На правах рукописи

Абрамчук Руслан Алексеевич

Киральный недиссипативный транспорт в квантовых теориях поля и в системах с индуцированной релятивистской инвариантностью

Специальность 01.04.02 —
«Теоретическая физика»

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2022

Работа выполнена в лаборатории на кафедре Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)».

Научный руководитель: доктор физ.-мат. наук
Зубков Михаил Александрович

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное учреждение «Институт физики высоких энергий» имени А.А. ЛОГУНОВА Национального исследовательского центра «Курчатовский институт» (НИЦ «Курчатовский институт» – ИФВЭ)

Защита состоится 23 сентября 2022 г. в 11 часов 00 минут на заседании диссертационного совета ЛФИ 01.04.02.009, созданного на базе федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Московский физико-технический технический институт (национальный исследовательский университет)» (МФТИ, Физтех)

по адресу: 141701, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский переулок, д. 9.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке МФТИ, Физтех и на сайте организации https://mipt.ru .

Автореферат разослан «__» _________ 2022 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Кузьмичёв Павел Константинович

Общая характеристика работы

Актуальность темы

В прошедшем десятилетии в мировой научной литературе по теоретической физике активно обсуждался так называемый киральный транспорт, эта тема даже стала входить в курсы теоретический физики в высших учебных заведениях.

Киральные эффекты оказались привлекательными с точки зрения теоретической физики как потенциально точно вычисляемые транспортные эффекты. Что даже более существенно, киральные эффекты существуют в термодинамическом равновесии, а значит их токи должны быть недиссипативными. Хотя отсутствие поправок к стандартным выражениям для кирального транспорта непосредственно не доказано, распространённым аргумент в пользу их отсутствия — кажущаяся очевидной связь киральных эффектов с киральной (аксиальной) аномалией. Выражение для киральной аномалии является исключительно редким примером точного результата в квантовой теории поля. К тому же, простота теории киральных эффектов обусловлена выбором специальных, иногда гипотетических, наблюдаемых, которые фигурируют в итоговых выражениях.

Активные теоретические исследования киральных эффектов развернулись в связи с развитием экспериментальной физики. Сразу в двух областях физики появились кандидаты в киральные системы — системы, в которых существуют безмассовые фермионы: в физике твёрдого тела были открыты топологические полуметаллы (Вейлевские и Дираковские, а потом и с высшими квази-спинами — Рариты-Швингера-Вейля), а в физике высоких энергий — кварк-глюонная плазма, вероятно возникающая при столкновениях тяжёлых ионов.

Открываемые в большом количестве топологические полуметаллы являются наиболее многообещающим классом систем для наблюдения киральных эффектов. Эффективные фермионные степени свободы в этих материалах при низких энергиях описываются уравнениями, подобными уравнениям квантовой теории поля. Таким образом, теоретические методы и модели из физики высоких энергий непосредственно переносятся в физику твёрдого тела. Возможность проверки моделей физики высоких энергий в сравнительно компактных экспериментах в физике твёрдого тела представляет интерес с точки зрения фундаментальной физики. Изучение киральных эффектов в топологических полуметаллах (и других квантовых материалах) может способствовать построению новой элементной базы физической электроники. В частности, возможно, что киральный магнитный эффект уже наблюдался в топологических полуметаллах. Аксиальный ток может оказаться релевантной наблюдаемой в области спинтроники.

Таким образом киральные эффекты представляют большой интерес как новый класс эффектов, наблюдаемых в ‘настольных’ экспериментах в физике твёрдого тела и имеющих прикладной потенциал. С другой стороны — как связь между различными областями физики. Такая связь даёт возможность глубже разобраться в фундаментальных вопросах квантовой теории поля, которые раньше были исключительно умозрительными.

Для построения более реалистичных моделей может быть полезно подвергнуть эффекты кирального транспорта более тщательному теоретическому анализу: предложить альтернативные модели явлений переноса, исследовать их диссипативные свойства; исследовать зависимость от инфракрасных свойств в конкретных моделях; исследовать максимально широкий спектр киральных систем. Данная работа посвящена анализу киральных эффектов на микроскопическом уровне в конкретных моделях систем невзаимодействующих фермионов.

Цель и задачи диссертационного исследования Целью данной работы является вычисление транспортных коэффициентов киральных эффектов в квантовых теориях поля и моделях топологических полуметаллов. Для достижения поставленной цели в работе решены следующие **задачи**:

1. Вычислить спектр эффективной модели для полуметаллов Рариты-Швингера-Вейля в магнитном поле, вычислить плотность аксиального тока, изучить топологию импульсного пространства модели.
2. Вычислить плотность аксиального тока в релятивистской модели Рариты-Швингера-Адлера с помощью теории линейного отклика.

3. Вычислить спектр системы свободных Дираковских фермионов с цилиндрической границей, рассмотреть эту задачу во вращающейся системе отсчёта, и численно изучить зависимость плотности аксиального тока от координат при различных значениях параметров.
4. Изучить Швингеровское рождение пар во внешних электрическом и магнитном полях в модели Дираковского полуметалла, вычислить возникающую в следствие этого плотность электрического тока, вычислить поправку к проводимости.

Научная новизна В ходе работы автора получены следующие новые результаты, опубликованные в серии статей:

1. Вычислен киральный разделительный эффект в системах с высшими спинами — релятивистской модели фермионов со спином 3/2 Рариты-Швингера-Адлера, и в эффективной модели для квазичастиц со спином 3/2 в полуметаллах Рариты-Швингера-Вейля.
2. Показано, что коэффициент в выражении для кирального разделительного эффекта пропорционален числу Черна ферми-точки модели, и, таким образом, топологически защищён.
3. Предложена формула для вычисления числа Черна через спиральности безмассовых мод модели.
4. Численно исследован киральный вихревой эффект в системе Дираковских фермионов в системе с ‘MIT-bag’ граничными условиями на цилиндрической границе. Плотность аксиального тока исследована во всём объёме и показано, что стандартное выражение справедливо только на оси вращения при ненулевой температуре.
5. Обнаружены осцилляции зависимости аксиального тока на оси вращения от химического потенциала при низких температурах.
6. Обнаружено, что при большой массе фермионов, аксиальный ток течёт вдоль поверхности цилиндра.
7. Вычислены электрический ток и поправка к проводимости в модели Дираковского полуметалла во внешнем магнитном поле, обусловленные Швингеровским рождением пар.

Практическая и научная значимость

Содержание данной работы может быть полезно для описания кирального транспорта в физике твёрдого тела и, возможно, в физике высоких энергий. Приведённые примеры отклонения выражений для киральных эффектов от стандартных может быть полезно для реалистичного описания физики киральных систем. Диссертационная работа не является обзором данной области и не претендует на полноту анализа, но содержит решение ряда лежащих на поверхности задач, которые при изучении данной области более или менее сознательно избегаются, так как не могут быть решены непосредственным применением развитых методов квантовой теории поля, а требуют детального анализа, более характерного для теории конденсированного состояния (например, непертурбативного изучения пространственно-неоднородных систем).

Основные положения, выносимые на защиту

1. Вычислен киральный разделительный эффект в системах с высшими спинами — релятивистской модели фермионов со спином 3/2 Рариты-Швингера-Адлера, и в эффективной модели для квазичастиц со спином 3/2 в полуметаллах Рариты-Швингера-Вейля.
2. Показано, что коэффициент в выражении для кирального разделительного эффекта пропорционален числу Черна ферми-точки модели с любым квази-спином ($s = \frac{1}{2},\ 1,\ \frac{3}{2}$), и, таким образом, топологически защищён.
3. Исследован случай теоремы об индексе, связывающей число Черна и структуру уровней Ландау («спектральную асимметрию») в системах безмассовых фермионов с высшими спинами. Предложена формула для вычисления числа Черна через спиральности безмассовых мод модели.
4. Численно исследован киральный вихревой эффект в системе Дираковских фермионов с граничными условиями типа ‘MIT-bag’ на цилиндрической границе. Плотность аксиального тока исследована во всём объёме и показано, что стандартное выражение справедливо только на оси вращения при ненулевой температуре.
5. Граничные эффекты проявляются при низких температурах: зависимость аксиального тока кирального вихревого эффекта на оси вращения от химического потенциала осциллирует.

