

на правах рукописи



Павлов Михаил Сергеевич

**РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОЙ ВЯЗКОУПРУГОСТИ
ИЗОТРОПНОГО И АНИЗОТРОПНОГО ТЕЛА НА ОСНОВЕ
МЕТОДА РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ**

01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Томск – 2022

Работа выполнена в федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Национальный исследовательский Томский политехнический университет» и в федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Национальный исследовательский Томский государственный университет».

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
старший научный сотрудник
Светашков Александр Андреевич

Официальные оппоненты:

Адамов Анатолий Арсангалеевич, доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Пермский федеральный исследовательский центр Уральского отделения Российской академии наук, лаборатория нелинейной механики деформируемого твердого тела Института механики сплошных сред, ведущий научный сотрудник;

Люкшин Петр Александрович, доктор физико-математических наук, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт физики прочности и материаловедения Сибирского отделения Российской академии наук, лаборатория механики полимерных композиционных материалов, старший научный сотрудник;

Жуков Александр Степанович, доктор физико-математических наук, федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования Национальный исследовательский Томский государственный университет, дирекция программ развития, директор.

Защита состоится 23 сентября 2022 г. в 17 час. 30 мин. на заседании диссертационного совета «НИ ТГУ.01.02», созданного на базе физико-технического факультета федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский Томский государственный университет» по адресу: 634050, г. Томск, пр. Ленина, 36 (учебный корпус № 2 ТГУ, аудитория 428).

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке и на официальном сайте федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский Томский государственный университет» www.tsu.ru

Материалы по защите диссертации размещены на официальном сайте ТГУ: <https://dissertations.tsu.ru/PublicApplications/Details/ea4db4bc-45b5-43e8-889f-87b02f1171d4>.

Автореферат разослан «__» августа 2022 года

Ученый секретарь
диссертационного совета



Усанина Анна Сергеевна

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Многие искусственные и естественные материалы проявляют вязкоупругие свойства. Чаще всего необходимость учета таких свойств возникает в отношении полимеров и композитов с полимерной матрицей.

Определяющие уравнения для вязкоупругих тел содержат интегральные операторы, что значительно усложняет математическое описание деформационного поведения таких тел. Поэтому на практике часто в первом приближении вопросы анализа ползучести и релаксации опускаются. С другой стороны, в таких случаях увеличиваются риски отказов, которые могли бы быть спрогнозированы в случае учета реологических свойств материала изделия. Особенно характерна такая практика для проектирования по инженерным методикам, основанным на элементарной теории. Вместе с тем, для целого ряда отраслей такие отказы неприемлемы. Так, при исследовании механических свойств биологических материалов, их вязкоупругое поведение часто не может быть проигнорировано. Разработка ракетной и космической техники также является одной из основных отраслей, формирующих запрос на исследования в области вязкоупругости. Необходимость учета ползучести и/или релаксации в механически нагруженных телах может возникать в самых разных областях, таких как дорожное строительство, геология, разработка автомобильных шин, биомедицинские исследования, нефтегазовый сектор, т.д.

Часто при анализе напряженно-деформированного состояния изделий из вязкоупругих материалов применяется специальное инженерное программное обеспечение. Однако, учет некоторых неупругих свойств, в том числе вязкоупругости, возможен только в ряде «тяжелых» пакетов, требующих достаточно высокой квалификации пользователя и сравнительно длительного обучения. Кроме того, коммерческие версии являются весьма дорогостоящими. Напротив, программное обеспечение для решения задач линейной упругости существенно доступнее и проще в освоении. Поэтому актуален вопрос разработки методов учета вязкоупругих свойств, возможных к реализации при использовании таких продуктов и/или совместно с инженерными методиками прочностных расчетов.

Степень разработанности темы исследования. Исследование вязкоупругости начато в конце девятнадцатого – начале двадцатого веков Кельвином, Максвеллом, Больцманом, и Вольтерра.

Формулировка определяющих соотношений и методов анализа для вязкоупругих тел содержится в фундаментальных монографиях различных авторов, например, А.А. Адамова, А.А. Ильюшина, М.А. Колтунова, Ю.Н. Работнова, А.Р. Ржаницына, R.M. Christensen, A.D. Drozdov, J.D. Ferry, W. Flugge, R.S. Lakes, F.A. Mainardi, C. Pipkin, J.N. Reddy.

