Паненко Роман Анатольевич. Пространства Орлича на группах, многообразиях и графах: диссертация ... кандидата Физико-математических наук: 01.01.01 / Паненко Роман Анатольевич;[Место защиты: ФГБУН Институт математики им. С.Л.Соболева Сибирского отделения Российской академии наук], 2018

**Введение к работе**

**Актуальность работы.** Предметом исследования данной работы являются Ж-функции и пространства Орлича в приложении к объектам различной природы: как дискретным, так и некоторым вопросам, связанным с многообразиями.

В последние десятилетия достаточное распространение получили аналитические методы изучения дискретных структур, в значительной степени в связи с прорывными работами Михаила Громова и других авторов по геометрической теории групп. В частности, одним из примеров подобной деятельности может служить применение гармонического анализа для изучения аменабельности и свойства (Т) Каждана1. Также вопросы роста дискретных групп «на бесконечности» и наличие неподвижных точек при непрерывном изометрическом аффинном действии группы на банаховом пространстве тесно связаны в контексте гармонического анализа с одномерными когомологиями группы с коэффициентами в соответствующем банаховом модуле2.

Таким образом, гармонический (в нашем случае Ф-гармонический) анализ на дискретных структурах, помимо своей собственной проблематики, представляет интерес в силу близкого родства между данными структурами и традиционно геометрическими объектами и методами.

В частности, дискретный аналог оператора Лапласа-де Рама связан с комбинаторной структурой симплициального комплекса, соответствующего графу Кэли группы. В том смысле, что первые групповые ко-гомологии в действительности могут рассматриваться как элементы из

1В. Bekka, P. de la Harpe, and A. Valette, *Kazhdan's Property (T),* Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2008.

2M. Puis, *The first Lp-cohomology of some finitely generated groups and p-harmonic functions,* J. Funct. Anal. 237 (2006), no. 2, 391-401.

пространства сопряженного симплициальному комплексу графа Кэли.

В связи с анализом на многообразиях также имеются важные приложения. Де Рамом была предложена операция, позволяющая сглаживать дифференциальные формы и элементы сопряженного формам пространства — потоки. Оказывается, что данная процедура имеет вполне прозрачный категорный смысл: операторы регуляризации задают мор-физмы комплексов де Рама и удовлетворяют формуле гомотопии. На практике это дает нам возможность ограничиться подсчетом когомоло-гий подкомплекса гладких форм.

**Цель работы** — развитие методов дискретного гармонического анализа в пространствах Орлича. А так же изучение операторов регуляризации де Рама для дифференциальных форм в пространстве Орлича.

**Основные результаты:**

1. Распространяя утверждения, ранее установленные для лебеговых пространств, на пространства Орлича, получено описание первых ^ф-когомологий групп с помощью пространства Ф-гармонических функций. Доказана теорема о разложении функции с конечной Ф-энергией Дирихле и ряд утверждений о занулении первых ^ф-когомологий.
2. Введено понятие Ф-лапласиана и Ф-гармонических функций для бесконечных графов ограниченной степени и получены дискретные аналоги классических утверждений гармонического анализа, в частности: неравенство Гарнака, теорема единственности, теорема Гарнака о пределе монотонной последовательности гармонических функций и другие.
3. Установлена справедливость теоремы о свойствах операторов регуляризации де Рама для случая пространств Орлича дифферен-

циальных форм. В частности, показано, что операция регуляризации позволяет установить изоморфизм когомологий Ьф-комплекса де Рама и когомологий его подкомплекса гладких форм.

**Научная новизна. В** диссертации получены результаты, распространяющие теорию, построенную для лебеговых пространств, на случай пространств Орлича.

В главе посвященной вопросам Ф-гармонического анализа и представлению первых групповых когомологий с помощью пространства функций с конечной Ф-энергией Дирихле развиваютсят идеи предложенные в работах М. Пулса1, а также Ф. Мартена и А. Валлета2.