6. Обнаружено, что при большой массе фермионов, аксиальный ток кирального вихревого эффекта течёт вдоль поверхности цилиндра. Этот поверхностный ток насыщается «лёгкими» граничными модами.
7. Рассмотрено Швингеровское рождение пар во внешних электрическом и магнитном полях в модели Дираковского полуметалла. Показано, что частота рождения пар в данном объёме конечна. Получена поправка к проводимости, обусловленная рождением пар.

Основные результаты диссертации докладывались на международной конференции «XVIII Workshop on High Energy Spin Physics «DSPIN-2019» (г. Дубна, 2019) и на конференции «Молодёжная конференция по теоретической и экспериментальной физике» (г. Москва, 2021), а также на семинарах ИТЭФ.

По материалам диссертации **опубликовано** 5 статей, индексируемых Scopus и Web of Science, 3 из них опубликованы в ведущих международных реферируемых научных журналах, 2 — в международных реферируемых научных журналах.

Объем и структура работы.

Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения и приложения. Полный объем диссертации **102** страниц текста с **11** рисунками и 1 таблицей. Список литературы содержит **107** наименований.

Содержание работы

Во **введении** приводится обзор существующих исследований кирального транспорта в контексте физики твёрдого тела, экспериментов по столкновению тяжёлых ионов, квантовой теории поля, в том числе моделирования сильно-взаимодействующих теорий на решётках. Предлагаются к рассмотрению проблемы, которые решены в данной диссертации.

В **главе 2** предлагается механизм [I] возникновения аномального отклика в виде электрического тока (и соответствующего увеличения проводимости) в топологическом полуметалле (предложенный механизм обобщается и на другие квантовые материалы) на внешние постоянные магнитное и электрическое поля, альтернативный киральному магнитному эффекту.

Модель отклика, основанная на киральном магнитном эффекте [1],состоит из 'накачки' киральных частиц на нулевом уровне Ландау посредством киральной аномалии, их термализации без изменения киральности (то есть возникновение кирального дисбаланса) и возникновения тока кирального магнитного эффекта, который наблюдается как увеличение проводимости

$$E \cdot B \;\Rightarrow\; \rho_5,\, \mu_5 \;\Rightarrow\; J_{\mathrm{CME}} \;\Rightarrow\; \sigma_{\mathrm{CME}} \tag{1}$$

$$\sigma_{\mathrm{CME}} = \frac{e^2}{\pi\hbar}\frac{3}{8}\frac{e^2}{\hbar c}\frac{v_F^3}{\pi^3}\frac{\tau_V}{T^2+\frac{\mu^2}{\pi^2}}B^2. \tag{2}$$

В данной работе предложен другой механизм, основанный на классическом в квантовой теории поля эффекте Швингеровского рождения пар во внешних полях. Рождаемые с частотой Γ в единичном объёме квазичастицы продолжают двигаться во внешних полях до рассеяния с изменением киральности (или, в случае баллистического режима, пока не покинут область с электрическим полем) тем самым создавая дополнительный электрический ток и увеличивая проводимость

$$E,B \quad \Rightarrow \quad \Gamma \quad \Rightarrow \quad J_S \quad \Rightarrow \quad \sigma_S \tag{3}$$

$$\sigma_S = v_F \tau_1 \frac{H}{2\pi^2} \times \left[\coth\left(\pi\, v_F \frac{H}{E}\right) + \pi v_F \frac{H}{E}\left(1 - \coth^2\left(\pi\, v_F \frac{H}{E}\right)\right)\right] \tag{4}$$

$$\sigma_S \approx v_F \tau_1 \frac{H}{2\pi^2}, \quad v_F H \gg E, \tag{5}$$

$$\sigma_S \approx v_F^2 \tau_1 \frac{H^2}{3\pi E}, \quad E \gg v_F H \to 0. \tag{6}$$

Этот результат может быть обобщён на случай ненулевой Дираковской массы. В этой главе, как и во всей работе предполагается, что Ферми-точки расположены на одном уровне по энергии в импульсном пространстве, а химический потенциал отсчитывается от самих Ферми-точек.

В первом разделе **главы 2** предлагается эффективная теория квазичастиц в Дираковских полуметаллах, эквивалентная теории Дираковских фермионов, с учётом анизотропии кристаллов. В следующих разделах построен спектр модели в магнитном поле (уровни Ландау) и исследована задача о движении в постоянном магнитном поле во всём пространстве и в электрическом поле в пространственном слое. Электрическое поле определено потенциалом

$$A_0 = \begin{cases} 0, & z \le 0 \\ -Ez, & 0 < z < L \\ -EL, & L \le z. \end{cases} \tag{7}$$

При переходи от уравнения Дирака с таким потенциалом к уравнениям второго порядка возникает задача о движении в квадратичном потенциале.

Далее, процесс рождения пар представлен как туннелирование частиц из вакуума (из “моря Дирака” или из-под Ферми-поверхности) с одной стороны от слоя с электрическим полем в область по другую сторону, в которой данная частица уже оказывается над вакуумом. Вероятность и частота рождения вычислены квазиклассически и точно для каждого уровня Ландау. Рассмотрен вопрос о соотношении вероятности распада вакуума и частоты рождения пар — разъясняется, что, несмотря на единичную вероятность распада вакуума в безмассовом случае, задача поставлена корректно и полученный ответ имеет физический смысл.

В ходе точного решения задачи о туннелировании, наивно вычисленный коэффициент отражения $|R|^2 = 1+|T|^2$ оказывается больше единицы. Эта сложность, характерная для подобных задач с фермионами, известна как парадокс Клейна. Предложенное решение основано на замечании о том, что волновой вектор волны может быть противоположен электрическому току, создаваемому соответствующей плоской волной. После правильной идентификации падающей и отражённой волн, парадокс разрешается: коэффициент отражения равен $1/|R|^2$, а прохождения — $|T|^2/|R|^2$.

В разделе 7 **главы 2** вычислена поправка к проводимости (4), обусловленная процессом Швингеровского рождения, вычислена в простейшей модели электронно-дырочной плазмы при низкой температуре $T \ll v_F E\tau_1$ и достаточном для рождения пары времени свободного пробега τ_1, $E\tau_1 \gg \sqrt{2H}$. При таких температурах можно пренебречь обменным взаимодействием — состояния рождающихся частиц не должны быть заняты температурными частицами. В противном случае, вероятность рождения уменьшается фактором $1-n$, где n — соответствующее число заполнения, возникающее из распределения Ферми-Дирака.

Полученная поправка к проводимости зависит также от электрического поля и демонстрирует новый тип зависимости от магнитного поля. Полученная поправка при любых значениях магнитного поля остаётся конечной и складывается с омической проводимостью температурных электронов.

В **главе 3** исследуется киральный разделительный эффект в системах с заряженными фермионами со спином 3/2 [II] — в модели топологического полуметалла Рариты-Швингера-Вейля и в релятивистской квантовой теории поля, предложенной С. Адлером [2],одной из степеней сводобы в которой является поле Рариты-Швингера.

Эффективная теория для электронных квазичастиц в полуметаллах Рариты-Швингера-Вейля вблизи Ферми-точек, или пересечений уровней энергии, определяется эффективными гамильтонианами вида

$$\hat{H}_{\pm s} = \pm v_f \sum_{i=1}^{3} \hat{p}_i S_i \tag{8}$$

где S_i — генераторы группы $SU(2)$ в стандартном базисе $|s, s_z\rangle$, $s = \frac{3}{2}$, общий знак определяет киральность Ферми-точки. Собственные вектора гамильтониана — спиральные состояния со спиральностями $\pm\frac{3}{2}$, $\pm\frac{1}{2}$, спектр гамильтониана — линейный $E_{\mathbf{p}\lambda} = \pm v_f \lambda |\mathbf{p}|$.

Хотя спектр таких эффективных гамильтонианов напоминает релятивистский, при рассмотрении высших спинов соответствующие представления группы Пуанкаре не реализуются — только в случае $s = \frac{1}{2}$ квазичастицы в самом деле эквивалентны Вейлевским или Дираковским фермионам. Поэтому состояния с промежуточными спиральностями оказываются разрешёнными.