В литературе встречаются различные варианты моделей вязкоупругости, основанные на комбинации вязких и упругих элементов. Практически все такие модели сводятся к ядрам (и функциям) ползучести и релаксации, содержащим константы и экспоненты времени. Строго говоря, такие функции не описывают начальный этап формирования, поскольку принимают конечные значения, тогда как в начальный момент времени

скорость ползучести и релаксации стремится к бесконечности. Этого недостатка лишены слабосингулярные ядра, например – дробно-экспоненциальные.

Тем не менее, для практических расчетов сегодня наиболее часто применяются именно суммы убывающих экспонент (ряды Прони). Такой вид ядра позволяет достичь высокой точности анализа (в том числе на начальном участке истории нагружения) путем аппроксимации большого объема экспериментальных данных за счет увеличения числа слагаемых, что легко реализуемо при автоматизированных вычислениях.

Практически единственным аналитическим способом точного решения задач вязкоупругости остается принцип соответствия (Вольтерра). Однако, он имеет ряд существенных ограничений, в частности:

- необходимость наличия аналитического решения соответствующей упругой задачи,
- неприменимость к стареющим телам,
- требование неизменяемости во времени объема, занимаемого телом и его границы.

Ввиду сложностей получения точных решений, разработано большое число приближенных, в основном численных, методов. Такие методы описаны в работах А.А. Ильюшина, R.A. Schapery, А.А. Каминского, V. Janovsky, S. Ataglu, C. Chazal, N. Lahellec, H.N. Wang, L.S. Shankar, S. Rajthilak, U. Saravanan, S. Ananthapadmanabhan, L. Moresi, F. Dufour, H.-B. Muhlhaus, S.A. Kaloerov, A.A. Koshkin, S. Klinkel, C. Sansour, W. Wagner, B. Nedjar, P. Saxena, M. Hossain, P. Steinmann.

Работы E.H. Lee, T.G. Rogers, A.R. Zak O.C. Zienkiewicz, M. Watson, G.A. Holzapfel, T.C. Gasser, J. C. Simo в области численного решения задач вязкоупругости с представлениями функций релаксации в виде рядов Прони послужили основой алгоритмов, широко используемых в программном обеспечении прикладного конечно-элементного анализа.

Подробная справка о развитии методов учета вязкоупругих свойств материалов при конечно-элементном моделировании в течение последних десятилетий XX в. содержится в работах M. A. Zocher.

Rami Haj-Ali, Anastasia Muliana, I. Tsukrov, O. Eroshkin, B. Celikkol, W Paul, A.A. Светашков, С.М. Павлов, К. К. Манабаев работали над развитием итерационных методов.

В. И. Малый, и Н. А. Труфанов разработали метод квазиконстантных операторов согласно которому при выполнении условия квазиконстантности интегральных операторов, определяющих физические свойства материала, вязкоупругое решение может быть получено на основе упругого, через использование упрощенных соотношений для операций над квазиконстантными операторами.

А.А. Светашковым сформулирован следующий подход. Решение задачи для вязкоупругого тела может быть получено аналогично решению упругой задачи путем замены в последнем материальных констант на некоторые функции времени, называемые эффективными (по времени)

модулями. Эти эффективные по времени модули обладают следующими свойствами:

- их размерность соответствует размерности модулей сдвига и объемного сжатия;
- они положительно определены при $t > 0$;
- при $t = 0$ и $t \rightarrow \infty$ они совпадают с соответствующими упруго-мгновенными и длительными модулями;
- не зависят от вида аппроксимации кривых ползучести и/или релаксации.

Допущением метода является возможность представления граничных напряжений и перемещений в виде сумм попарных произведений заданных функций координат на заданные функции времени. Это справедливо во многих практических случаях.

Эффективные по времени модули могут быть найдены в аналитическом виде до решения граничной задачи путем вычисления свертки интегральных операторов и функций времени, входящих в представление условий на границе.

Метод решения краевых задач вязкоупругого тела, основанный на этом подходе назван методом разделения пространственных и временных переменных, поскольку при расчете эффективных модулей исключаются из рассмотрения пространственные переменные, а при получении упругого решения – временные.

Апробация метода разделения пространственных и временных переменных, проведенная автором настоящей работы, показала, что данный метод может быть уточнен путем установления зависимости вида функций времени – эффективных модулей от типа граничных условий.

Цели и задачи исследования. Целью настоящей диссертационной работы является уточнение метода разделения переменных для анализа напряженно-деформированного состояния вязкоупругих тел, путем указания зависимости эффективных по времени модулей от типа граничных условий

Для достижения указанной цели поставлены и решены следующие задачи:

1. Определение в зависимости от типа граничных условий вида функций времени, используемых в качестве эффективных по времени модулей для изотропных тел.
2. Распространение полученных результатов на случай анизотропии.
3. Практическая отработка и валидация метода разделения переменных на задачах, имеющих аналитическое решение.
4. Оценка точности метода и формулировка ограничений на его применение.
5. Оценка эффективности разработанного метода при численной реализации с использованием программного обеспечения для инженерного анализа.

