**Книжнерман, Леонид Аронович.**

## Приложение метода оптимальных коэффициентов к численному решению уравнений в частных производных : диссертация ... кандидата физико-математических наук : 01.01.06, 01.01.07. - Москва, 1980. - 80 с. : ил.

## Введение диссертации (часть автореферата)на тему «Приложение метода оптимальных коэффициентов к численному решению уравнений в частных производных»

В [13] Н.М.Коробов предложил метод численного интегриЫрования функций класса Е 5 /в - целое положительное, сЛ > ^ - вещественное/, т.е. функций, определённых на единичном кубе = Ео,\*/] , коэффициенты классического ряда чурье которых ито (И1'Х1 + . + и5 ос5)

- ^

С И<,.И& & удовлетворяют неравенству

I Си,. и$ I \* сб С Я,. Ws) 9 где Иу - kytcox^ (4, lui) и Сб не зависит от Vi-L . Н.М.Коробов построил куб&турные формулы с помощью сеток, узлы которых получаются из теоретико-числовых соображений. Погрешность приближённого интегрирования функции f класса

В s с помощью замены интеграла средним значением в узлах оптимальной параллелепипедальной сетки на р узлах есть величина

04 Р"1 WP ), (i) где У не зависит от р и £ . Оценка (I) на классе Е\* при любом выборе сеток может быть улучшена лишь на логарифмический множитель.

Предложенный метод был назван методом оптимальных коэффициентов /"оптимальные коэффициенты" - некоторый набор целых чисел, определяющий сетку/; он изложен в [16],

Liv] .

Ряд работ по теории оптимальных коэффициентов и её приложениям принадлежит Н.С.Вахвалову /см. [I], [2]/.

Рассмотрим класс / о(>Д - целое/ функций определённых на и таких, что производная

Р и«)

4- ы.

-х1 . -х5 и подчинённые ей существуют и непрерывны на /вплоть до границы/. Реализуя одно замечание Н.Н.Ченцова И, И.Ф.Шарыгин [39] расширил область применимости метода оптимальных коэффициентов до класса И5 , предложив периодизирующую замену переменных, преобразующую непериодическую функцию класса Н5 в функцию класса Ьз • Вопросами периодизации занимались также Н.С.Бахвалов и Н.М.Коробов.

В.С.Рябенький [29] и С.А.Смоляк [32[] показали, что оптимальные коэффициенты могут быть применены при аппроксимации функций класса Е^ . В работе [[29] предложено

Л гприближенно вычислять коэффициенты Фурье функции методом оптимальных коэффициентов и определять аппроксимирующий тригонометрический многочлен равенством г) где С-и-,.-^ - полученные указанным способом приближённые коэффициенты Фурье. При этом требуется знание значений £ лишь в узлах оптимальной параллелепипедальной сетки.

Распространяя естественным образом определение класса Н^ на ограниченные замкнутые области в Ц^ , В.М.Соло-дов [34], используя оптимальные коэффициенты, построил для функций класса И5 , производные которых известны, кубатурные формулы на некоторых областях, отличных от Сг5 . Интегральное уравнение Фредгольма второго рода с ядром, задающим сжимающий интегральный оператор, можно, как известно, решать методом итераций. В [1б] Н.М.Коробов предложил считать возникающие при этом интегралы на кубах £5 /с растущим 5 / с помощью оптимальных коэффициентов. В [14] для случая, когда интегральный оператор не является сжимающим, построен коллокационный метод со слоями ядра в качестве базисных функций и с точками оптимальной параллеле-пипедальной сетки в качестве узлов коллокации.

При решении методом итераций интегрального уравнения

Вольтерра второго рода приходится считать интегралы ос о О о по многогранникам специального вида /К - ядро/. В этом случае Ю.Н.Шахову [40], [41^ удалось построить теоретико-числовые кубатурные формулы, не использующие производных заданных функций.

Теоретико-числовые методы аппроксимации, решения интегральных уравнений и нахождения собственных значений интегральных операторов исследовались также в [9Д, [22], [27], [42], [45], [46], [47].

В [16], § 12, приведён пример применения оптимальных коэффициентов к приближённому решению уравнений в частных производных. Собственно говоря, в [1б] решается не какая--нибудь краевая задача, а ищется периодическое решение уравнения Пуассона с периодической правой частью. Правая часть заменяется аппроксимирующим тригонометрическим многочленом В.С.Рябенького, после чего легко вычислить приближённые коэффициенты Фурье решения /кроме коэффициента с нулевыми индексами, который остаётся свободным/.

В работе В.С.Рябенького £30Д оптимальные коэффициенты применяются при решении задачи Коши для эволюционного уравнения, решение которого периодично по всем пространственным переменным. Эта задача приближённо сводится к задаче Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Я.М.Жилейкин в [в], [ю] использовал явное интегральное представление решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа, считая возникающие при этом интегралы с помощью оптимальных параллелепипедальных сеток. Также к счёту интегралов свёл В.Т.Стоянцев [Зб| задачу Коши для параболического уравнения с пространственно-периодическим решением, заменяя её эквивалентным интегральным уравнением.

Характерной чертой перечисленных выше методов решения задач вычислительной математики, использующих оптимальные коэффициенты, является то, что оценки их погрешности практически не зависят от размерности /на классах Н5 /и улучшаются с возрастанием гладкости входных функций.

Настоящая диссертация посвящена приложениям метода оптимальных коэффициентов к численному решению краевых, начально-краевых и некорректных начальных задач для уравнений в частных производных. Никакой периодичности решения, коэффициентов уравнений или правых частей не предполагается.

Диссертация состоит из трёх глав.

Первая глава носит вспомогательный характер и содержит леммы, необходимые для дальнейшего изложения. Она начинается параграфом, содержащим нужные нам сведения о методе оптимальных коэффициентов и о двух видах классических ортогональных многочленов - ультрасшерических и многочленах

Эрмита. В § 2, 3 оценивается погрешность ^ и вычисления коэффициента по си°теме ортогональных многочленов с помощью оптимальных коэффициентов I ~ приближённое значение ^ , полученое с помощью оптимальной параллелепипедальной сетки на р узлах/. Как следствие, в § 2 для функции £ , определённой на А и принадлежащей классу Н5 , и для аппроксимирующего ряда по многочленам Лежандра Ри & - параметр, сравните с (21 / получается оценка погрешности аппроксимации

4)

Отметим, что при оптимальном выборе в (4) параметра 0. , х р 3 , имеем оценку

Н-?16= 0Чр"\*+вЬО), (5) где в (о1) ограничены равномерно по оС /.