Связности Берри в системах с касающимися уровнями энергии $\vec{\mathcal{A}}_{\lambda\lambda'}$, в общем случае являются неабелевыми — индексы $\lambda\lambda'$ пробегают значения уровней энергии (в данном случае — значения квази-спиральностей). Кривизны Берри $\vec{\Omega}^{\lambda\lambda'}$ в импульсном пространстве в системах с касанием уровней имеют монополи с зарядами $N^{(\lambda)}_{\pm 3/2} = 2\lambda = \pm 3, \pm 1$, равными потоку диагональной компоненты кривизны Берри через охватывающую замкнутую поверхность. Сумма зарядов монополей по всем спиральностям равна числу Черна $\mathcal{C}_s$ данной Ферми-точки, которое может быть надёжно установлено для данного кристалла экспериментально методами кристаллографии.

Для полноценного исследования топологии импульсного пространства квантовой теории поля не обязательно изучать связности Берри — можно изучать топологические инварианты, выражая их через Евклидовы функции Грина. Так, число Черна выражается через топологический инвариант, построенный из пропагаторов квазичастиц в Евклидовом пространстве

$$\mathcal{C} \equiv \mathcal{N}_3 = \frac{1}{24\pi^2} \mathrm{tr} \int G dG^{-1} \wedge G dG^{-1} \wedge G dG^{-1}. \tag{9}$$

Интегрирование производится по трёхмерной гиперповерхности в четырёхмерном Евклидовом пространстве $(\omega, \mathbf{p})$, охватывающей полюса и нуля функции Грина. Эквивалентность двух этих описаний легко показать для достаточно простых систем, в которых можно построить одночастичный гамильтониан вида $G^{-1} = i\omega - H$.

Согласно теореме Нильсена-Ниномии, Вейлевские точки в кристаллах возникают парами противоположной киральности. Такое требование естественным образом возникает при рассмотрении кристаллов или теорий поля в решёточной регуляризации. Однако, оно представляется естественным в общем случае, так как, например, в системе Вейлевских фермионов при ненулевом химическом потенциале во внешнем магнитном поле, вдоль магнитного поля течёт ток. При наличии фермионов противоположной киральности этот (векторный) ток сокращается. На случай высших (квази)спинов теорему Нильсена-Ниномии можно сформулировать как требование равенства нулю суммы чисел Черна всех Ферми-точек системы

$$0 = \sum_n \mathcal{C}_n \tag{10}$$

(эффективный гамильтониан вблизи Ферми-точки типа Рариты-Швингера-Вейля обратной киральности имеет общий знак минус и соответствующее число Черна, например $\mathcal{C}_{-\frac{3}{2}} = -4$). При этом, аксиальный ток от Ферми точки оказывается пропорционален величине числа Черна , а для всей системы

$$\mathbf{j}_5 = \mathbf{B}\frac{\mu}{4\pi^2}\sum_n |\mathcal{C}_n|. \tag{11}$$

Структура уровней энергии в реальном кристалле обычно довольно запутана и асимметрична, например, в 'левом' киральном кристалле полуметалла Рариты-Швингера-Вейля $PdGa$, Ферми-точка с $s = \frac{3}{2}$ и $\mathcal{C}_{\frac{3}{2}} = 4$, которая образована четырёхкратным пересечением уровней, дополняется двумя точками с $s = 1$ и $\mathcal{C}_{-1} = -2$, которые образованы трёхкратным пересечением уровней каждая, то есть шестикратным пересечением уровней. Заметим, что так как s — квази-спин, квазичастица подчиняются статистике Ферми-Дирака для любых s.

Для квазиклассического вычисления тока рассматривается эволюция и кинетика волновых пакетов квазичастиц. Квазиклассическое рассмотрение, формально справедливое в слабом магнитном поле, помогает лучше понять структуру эффекта, и, в принципе, позволяет вычислять поправки к эффекту посредством рассмотрения нетривиального интеграла столкновений.

Рассмотрение эволюции волнового пакета в кристалле приводит к гамильтоновым уравнениям движения. Существенно, что волновой пакет можно считать состоящим из состояний с заданной спиральностью при движении в магнитном поле только в пределе $\mu^2 \gg B$. Как следует из анализа движения составного волнового пакета, недиагональные элементы уравнения на спиральные амплитуды пропорциональны $\dot{\vec{p}} \cdot \mathcal{A} \sim |\vec{B}|/|\vec{p}|$, а диагональные $\sim \lambda|\vec{p}|$. Так как импульсы квазичастиц, дающих основной вклад в эффект по порядку величины равны величине химического потенциала, условие $\mu^2 \gg B$ позволяет пренебречь эволюцией спиральных компонент волнового пакета и рассматривать только абелеву часть связности Берри (соответствующие кривизны обозначаются $\vec{\Omega}^{(\lambda)}$).

Полученная нетривиальная гамильтонова система

$$\dot{\mathbf{r}}^{(\lambda)} = \frac{\partial E_{\mathbf{p}\lambda}}{\partial \mathbf{p}} + \dot{\mathbf{p}}^{(\lambda)} \times \mathbf{\Omega}^{(\lambda)} \tag{12}$$

$$\dot{\mathbf{p}}^{(\lambda)} = \dot{\mathbf{r}}^{(\lambda)} \times \mathbf{B}. \tag{13}$$

не сохраняет стандартный фазовый поток уравнений движения со стандартным фазовым объёмом d^3pd^3x. 'Сохраняющийся' фазовый объём имеет вид $(1 + \mathbf{\Omega}^{(\lambda)}\mathbf{B})d^3pd^3x$.

Кинетическое уравнение для квазичастиц с тривиальным интегралом столкновений

$$\frac{\partial n_{\mathbf{p}\lambda}}{\partial t} + \frac{\partial n_{\mathbf{p}\lambda}}{\partial \mathbf{r}}\dot{\mathbf{r}}^{(\lambda)} + \frac{\partial n_{\mathbf{p}\lambda}}{\partial \mathbf{p}}\dot{\mathbf{p}}^{(\lambda)} = \sum_{\lambda'} I_{col}^{(\lambda,\lambda')}, \quad I^{(\lambda,\lambda')} = I^{(\lambda)}\delta_{\lambda\lambda'} \tag{14}$$

может быть легко проинтегрировано по модифицированному фазовому объёму, и из полученного уравнения непрерывности извлекается выражение для плотности тока. Интеграл по фазовому объёму с распределением Ферми-Дирака при учёте симметрий сводится к интегралу от кривизны Берри по замкнутой поверхности, то есть ответ пропорционален заряду монополя абелевой части связности Берри в импульсном пространстве. Как показано во **введении**, в случае касания двух уровней (то есть квази-спина $s = \frac{1}{2}$), Сумма зарядов монополей, порождённых абелевой частью связностей, равна половине числа Черна. Можно ожидать, что тоже справедливо для высших спинов, и суммарная плотность тока от Ферми-точки пропорциональна её числу Черна

$$\mathbf{j}^{(\lambda)} = \frac{N^{(\lambda)}}{4\pi^2}\mu\mathbf{B}, \quad \mathbf{j}_\mathbf{s} = \frac{\mathcal{C}_s}{4\pi^2}\ \mu\mathbf{B}. \tag{15}$$

Точное рассмотрение более сложной, чем Вейлевские фермионы, системы демонстрирует, что стандартное утверждение о связи аномальных кинетических коэффициентов с числом нулевых мод требует пояснений. Оказывается, что существенны также определённые топологические характеристики нулевых мод. Так киральная проводимость оказывается пропорциональной не количеству нулевых мод, а более сложной аналитической характеристике спектра — спектральной асимметрии. Кроме того, сопоставление квазиклассического и точного вычислений позволяют сформулировать теорему об индексе для операторов Дираковского типа — утверждение о равенстве числа Черна и спектральной асимметрии. Оказывается, что два свойства спектра гамильтонианов такого вида (даже более общего — допустима замена $p_i \to g_i(p)$) приводят к простому выражению для искомого тока.

Вычисление спектра эффективного гамильтониана для высших спинов в магнитном поле принципиально не отличается от случая Вейлевских фермионов — движение в поперечной плоскости сводится к квантовому осциллятору

$$H = v_f\sqrt{\frac{B}{2}}(S_+a + S_-a^\dagger) + v_f p_z S_z = H_\perp + pS_z, \quad p = v_f p_z. \tag{16}$$

После подстановки анзаца из осцилляторных функций, для любой данной моды $(E(p), C(p))$ справедливо

$$HC = EC, \quad C^\dagger H = EC^\dagger, \quad \frac{d}{dp}H_\perp = 0, \quad C^\dagger C = 1 \tag{17}$$

$$E = C^\dagger H_\perp C + p\, C^\dagger S_z C \Rightarrow 1 = \frac{dp}{dE}\; C^\dagger S_z C. \tag{18}$$

Первое спектральное свойство состоит в том, что матричный элемент тока, делённый на ‘групповую скорость’ квазичастицы, равен единице.