Научная новизна исследования:

1. Предложена модификация метода разделения переменных для граничных задач линейной вязкоупругости, устанавливающая зависимость вида эффективных по времени модулей от типа граничных условий
2. Получены новые выражения для обобщенных эффективных по времени модулей.
3. Получены новые обоснования вида функций метода разделения переменных, зависящих от времени – эффективных по времени модулей.
4. Произведено сравнение решений, получаемых с использованием модифицированного метода разделения переменных с решениями, полученными на основе принципа Вольтерра. Даны оценки точности.
5. Произведена оценка эффективности применения метода разделения переменных для учета вязкоупругих свойств материала при конечно-элементном моделировании. Приведено сравнение по точности и времени счета с методом интегрирования истории нагружения.

Теоретическая и практическая значимость диссертации.

Теоретическая значимость состоит в развитии метода разделения переменных для решения граничных задач вязкоупругости с учетом типа граничных условий, расширении и уточнении пределов его применимости. Произведено уточнение метода путем указания вида эффективных по времени модулей в зависимости от типа граничных условий. Обосновано распространение метода на краевые задачи анизотропного линейно вязкоупругого тела

Практическая значимость состоит в возможности применения полученных в диссертации результатов для решения прикладных задач. Причем возможны два наиболее применимых подхода:

- аналитическое решение, в том числе с использованием инженерных методик, основанных на элементарной теории;
- численное решение, в том числе с применением программного обеспечения для инженерного конечно-элементного анализа. При этом само это программное обеспечение может не иметь специальных инструментов для учета вязкоупругих свойств материала.

Методология и методы исследования. В работе использованы методы механики деформируемого твердого тела, методы решения задач линейной вязкоупругости изотропного и анизотропного тел, в том числе методы вариационного исчисления, принцип Вольтерра, алгебра интегральных операторов Работнова, метод конечных элементов.

Положения, выносимые на защиту:

1. Модификация метода разделения переменных, позволяющая учитывать тип граничных условий краевой задачи линейной вязкоупругости
2. Обоснования вида функций метода разделения переменных – эффективных по времени модулей для граничных задач линейной вязкоупругости изотропного и анизотропного материала I и II рода путем решения вариационных задач
3. Обоснования вида функций метода разделения переменных – эффективных по времени модулей для граничных задач линейной

вязкоупругости изотропного и анизотропного материала I и II рода путем тождественных преобразований уравнений равновесия и граничных условий

4. Результаты сравнения решений, полученных модифицированным методом разделения переменных с решениями, полученными на основе принципа Вольтерра для задач линейной вязкоупругости с граничными условиями I, II, III рода для изотропного и анизотропного тела.

5. Результаты сравнения по точности и экономичности конечно-элементных решений, полученных с использованием модифицированного метода разделения переменных с решениями, полученными алгоритмом интегрирования истории нагружения по рекуррентным формулам.

Степень достоверности и апробация результатов исследования.

Основные результаты, представленные в диссертации, обсуждались на следующих конференциях:

1.V Международная научно-техническая конференция молодых ученых, аспирантов и студентов «Высокие технологии в современной науке и технике (ВТСНТ 2016)», Томск, 5-7 декабря 2016 г.

2. Конференция «Mechanical Engineering, Automation and Control Systems (MEACS 2016)», Томск, 27-29 октября 2016 г.

3.26 Всероссийская конференция по численным методам решения задач теории упругости и пластичности, Томск 24-28 июня 2019 г.

4.XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, Уфа 19-24 августа 2019 г.

5.XVIII Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Перспективы развития фундаментальных наук», г. Томск, 27-30 апреля 2021 г.

6.XI Всероссийская научная конференция «Фундаментальные и прикладные проблемы современной механики», г. Томск, 13-17 апреля 2022 года

По материалам диссертации Павловым М.С. опубликовано 8 научных работ в числе которых 3 статьи в изданиях, входящих в Перечень рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК для опубликования результатов диссертаций и индексируемых в международных базах Scopus и Web of Science, 5 статей в сборниках материалов конференций, индексируемых в международных базах Scopus и Web of Science.

Общий объем публикаций составляет 4 п.л., авторский вклад – 1,5 п.л.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа изложена на 122 страницах машинописного текста, состоит из введения, 4 глав, заключения и списка литературы, включающего 119 наименований. Работа содержит 46 рисунков.

