная замкнутость фундаментальных групп всех замкнутых поверхностей, за исключением бутылки Клейна¹;
- доказана сильная вербальная замкнутость всех свободных произведений групп вида $\ast_{i \in I} H_i$, где I есть любое множество, содержащее хотя бы два элемента, и H_i суть нетривиальные группы, удовлетворяющие нетривиальным тождествам (возможно, разным);
- установлены достаточные условия сильной вербальной замкнутости для групп, являющихся расширениями неабелевой свободной группы при помощи группы, удовлетворяющей нетривиальному тождеству.

Полученные результаты могут найти применение в различных областях теории групп.

¹Для фундаментальной группы бутылки Клейна, $\langle a, b \mid a^2b^2 \rangle$, ответ на этот вопрос остается открытым.

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю кандидату физико-математических наук, доценту Антону Александровичу Клячко за постановки задач и постоянное внимание к работе.

Автор выражает благодарность доктору физико-математических наук, профессору Виктору Николаевичу Латышеву за его замечательный курс лекций «Алгебра», побудивший автора стать студентом, а затем и аспирантом Кафедры высшей алгебры Механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова.

Автор благодарен сотрудникам кафедры Высшей алгебры Механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова за создание творческой и комфортной обстановки для учебной и научной деятельности.

Публикации автора по теме диссертации

Научные статьи, опубликованные в журналах Scopus и RSCI

- [1] *Mazhuga A.M.* Strongly verbally closed groups // *J. Algebra.* — 2018. — Vol. 493. — P. 171–181. **Scopus.**

См. также arXiv:1707.02464.

- [2] *Mazhuga A.M.* On free decompositions of verbally closed subgroups of free products of finite groups // *J. Group Theory.* — 2017. — Vol. 20, № 5. — P. 971–986. **Scopus.**

См. также arXiv:1605.01766.

- [3] *Клячко А.А., Мажуга А.М.* Вербально замкнутые почти свободные подгруппы // *Матем. сб.* — 2018. — Т. 209, № 6. — С. 75–82. **Scopus, RSCI.** *Вклад всех авторов равноценен и неразделим.*

См. также arXiv:1702.07761.

- [4] *Klyachko A.A., Mazhuga A.M., Miroshnichenko V.Yu.* Virtually free finite-normal-subgroup-free groups are strongly verbally closed // *J. Algebra.* — 2018. — Vol. 510. — P. 319–330. **Scopus.** *Вклад всех авторов равноценен и неразделим.*

См. также arXiv:1712.03406.

Другие публикации

- [1] *Mazhuga A.M.* Free products of groups are strongly verbally closed
См. arXiv:1803.10634 [34 pp.].
- [2] *Мажуга А.М.* Вербально замкнутые подгруппы в свободных произведениях конечных групп // Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2017» / Отв. ред. И.А. Алешковский, А.В. Андриянов, Е.А. Антипов. [Электронный ресурс] - М.: МАКС Пресс, 2017. --- https://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov_2017/data/10841/uid143582_report.pdf (дата обращения 16.10.2018).
- [3] *Мажуга А.М.* Сильно вербально замкнутые группы // Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2018» / Отв. ред. И.А. Алешковский, А.В. Андриянов, Е.А. Антипов. [Электронный ресурс] - М.: МАКС Пресс, 2018. --- https://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov_2018/data/13553/72567uid143582_report.pdf (дата обращения 16.10.2018).

Подписано в печать «18» октября 2018 г. Формат 60х84/16

Бумага офсетная. Печать офсетная.

Усл. авт. л. 1.

Тираж 111 экз. Заказ № 15 Типография НИУ ВШЭ,

125319, г. Москва, Кочновский проезд, д. 3.