Второе спектральное свойство особенно наглядно в случае полуцелых s в силу асимптотического поведения мод. Ненулевые матричные элементы поперечной части гамильтониана $H_\perp$ для данной моды по порядку величины $\sim n\sqrt{B}$, в то время как продольная составляющая не ограничена, откуда следует (это не справедливо для целых s, так как $\hat{S}_z\,|s = 0,1,...;\ s_z = 0\rangle = 0$)

$$|E(p_z)| \sim |p_z|, \quad p_z \to \infty. \tag{19}$$

Данная мода может принадлежать одному из трёх классов в зависимости от типа отображения $E(p_z) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ следующим образом

1. $E(-\infty)E(+\infty) > 0$ — мода пересекает нулевой уровень энергии чётное число раз или не пересекает вовсе. Таким модам приписывается характеристика $\Theta_\alpha = 0$;
2. $E(-\infty) = -\infty$ и $E(+\infty) = +\infty$ — мода пересекает ноль нечётное число раз, и отображение сохраняет ориентацию, тогда $\Theta_\alpha = 1$;
3. $E(-\infty) = +\infty$ и $E(+\infty) = -\infty$ — мода пересекает ноль нечётное число раз, но отображение изменяет ориентацию, тогда $\Theta_\alpha = -1$.

Чтобы обобщить это свойство также на случай целых s, следует принять, что мода может пересекать ноль на бесконечности.

Так, Ферми-точка с $s = \frac{1}{2}$ в магнитном поле имеет одну нулевую моду с $\Theta = 1$, а с $s = \frac{3}{2}$ имеет четыре моды с $\Theta = 1$. Ферми-точка с $s = 1$ имеет одну моду с $\Theta = 1$; одну моду с $\Theta = 1$, пересекающую ноль единожды на бесконечности; и бесконечное количество мод с $\Theta = 0$, пересекающих ноль дважды — в нуле и на бесконечности.

Искомая величина выражается непосредственно через спектр и распределение Ферми-Дирака

$$\langle j^z \rangle = \int \frac{B}{2\pi}\frac{dp_z}{2\pi}\sum_\alpha \; n_f(E_\alpha)\; v_f \,\langle \psi_\alpha | S_z | \psi_\alpha \rangle \tag{20}$$

$$= \frac{\mu B}{4\pi^2}\sum_\alpha \; \Theta_\alpha. \tag{21}$$

и сводится к простому ответу с помощью сформулированных свойств. Вместо количества нулевых мод, ток пропорционален “спектральной асимметрии” $\sum_\alpha \Theta_\alpha$. Сопоставление квазиклассического и точного решения позволяет оказывается доказательством теоремы об индексе для данного частного случая

$$\sum_\alpha \Theta_\alpha = \mathcal{C}_s \tag{22}$$

Это утверждение о структуре уровней Ландау для Ферми-точки с $s = \frac{3}{2}$ было получено иными способом [3],что оправдывает сделанные предположения о вкладах абелевой части связностей Берри в полный заряд монополя в импульсном пространстве.

Во второй части **главы 3** киральный разделительный эффект вычислен в модели Рариты-Швингера-Адлера (RSA) — самосогласованной релятивистской квантовая теория поля, одной из степеней свободы в которой является поле Рариты-Швингера ψ_μ. Для обеспечения самосогласованности в теорию было добавлено Дираковское поле λ, непосредственно взаимодействующее с ψ_μ с константой связи m размерности энергии. Это взаимодействие необходимо рассматривать "в режиме сильной связи", таким образом модель Рариты-Швингера-Адлера на практике является теорией комбинированного поля (ψ_μ,λ). Взаимодействие с электромагнитным полем вводится минимальным образом

$$S = S_{RS} + S_D + S_A, \tag{23}$$

$$S_{RS}[\psi_\mu, A_\mu] = \int d^4x\ \bar{\psi}_\mu \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho}\gamma_5\gamma_\nu i D_\lambda \psi_\rho, , \quad D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu,$$

$$S_A[\psi_\mu, \lambda] = -m \int d^4x\ (\bar{\lambda}\gamma^\nu\psi_\nu - \bar{\psi}_\nu\gamma^\nu\lambda), \quad S_D[\lambda, A_\mu] = \int d^4x\ \bar{\lambda}\gamma_\nu i D^\nu \lambda.$$

В добавок, на квантовом уровне появляются духовые степени свободы.

Согласно выводам предыдущей части главы, киральный разделительный эффект определяется числом Черна системы $\sigma = \mathcal{C}\frac{\mu}{2\pi^2}$, которое можно выразить через Евклидов пропагатор (предполагается, что он антикоммутирует или коммутирует с γ_5), через кривизны Берри, или через спиральности положительно-частотных мод

$$\mathcal{C} \equiv \mathcal{N}_3 = \frac{1}{48\pi^2}\mathrm{tr}\gamma_5 \int GdG^{-1} \wedge GdG^{-1} \wedge GdG^{-1} = 2\sum_i \lambda_i. \tag{24}$$

При любом ненулевом значении постоянной взаимодействия $m > 0$, в том числе в пределе $m \to \infty$, модель RSA имеет три такие моды: две 'чистые' моды поля Рариты-Швингера со спиральностями $\frac{1}{2}$ (нет круговой поляризации и спин 'вверх') и $1+\frac{1}{2}$ (круговая поляризация и спин 'вверх'), и одна 'комбинированная' мода со спиральностью $1-\frac{1}{2}$ (для поля ψ_μ — круговая поляризация вверх и спин 'вниз', для λ — спин 'вверх'). Таким образом, $\mathcal{C}_{RSA} = 5$. В безмассовой теории Рариты-Швингера представлены решения только с максимальной спиральностью, поэтому $\mathcal{C}_{RS} = 3$, а для безмассовых Дираковских фермионов $\mathcal{C}_D = 1$ Взаимодействие с Дираковским полем, предложенное Адлером, 'размораживает' моду со спиральностью $\lambda = \frac{1}{2}$ и добавляет 'комбинированную' моду.

Тот же ответ можно получить явным вычислением в слабом магнитном поле с помощью теории линейного отклика. Для простоты явные вычисления производятся в пределе $m \to +\infty$. В таком пределе правила Фейнмана значительно упрощаются, в частности Дираковское поле не распространяется, а пропагатор поля Рариты-Швингера и векторная вершина имеют вид

$$N^{\psi}_{\rho\sigma} = \frac{-i}{2k^2}(\gamma_\sigma \not{k}\gamma_\rho - \frac{4}{k^2}k_\rho k_\sigma \not{k}), \quad V^\nu = \begin{pmatrix} -ie\gamma^{\mu\nu\rho} & 0 \\ 0 & -ie\gamma^\nu \end{pmatrix}, \tag{25}$$

где $\gamma^{\mu\nu\rho} = \frac{1}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho - \gamma^\rho\gamma^\nu\gamma^\mu)$, а аксиальная вершина отличается от векторной умножением всех компонент на γ_5 справа.

По формуле Кубо, кинетический коэффициент определяется соответствующей функцией Грина

$$\sigma = \lim_{p_i\to 0}\lim_{\omega\to 0}\frac{i}{2p_i}\epsilon^{ijk}\Pi^{AV}_{jk}(p), \quad \Pi^{AV}_{jk}(p) = \int d^4x\ e^{ip^\mu(x-y)_\mu}\ \langle j^5_j(x)\ j_k(y)\rangle \tag{26}$$

В результате прямолинейных, но весьма громоздких вычислений, произведённых с помощью Мацубаровской техники, получена киральная проводимость в постоянном слабом магнитном поле

$$\sigma_{RSA} = 5\ \frac{e\mu}{2\pi^2}. \tag{27}$$

Так как результат совпадает с полученным из топологических соображений, а топологические свойства теории одинаковы при любых $m > 0$, сделан вывод о независимости результата от константы связи m. В ходе явного вычисления сложно понять структуру результата, а также возникают вопросы о возможных вкладах $\sim m^{-2}, m^{-4}$ и вкладах духовых степеней свободы.