Теорема о свойствах операторов регуляризации распространяет результаты В. М. Гольдштейна, В. И. Кузьминова и И. А. Шведова, опубликованные в 1984 году3.

Так же вводится понятие Ф-лапласиана для бесконечных графов и устанавливаются основные свойства Ф-гармонических функций. Для случая р-гармонических функций аналогичные результаты содержатся в работе Холопайнена и Соарди4.

**Теоретическая и практическая ценность. В** диссертационной работе развиваются методы дискретного гармонического анализа в пространствах Орлича, что является логичным обобщением теории гармонического и р-гармонического анализа. Описание первых когомоло-

1М. Puis, *The first Lp-cohomology of some finitely generated groups and p-harmonic functions,* J. Funct. Anal. **237** (2006), no. 2, 391-401.

2F. Martin and A. Valette, *On the first Lp -cohomology of discrete groups,* Groups Geom. Dyn. 1 (2007), no. 1, 81-100.

3V. M. Gol'dshtein, V. I. Kuz'minov, and I. A. Shvedov, *A property of de Rham regularization operators,* Sibirsk. Mat. Zh. 25 (1984), no. 2, 104-111;

4I. Holopainen and P. M. Soardi, *p-harmonic functions on graphs and manifolds,* Manuscripta mathematica 94.1 (1997), 95-110.

гий групп с помощью гармонических функций развивает идеи теории Ходжа и позволяет с большой наглядностью проиллюстрировать связь первых групповых когомологий с комбинаторно-геометрическими свойствами графа Кэли, соответствующего группе.

Теорема о свойствах операторов регуляризации показывает, что данные операторы задают гомотопию Ьф-комплекса де Рама и его подкомплекса, состоящего из гладких форм, что позволяет установить изоморфизм Ьф-когомологий и Ьф-когомологий, взятых по гладким формам.

**Личный вклад соискателя.** Результаты работ [1,3], включенные в диссертацию, получены автором единолично. Результаты статьи [2], касающиеся свойств операторов регуляризации де Рама, получены в неделимом соавторстве с научным руководителем Копыловым **Я.**А.

**Апробация работы.** Результаты диссертации были представлены автором в ходе выступления на нескольких локальных и международных научных конференциях. В частности:

Мальцевские чтения (ИМ СО РАН, Новосибирск, 2013 г.), *Ф-Нагтопгс Functions on Discrete Groups and First (^'-Cohomology.*

Knots, braids and automorphism groups (ИМ CO РАН, Новосибирск, 2014 г.), *Orlicz Spaces and First Cohomology of Discrete Groups.*

Дни геометрии в Новосибирске (ИМ СО РАН, Новосибирск, 2015 г.), *Операторы регуляризации де Рама в пространствах Орлича дифференциальных форм на римановых многообразиях.*

Graphs and Groups, Spectra and Symmetries (ИМ CO РАН, Новосибирск, 2016 г.), Ф*-Harmonic Functions on Graphs.*

Также данные результаты докладывались на научных семинарах ИМ СО РАН: семинар отдела анализа и геометрии под руководством акад.

Ю.Г. Решетника; семинар лаборатории теории функций под руководством чл.-корр. РАН А.Ю.Веснина, д.ф.-м.н. проф. А.Д.Медных и д.ф.-м.н, проф. В.В.Асеева; семинар лаборатории прикладного анализа под руководством чл.-корр. РАН А.Ю.Веснина.

**Публикации. По** теме диссертации соискателем опубликовано 3 статьи в научных журналах, соответствующих требованиям ВАК для публикации научных результатов кандидатских диссертаций.

**Структура и объем диссертации.** Работа состоит из четырех глав, а также введения и заключения. Таким образом, диссертация включает в себя главу, содержащую предварительные понятия теории пространств Орлича, и три главы, посвященные изучению групп, графов и дифференциальных форм на многообразии. Так же работа снабжена списком литературы.