В **главе 4** исследуется киральный вихревой эффект в системе невзаимодействующих Дираковских фермионов, ограниченной внутренней поверхностью цилиндра и вращающейся как целое с постоянной угловой скоростью вокруг оси цилиндра. На цилиндрической границе наложены граничные условия типа ‘MIT-bag’. С помощью численных расчётов изучена плотность аксиального тока во всём объёме системы, а не только на оси вращения, при разных значениях параметров [III; IV]. При сравнимой с радиусом цилиндра длине свободного пробега, плотность аксиального тока на оси вращения отличается от стандартного аналитического результата. Также рассмотрена фаза ‘топологического изолятора’, то есть случай большой по сравнению с обратным радиусом цилиндра Дираковской массы. В таком случае аксиальный ток течёт только вдоль границы и насыщается ‘лёгкими’ модами, локализованными на границе.

Рассмотрение вращающейся с угловой скоростью Ω системы Дираковских фермионов ψ осложняется тем, что достаточно далеко от оси линейная скорость $\Omega r_0 = 1$ формально равна скорости света — возникает горизонт. Постановка и решение такой задачи требует изучения фермионов в искривлённом пространстве.

Вместо этого, рассмотрена более естественная для физики конденсированного состояния задача — система ограничена внутренней поверхностью цилиндра радиуса R, $\Omega R < 1$. На границе с нормалью n_μ наложены граничные условия типа MIT-bag

$$0 = (i\gamma^\mu n_\mu - e^{i\gamma_5\Theta})\psi|_{r=R} \tag{28}$$

сохраняющие эрмитовость гамильтониана Дирака и алгебраически обращающие в ноль ток сквозь границу $\bar{\psi}\gamma_\mu\psi\ n^\mu = 0$. Рассмотрен случай кирального угла $\Theta = 0$, хотя его значения заметно модулируют поле внутри системы.

Граничные условия приводят к условию квантования поперечного импульса q вида

$$\mathbf{j}_m^2 - \frac{2M}{q}\mathbf{j}_m - 1 = 0, \quad \mathbf{j}_m(q) = \frac{J_m(qR)}{J_{m+1}(qR)}. \tag{29}$$

Функции Бесселя возникли в этом уравнении как убывающие на бесконечности собственные функции оператора Лапласа в цилиндрических координатах. Однако, в ограниченной системе допустимы также решения, возрастающие с радиусом, чему отвечают мнимые значения поперечного импульса $q = i\nu$. Такие моды, локализованные на поверхности цилиндра, существуют при достаточно большой Дираковской массе M в количестве $2\lfloor MR \rfloor$ штук и имеют сравнительно малую эффективную массу $\sqrt{M^2 - \nu_m^2} \approx \frac{|j_z|}{R}$. Поэтому систему с $MR \gg 1$ можно называть “топологическим изолятором”.

Вращение введено как модификация действия согласно принципу "вращение — химический потенциал для углового момента"

$$\delta S = \int d^4x\ \Omega^k \epsilon_{0kij}\ \frac{1}{2}\bar{\psi}\left(\gamma^0\{x^i,\hat{P}^j\} - \gamma^0\{x^j,\hat{P}^i\} + \{\gamma^0,\frac{1}{2}\Sigma^{ij}\}\right)\psi. \quad (30)$$

При использовании данных граничных условий вакуум вращающейся системы совпадает с вакуумом покоящейся системы, то есть для любой моды с квантовыми числами j, в том числе проекции момента на ось вращения j_z, и энергией w_j в покоящейся системе выполняется

$$\mathrm{sign} w_j = \mathrm{sign}(w_j - j_z\Omega). \quad (31)$$

Аналитическое вычисление аксиального тока $\langle\bar{\psi}\gamma_5\vec{\gamma}\psi\rangle$ возможно только на оси вращения, где в нуль обращаются все функции Бесселя, кроме нулевой (то есть достаточно рассмотреть только две моды со спинами 'вверх'-'вниз' с нулевым орбитальным моментом), и при сравнительно малой длине свободного пробега, (то есть при достаточно большой температуре $T \gg R^{-1}$ так что суммирование по конкретному дискретному спектру поперечного движения можно заменить на интегрирование по непрерывному спектру; на практике достаточно $T > 0.5R^{-1}$). Чтобы продвинуться дальше, пришлось прибегнуть к численным расчётам — суммированию по спектру матричного элемента плотности аксиального тока, взвешенного с распределением Ферми-Дирака, и изображению полученных результатов на графиках.

Идея о подобии поля скоростей макроскопического движения среды калибровочному полю $A_\nu \to -\mu u_\nu$ (в случае простого вращения $u = \gamma(r)(1, -\Omega y, \Omega x, 0)^T$, $\gamma^{-1} = \sqrt{1-\Omega^2 r^2}$) также не позволяет аналитически продвинуться дальше, так как описание гидродинамики и термодинамики движущейся термальной среды технически не проще оригинальной постановки задачи само по себе и также зависит от инфракрасных свойств рассматриваемой системы. Показано, что попытки получить новые аналитические результаты переносом формул из теории кирального разделительного эффекта (аналогом магнитного поля выступает завихрённость поля скоростей) не приводят к успеху.

Аналитические результаты для плотности тока на оси вращения в указанных пределах применимости

$$\langle j_5^z(0)\rangle_{\beta,\mu} = \Omega\left(\frac{T^2}{6} + \frac{\mu^2}{2\pi^2}\right), \tag{32}$$

$$\langle j_5^z(0)\rangle_{\beta,M} = \frac{2\Omega T^2}{\pi^2}\int_{M/T}^{\infty}\frac{zdz}{e^z+1}, \quad \langle j_5^z(0)\rangle_{|\mu|-M\gg T} = \Omega\frac{|\mu|\sqrt{\mu^2-M^2}}{2\pi^2} \tag{33}$$

подтверждаются численными расчётами.

Также обсуждается [IV] дополнительный “вакуумный вклад” $\frac{\Omega^3}{24\pi^2}$ в (32), который, строго говоря, является превышением точности, но может быть получен в ходе аналитических вычислений. Показано, что так как в системе с границей вакуум покоящейся системы переходит в вакуум вращающейся системы, при физических значениях угловой скорости $\Omega R < 1$ обсуждаемый вклад в эффект равен нулю, а в нефизической области $\Omega R > 1$ нарушается свойство “сохранения вакуума” (31), и при $\Omega R \gg 1$ достигается предсказываемое аналитически выражение.

Оказалось, что вклады мод с ненулевыми орбитальными моментами и эффекты конечного размера существенны не только вблизи границы, но и в окрестности оси вращения. Так, в безмассовом случае, значение плотности тока резко отклоняется от (32) при отдалении от оси вращения и может менять знак. При малой температуре, зависимость плотности аксиального на оси вращения от химического потенциала осциллирует (подобно эффекту де Гааза – ван Альфена) — ток скачкообразно возрастает при достижении химическим потенциалом величины очередного дискретного значения поперечного импульса.

В режиме “топологического изолятора”, при малых по сравнению с массой температуре и химическом потенциале, обычные моды ожидаемо термодинамически подавлены и аксиальный ток на оси вращения отсутствует, в то время как ‘лёгкие’ граничные моды создают аксиальный ток кирального вихревого эффекта на границе системы.

В **заключении** перечисляются результаты работы, формулируются и обсуждаются некоторые оставшиеся открытыми вопросы в области кирального транспорта, а также перспективы использованных в данной работе методов исследования для изучения свойств квантовых материалов.

Публикации автора по теме диссертации

I. *Abramchuk, R. A.* Schwinger pair creation in Dirac semimetals in the presence of external magnetic and electric fields [текст] / R. A. Abramchuk, M. A. Zubkov // Phys. Rev. D. — 2016. — т. 94, вып. 11. — с. 116012.

II. *Khaidukov, Z. V.* Chiral separation effect for spin 3/2 fermions [текст] / Z. V. Khaidukov, R. A. Abramchuk // Journal of High Energy Physics. — 2021. — Vol. 2021, no. 7. — P. 183.

III. *Abramchuk, R.* Anatomy of the chiral vortical effect [текст] / R. Abramchuk, Z. V. Khaidukov, M. A. Zubkov // Phys. Rev. D. — 2018. — т. 98, вып. 7. — с. 076013.

IV. *Abramchuk, R. A.* Chiral vortical and Chiral torsional effects [текст] / R. A. Abramchuk, Z. V. Khaidukov, M. A. Zubkov // Journal of Physics: Conference Series. — 2020. — т. 1435, № 1. — с. 012009.

V. *Zubkov, M.* Momentum Space Topology and Non-Dissipative Currents [текст] / M. Zubkov, Z. Khaidukov, R. Abramchuk // Universe. — 2018. — т. 4, № 12.

Список литературы

1. Chiral magnetic effect in ZrTe5 [текст] / Q. Li [и др.] // Nature Physics. — 2016. — т. 12, № 6. — с. 550—554.

2. *Adler, S. L.* Analysis of a gauged model with a spin-$\frac{1}{2}$ field directly coupled to a Rarita-Schwinger spin-$\frac{3}{2}$ field [текст] / S. L. Adler // Phys. Rev. D. — 2018. — т. 97, вып. 4. — с. 045014.

3. *Zhao, Y. X.* Index Theorem on Chiral Landau Bands for Topological Fermions [текст] / Y. X. Zhao, S. A. Yang // Phys. Rev. Lett. — 2021. — т. 126, вып. 4. — с. 046401.

4. *Puhr, M.* Numerical Study of Nonperturbative Corrections to the Chiral Separation Effect in Quenched Finite-Density QCD [текст] / M. Puhr, P. V. Buividovich // Phys. Rev. Lett. — 2017. — т. 118, вып. 19. — с. 192003.

5. *Gorbar, E. V.* Chiral asymmetry of the Fermi surface in dense relativistic matter in a magnetic field [текст] / E. V. Gorbar, V. A. Miransky, I. A. Shovkovy // Phys. Rev. C. — 2009. — т. 80, вып. 3. — с. 032801.

6. *Gorbar, E. V.* Normal ground state of dense relativistic matter in a magnetic field [текст] / E. V. Gorbar, V. A. Miransky, I. A. Shovkovy // Phys. Rev. D. — 2011. — т. 83, вып. 8. — с. 085003.

7. *Gorbar, E.* Chiral asymmetry and axial anomaly in magnetized relativistic matter [текст] / E. Gorbar, V. Miransky, I. Shovkovy // Physics Letters B. — 2011. — т. 695, № 1. — с. 354—358.

8. *Yamamoto, A.* Chiral Magnetic Effect in Lattice QCD with a Chiral Chemical Potential [текст] / A. Yamamoto // Phys. Rev. Lett. — 2011. — т. 107, вып. 3. — с. 031601.

9. *Nissinen, J.* Emergent Spacetime and Gravitational Nieh-Yan Anomaly in Chiral $p + ip$ Weyl Superfluids and Superconductors [текст] / J. Nissinen // Phys. Rev. Lett. — 2020. — т. 124, вып. 11. — с. 117002.

10. *Liang, L.* Topological magnetotorsional effect in Weyl semimetals [текст] / L. Liang, T. Ojanen // Phys. Rev. Research. — 2020. — т. 2, вып. 2. — с. 022016.

11. *Huang, Z.-M.* Nieh-Yan anomaly: Torsional Landau levels, central charge, and anomalous thermal Hall effect [текст] / Z.-M. Huang, B. Han, M. Stone // Phys. Rev. B. — 2020. — т. 101, вып. 12. — с. 125201.

12. *Imaki, S.* Chiral torsional effect with finite temperature, density, and curvature [текст] / S. Imaki, Z. Qiu // Phys. Rev. D. — 2020. — т. 102, вып. 1. — с. 016001.

13. Probing the Chiral Anomaly with Nonlocal Transport in Three-Dimensional Topological Semimetals [текст] / S. A. Parameswaran [и др.] // Phys. Rev. X. — 2014. — т. 4, вып. 3. — с. 031035.
14. Condensed matter realization of the axial magnetic effect [текст] / M. N. Chernodub [и др.] // Phys. Rev. B. — 2014. — т. 89, вып. 8. — с. 081407.
15. *Vazifeh, M. M.* Electromagnetic Response of Weyl Semimetals [текст] / M. M. Vazifeh, M. Franz // Phys. Rev. Lett. — 2013. — т. 111, вып. 2. — с. 027201.
16. *Chen, Y.* Axion response in Weyl semimetals [текст] / Y. Chen, S. Wu, A. A. Burkov // Phys. Rev. B. — 2013. — т. 88, вып. 12. — с. 125105.
17. *Chen, Y.* Weyl fermions and the anomalous Hall effect in metallic ferromagnets [текст] / Y. Chen, D. L. Bergman, A. A. Burkov // Phys. Rev. B. — 2013. — т. 88, вып. 12. — с. 125110.
18. *Ramamurthy, S. T.* Patterns of electromagnetic response in topological semimetals [текст] / S. T. Ramamurthy, T. L. Hughes // Phys. Rev. B. — 2015. — т. 92, вып. 8. — с. 085105.
19. *Zyuzin, A. A.* Topological response in Weyl semimetals and the chiral anomaly [текст] / A. A. Zyuzin, A. A. Burkov // Phys. Rev. B. — 2012. — т. 86, вып. 11. — с. 115133.
20. *Goswami, P.* Axionic field theory of (3+1)-dimensional Weyl semimetals [текст] / P. Goswami, S. Tewari // Phys. Rev. B. — 2013. — т. 88, вып. 24. — с. 245107.
21. *Son, D. T.* Hydrodynamics with Triangle Anomalies [текст] / D. T. Son, P. Surówka // Phys. Rev. Lett. — 2009. — т. 103, вып. 19. — с. 191601.
22. *Sadofyev, A. V.* Notes on chiral hydrodynamics within the effective theory approach [текст] / A. V. Sadofyev, V. I. Shevchenko, V. I. Zakharov // Phys. Rev. D. — 2011. — т. 83, вып. 10. — с. 105025.
23. *Rarita, W.* On a Theory of Particles with Half-Integral Spin [текст] / W. Rarita, J. Schwinger // Phys. Rev. — 1941. — т. 60, вып. 1. — с. 61—61.

24. *Adler*, *S. L.* Chiral anomaly calculation in the extended coupled Rarita-Schwinger model [текст] / S. L. Adler, P. Pais // Phys. Rev. D. — 2019. — т. 99, вып. 9. — с. 095037.
25. *Adler*, *S. L.* Analysis of an SU(8) model with a spin-1 2 field directly coupled to a gauged Rarita–Schwinger spin-3 2 field [текст] / S. L. Adler // International Journal of Modern Physics A. — 2019. — т. 34, № 33. — с. 1950230.
26. *Boettcher*, *I.* Interplay of Topology and Electron-Electron Interactions in Rarita-Schwinger-Weyl semimetals [текст] / I. Boettcher // Phys. Rev. Lett. — 2020. — т. 124, вып. 12. — с. 127602.
27. Observation of Chiral Fermions with a Large Topological Charge and Associated Fermi-Arc Surface States in CoSi [текст] / D. Takane [и др.] // Phys. Rev. Lett. — 2019. — т. 122, вып. 7. — с. 076402.
28. Observation of unconventional chiral fermions with long Fermi arcs in CoSi [текст] / Z. Rao [и др.] // Nature. — 2019. — т. 567, № 7749. — с. 496—499.
29. Topological chiral crystals with helicoid-arc quantum states [текст] / D. S. Sanchez [и др.] // Nature. — 2019. — т. 567, № 7749. — с. 500—505.
30. Chiral topological semimetal with multifold band crossings and long Fermi arcs [текст] / N. Schröter [и др.] // Nature Physics. — 2019. — т. 15, № 8. — с. 759—765.
31. Observation of multiple types of topological fermions in PdBiSe [текст] / B. Q. Lv [и др.] // Phys. Rev. B. — 2019. — т. 99, вып. 24. — с. 241104.
32. Observation and control of maximal Chern numbers in a chiral topological semimetal [текст] / N. B. M. Schröter [и др.] // Science. — 2020. — т. 369, № 6500. — с. 179—183.
33. *Velo*, *G.* Propagation and Quantization of Rarita-Schwinger Waves in an External Electromagnetic Potential [текст] / G. Velo, D. Zwanziger // Phys. Rev. — 1969. — т. 186, вып. 5. — с. 1337—1341.
34. *Landsteiner*, *K.* Anomalous Transport from Kubo Formulae [текст] / K. Landsteiner, E. Megías, F. Peña-Benitez // Strongly Interacting Matter in Magnetic Fields / под ред. D. Kharzeev [и др.]. — Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2013. — с. 433—468.

35. *Kharzeev, D. E.* Chiral magnetic conductivity [текст] / D. E. Kharzeev, H. J. Warringa // Phys. Rev. D. — 2009. — т. 80, вып. 3. — с. 034028.

36. *Alvarez-Gaumé, L.* Gravitational anomalies [текст] / L. Alvarez-Gaumé, E. Witten // Nuclear Physics B. — 1984. — т. 234, № 2. — с. 269—330.

37. *Nielsen, H.* A no-go theorem for regularizing chiral fermions [текст] / H. Nielsen, M. Ninomiya // Physics Letters B. — 1981. — т. 105, № 2. — с. 219—223.

38. *Nielsen, H.* The Adler-Bell-Jackiw anomaly and Weyl fermions in a crystal [текст] / H. Nielsen, M. Ninomiya // Physics Letters B. — 1983. — т. 130, № 6. — с. 389—396.

39. *Volovik, G. E.* The universe in a helium droplet [текст]. т. 117 / G. E. Volovik. — OUP Oxford, 2003.

40. *Volovik, G. E.* The topology of the quantum vacuum [текст] / G. E. Volovik // Analogue Gravity Phenomenology. — Springer, 2013. — с. 343—383.

41. *Son, D. T.* Chiral anomaly and classical negative magnetoresistance of Weyl metals [текст] / D. T. Son, B. Z. Spivak // Phys. Rev. B. — 2013. — т. 88, вып. 10. — с. 104412.

42. *Aji, V.* Adler-Bell-Jackiw anomaly in Weyl semimetals: Application to pyrochlore iridates [текст] / V. Aji // Phys. Rev. B. — 2012. — т. 85, вып. 24. — с. 241101.

43. *Landau, L. D.* Statistical Physics: Volume 5 [текст]. т. 5 / L. D. Landau, E. M. Lifshitz. — Elsevier, 2013.

44. Radiative corrections to chiral separation effect in QED [текст] / E. V. Gorbar [и др.] // Phys. Rev. D. — 2013. — т. 88, вып. 2. — с. 025025.

45. Chiral separation and chiral magnetic effects in a slab: The role of boundaries [текст] / E. V. Gorbar [и др.] // Phys. Rev. B. — 2015. — т. 92, вып. 24. — с. 245440.

46. *Sundaram, G.* Wave-packet dynamics in slowly perturbed crystals: Gradient corrections and Berry-phase effects [текст] / G. Sundaram, Q. Niu // Phys. Rev. B. — 1999. — т. 59, вып. 23. — с. 14915—14925.

47. *Culcer, D.* Coherent wave-packet evolution in coupled bands [текст] / D. Culcer, Y. Yao, Q. Niu // Phys. Rev. B. — 2005. — т. 72, вып. 8. — с. 085110.

48. Berry phase correction to electron density in solids and "exotic"dynamics [текст] / C. Duval [и др.] // Modern Physics Letters B. — 2006. — т. 20, № 07. — с. 373—378.

49. *Callias, C.* Axial anomalies and index theorems on open spaces [текст] / C. Callias // Communications in Mathematical Physics. — 1978. — т. 62, № 3. — с. 213—234.

50. *Le Bellac, M.* Thermal field theory [текст] / M. Le Bellac. — Cambridge university press, 2000.

51. *Chernodub, M.* Interacting fermions in rotation: chiral symmetry restoration, moment of inertia and thermodynamics [текст] / M. Chernodub, S. Gongyo // Journal of High Energy Physics. — 2017. — т. 2017, № 1. — с. 1—32.

52. *Golkar, S.* (Non)-renormalization of the chiral vortical effect coefficient [текст] / S. Golkar, D. T. Son // Journal of High Energy Physics. — 2015. — т. 2015, № 2. — с. 1—12.

53. *Hou, D.-f.* Possible higher order correction to the chiral vortical conductivity in a gauge field plasma [текст] / D.-f. Hou, H. Liu, H.-c. Ren // Phys. Rev. D. — 2012. — т. 86, вып. 12. — с. 121703.

54. *Metlitski, M. A.* Anomalous axion interactions and topological currents in dense matter [текст] / M. A. Metlitski, A. R. Zhitnitsky // Phys. Rev. D. — 2005. — т. 72, вып. 4. — с. 045011.

55. *Kinoshita, T.* Mass singularities of Feynman amplitudes [текст] / T. Kinoshita // Journal of Mathematical Physics. — 1962. — т. 3, № 4. — с. 650—677.

56. *Cook, G. B.* Rapidly Rotating Neutron Stars in General Relativity: Realistic Equations of State [текст] / G. B. Cook, S. L. Shapiro, S. A. Teukolsky // apj. — 1994. — т. 424. — с. 823.

57. *Csernai, L. P.* Flow vorticity in peripheral high-energy heavy-ion collisions [текст] / L. P. Csernai, V. K. Magas, D. J. Wang // Phys. Rev. C. — 2013. — т. 87, вып. 3. — с. 034906.

58. *Fukushima*, *K.* The phase diagram of dense QCD [текст] / K. Fukushima, T. Hatsuda // Reports on Progress in Physics. — 2010. — т. 74, № 1. — с. 014001.

59. *Smilga*, *A.* Physics of thermal QCD [текст] / A. Smilga // Physics Reports. — 1997. — т. 291, № 1. — с. 1—106.

60. *RAJAGOPAL*, *K.* THE CONDENSED MATTER PHYSICS OF QCD [текст] / K. RAJAGOPAL, F. WILCZEK // At The Frontier of Particle Physics. — с. 2061—2151. — eprint: `https://www.worldscientific.com/doi/pdf/10.1142/9789812810458_0043`.

61. *Rischke*, *D. H.* The quark–gluon plasma in equilibrium [текст] / D. H. Rischke // Progress in Particle and Nuclear Physics. — 2004. — т. 52, № 1. — с. 197—296.

62. Color superconductivity in dense quark matter [текст] / M. G. Alford [и др.] // Rev. Mod. Phys. — 2008. — т. 80, вып. 4. — с. 1455—1515.

63. *Hayano*, *R. S.* Hadron properties in the nuclear medium [текст] / R. S. Hayano, T. Hatsuda // Rev. Mod. Phys. — 2010. — т. 82, вып. 4. — с. 2949—2990.

64. *Andersen*, *J. O.* Phase diagram of QCD in a magnetic field [текст] / J. O. Andersen, W. R. Naylor, A. Tranberg // Reviews of Modern Physics. — 2016. — т. 88, № 2. — с. 025001.

65. *Fukushima*, *K.* The phase diagram of nuclear and quark matter at high baryon density [текст] / K. Fukushima, C. Sasaki // Progress in Particle and Nuclear Physics. — 2013. — т. 72. — с. 99—154.

66. *Miransky*, *V. A.* Quantum field theory in a magnetic field: From quantum chromodynamics to graphene and Dirac semimetals [текст] / V. A. Miransky, I. A. Shovkovy // Physics Reports. — 2015. — т. 576. — с. 1—209. — Quantum field theory in a magnetic field: From quantum chromodynamics to graphene and Dirac semimetals.

67. *Iyer*, *B. R.* Dirac field theory in rotating coordinates [текст] / B. R. Iyer // Phys. Rev. D. — 1982. — т. 26, вып. 8. — с. 1900—1905.

68. *Becattini*, *F.* The ideal relativistic spinning gas: Polarization and spectra [текст] / F. Becattini, F. Piccinini // Annals of Physics. — 2008. — т. 323, № 10. — с. 2452—2473.

69. *Ambruş*, *V. E.* Rotating quantum states [текст] / V. E. Ambruş, E. Winstanley // Physics Letters B. — 2014. — т. 734. — с. 296—301.

70. *Ambru ş*, *V. E.* Rotating fermions inside a cylindrical boundary [текст] / V. E. Ambru ş, E. Winstanley // Phys. Rev. D. — 2016. — т. 93, вып. 10. — с. 104014.

71. *Duffy*, *G.* Rotating quantum thermal distribution [текст] / G. Duffy, A. C. Ottewill // Phys. Rev. D. — 2003. — т. 67, вып. 4. — с. 044002.

72. *Chernodub*, *M. N.* Effects of rotation and boundaries on chiral symmetry breaking of relativistic fermions [текст] / M. N. Chernodub, S. Gongyo // Phys. Rev. D. — 2017. — т. 95, вып. 9. — с. 096006.

73. Analogy between rotation and density for Dirac fermions in a magnetic field [текст] / H.-L. Chen [и др.] // Phys. Rev. D. — 2016. — т. 93, вып. 10. — с. 104052.

74. Discovery of a Three-Dimensional Topological Dirac Semimetal, Na₃Bi [текст] / Z. K. Liu [и др.] // Science. — 2014. — т. 343, № 6173. — с. 864—867.

75. Observation of a three-dimensional topological Dirac semimetal phase in high-mobility Cd3As2. [текст] / M. Neupane [и др.] // Nature communications. — 2014. — т. 5. — с. 3786.

76. Experimental realization of a three-dimensional Dirac semimetal. [текст] / S. V. Borisenko [и др.] // Physical review letters. — 2014. — т. 113 2. — с. 027603.

77. *Liu*, *C.-X.* Chiral gauge field and axial anomaly in a Weyl semimetal [текст] / C.-X. Liu, P. Ye, X.-L. Qi // Phys. Rev. B. — 2013. — т. 87, вып. 23. — с. 235306.

78. *Zubkov*, *M.* Wigner transformation, momentum space topology, and anomalous transport [текст] / M. Zubkov // Annals of Physics. — 2016. — т. 373. — с. 298—324.

79. *Zubkov*, *M. A.* Absence of equilibrium chiral magnetic effect [текст] / M. A. Zubkov // Phys. Rev. D. — 2016. — т. 93, вып. 10. — с. 105036.

80. *Khaidukov, Z. V.* Chiral separation effect in lattice regularization [текст] / Z. V. Khaidukov, M. A. Zubkov // Phys. Rev. D. — 2017. — т. 95, вып. 7. — с. 074502.

81. *Ebihara, S.* Boundary effects and gapped dispersion in rotating fermionic matter [текст] / S. Ebihara, K. Fukushima, K. Mameda // Physics Letters B. — 2017. — т. 764. — с. 94—99.

82. *Chernodub, M. N.* Edge states and thermodynamics of rotating relativistic fermions under magnetic field [текст] / M. N. Chernodub, S. Gongyo // Phys. Rev. D. — 2017. — т. 96, вып. 9. — с. 096014.

83. Optical spectroscopy study of the three-dimensional Dirac semimetal ZrTe 5 [текст] / R. Chen [и др.] // Physical Review B. — 2015. — т. 92, № 7. — с. 075107.

84. *Kumar, D.* Observation of π Berry phase in quantum oscillations of three-dimensional Fermi surface in topological insulator Bi2Se3 [текст] / D. Kumar, A. Lakhani // physica status solidi (RRL)–Rapid Research Letters. — 2015. — т. 9, № 11. — с. 636—640.

85. Experimental discovery of Weyl semimetal TaAs [текст] / B. Lv [и др.] // Physical Review X. — 2015. — т. 5, № 3. — с. 031013.

86. Observation of the chiral-anomaly-induced negative magnetoresistance in 3D Weyl semimetal TaAs [текст] / X. Huang [и др.] // Physical Review X. — 2015. — т. 5, № 3. — с. 031023.

87. Observation of Weyl nodes in TaAs [текст] / B. Lv [и др.] // Nature Physics. — 2015. — т. 11, № 9. — с. 724—727.

88. Quantum transport evidence for the three-dimensional Dirac semimetal phase in Cd 3 As 2 [текст] / L. He [и др.] // Physical review letters. — 2014. — т. 113, № 24. — с. 246402.

89. *Chernodub, M. N.* Chiral anomaly in Dirac semimetals due to dislocations [текст] / M. N. Chernodub, M. A. Zubkov // Phys. Rev. B. — 2017. — т. 95, вып. 11. — с. 115410.

90. Room-temperature chiral charge pumping in Dirac semimetals [текст] / C. Zhang [и др.] // Nature communications. — 2017. — т. 8, № 1. — с. 1—9.

91. Ultrahigh mobility and giant magnetoresistance in the Dirac semimetal Cd3As2 [текст] / T. Liang [и др.] // Nature materials. — 2015. — т. 14, № 3. — с. 280—284.

92. *Cohen, T. D.* Schwinger mechanism revisited [текст] / T. D. Cohen, D. A. McGady // Physical Review D. — 2008. — т. 78, № 3. — с. 036008.

93. *Schwinger, J.* The Theory of Quantized Fields. I [текст] / J. Schwinger // Phys. Rev. — 1951. — т. 82, вып. 6. — с. 914—927.

94. *Nikishov, A.* Pair Production by a Constant External Field [текст] / A. Nikishov // SOVIET PHYSICS JETP. — 1970. — т. 30, № 4. — с. 660—662.

95. *Kim, S. P.* Schwinger pair production in electric and magnetic fields [текст] / S. P. Kim, D. N. Page // Physical Review D. — 2006. — т. 73, № 6. — с. 065020.

96. *Nikishov, A.* Barrier scattering in field theory. Removal of Klein paradox [текст] / A. Nikishov // Nuclear Physics B. — 1970. — т. 21. — с. 346—358.

97. *Hansen, A.* Klein's Paradox and Its Resolution [текст] / A. Hansen, F. Ravndal // Physica Scripta. — 1981. — т. 23, № 6. — с. 1036—1042.

98. *Gavrilov, S. P.* Vacuum polarization and particle creation in the presence of a potential step [текст] / S. P. Gavrilov, D. M. Gitman // International Journal of Modern Physics A. — 2016. — т. 31, 02n03. — с. 1641031.

99. Quantum Electrodynamics: With Unstable Vacuum [текст] / E. Fradkin [и др.]. — Springer-Verlag, 1991.

100. Negative magnetoresistance in Dirac semimetal Cd3As2 [текст] / H. Li [и др.] // Nature Communications. — 2016. — т. 7, № 1. — с. 10301.

101. *Zubkov, M. A.* Absence of equilibrium chiral magnetic effect [текст] / M. A. Zubkov // Phys. Rev. D. — 2016. — т. 93, вып. 10. — с. 105036.

102. *Zubkov, M.* Emergent gravity and chiral anomaly in Dirac semimetals in the presence of dislocations [текст] / M. Zubkov // Annals of Physics. — 2015. — т. 360. — с. 655—678.

103. *Katsnelson, M.* Euler–Heisenberg effective action and magnetoelectric effect in multilayer graphene [текст] / M. Katsnelson, G. Volovik, M. Zubkov // Annals of Physics. — 2013. — т. 331. — с. 160—187.

104. *Zubkov, M.* Schwinger pair creation in multilayer graphene [текст] / M. Zubkov // JETP letters. — 2012. — т. 95, № 9. — с. 476—480.

105. *Vilenkin, A.* Equilibrium parity-violating current in a magnetic field [текст] / A. Vilenkin // Phys. Rev. D. — 1980. — т. 22, вып. 12. — с. 3080—3084.

106. *Vilenkin, A.* Quantum field theory at finite temperature in a rotating system [текст] / A. Vilenkin // Phys. Rev. D. — 1980. — т. 21, вып. 8. — с. 2260—2269.

107. *Fukushima, K.* Chiral magnetic effect [текст] / K. Fukushima, D. E. Kharzeev, H. J. Warringa // Phys. Rev. D. — 2008. — т. 78, вып. 7. — с. 074033.

108. *Chernodub, M. N.* Chiral sound waves in strained Weyl semimetals [текст] / M. N. Chernodub, M. A. H. Vozmediano // Phys. Rev. Research. — 2019. — т. 1, вып. 3. — с. 032040.

Абрамчук Руслан Алексеевич

Киральный недиссипативный транспорт в квантовых теориях поля и в системах с индуцированной релятивистской инвариантностью

Автореф. дис. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук

Подписано в печать ___.___._____. Заказ № ____________

Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 1. Тираж ___экз.

Типография ______________________________________