Личный вклад автора. Автором получены результаты, и инициированы их обсуждения, в ходе которых была сформулирована ключевая для диссертации идея зависимости вида эффективных по времени модулей от типа граничных условий. При работе над диссертацией, автором лично предложен один из способов обоснования вида функций времени – эффективных по времени модулей, получены все, представленные в работе,

решения задач методом разделения переменных, ряд решений на основе принципа Вольтерра, разработаны конечно-элементные модели, проведен сравнительный анализ аналитических и численных решений. Также автором подготовлены к публикации все, полученные при работе над диссертацией, результаты.

Основное содержание работы

Во введении показана актуальность темы исследования и степень ее разработанности, сформулированы цели и задачи исследования и обоснованы его научная новизна и значимость, описаны методы исследования, приведены положения, выносимые на защиту и данные об апробации результатов исследования.

Первая глава посвящена формулировке метода разделения переменных для краевых задач линейно вязкоупругого изотропного тела с граничными условиями в напряжениях (II рода). Приведены обоснования вида функций времени – эффективных по времени модулей для данного типа задач на основе решения вариационных задач и на основе тождественных преобразований систем уравнений равновесия и граничных условий. Решен ряд тестовых задач.

Постановка краевой задачи линейно вязкоупругого тела в основном аналогична таковой для линейно упругого тела за исключением того, что связь между напряжениями и деформациями определяется интегральными уравнениями, которые в наиболее общем виде записываются в виде:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}(t) &= \left(K^* - \frac{2}{3} G^* \right) \theta \delta_{ij} + 2G^* \varepsilon_{ij}, \\ G^* \varepsilon_{ij} &= \int_0^t R(t-\tau) d\varepsilon_{ij}(\tau) = G_0 \left[\varepsilon_{ij}(t) - \int_0^t \Gamma(t-\tau) \varepsilon_{ij}(\tau) d\tau \right], \\ K^* \theta &= \int_0^t R_1(t-\tau) d\theta(\tau) = K_0 \left[\theta(t) - \int_0^t \Gamma_1(t-\tau) \theta(\tau) d\tau \right],\end{aligned}\quad (1)$$

где

$$\begin{aligned}\sigma &= \sigma_{ij} \delta_{ij}, \\ \theta &= \varepsilon_{ij} \delta_{ij},\end{aligned}\quad (2)$$

σ_{ij} , ε_{ij} – компоненты тензоров напряжений и деформаций, σ – шаровый тензор напряжений, θ – объемная деформация, δ_{ij} – символ Кронекера, $R(t)$, $R_1(t)$ – функции релаксации, $\Gamma(t)$, $\Gamma_1(t)$ – ядра релаксации, G_0 , K_0 – упругие модуль сдвига и объемного сжатия.

Соответственно, уравнения равновесия содержат вместо упругих констант материала интегральные операторы G^* , K^* , определяемые по (1),

$$\left(K^* + \frac{1}{3} G^* \right) \theta_{,i} + G^* \Delta u_i = 0, \quad (3)$$

где Δ – оператор Лапласа, $\theta_{,i}$ – производная от θ по координате x_i . Граничные условия в напряжениях

$$\sigma_{ij} n_j \Big|_{\Gamma_1} = S_i^0, \quad \langle i = 1, 2, 3 \rangle, \quad (j = 1, 2, 3), \quad (4)$$

где S_i^0 , – заданные граничные значения напряжений, n_i – направляющие косинусы нормали к части границы Γ_1 , где заданы напряжения. По индексам в угловых скобках суммирование не производится. S_i^0 представимо в виде

$$S_i^0 = S_{ik}^0(x_1, x_2, x_3) H_{ik}(t), \quad \langle i = 1, 2, 3 \rangle, \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (5)$$

где n – количество слагаемых.

Предложено определение эффективных модулей $k(t)$, $g(t)$ на основе решения некоторых вариационных задач. Введены вспомогательные физические уравнения

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^0(t) &= \left[k(t) - \frac{2}{3} g(t) \right] \theta \delta_{ij} + 2g(t) \varepsilon_{ij}, \\ \varepsilon_{ij}^0(t) &= \left[k_1(t) - \frac{2}{3} g_1(t) \right] \sigma \delta_{ij} + 2g_1(t) \sigma_{ij}, \\ 2g(t) &= \frac{1}{2g_1(t)}, \quad 3k(t) = \frac{1}{3k_1(t)}, \end{aligned} \quad (6)$$

где σ_{ij}^0 , ε_{ij}^0 – компоненты тензоров напряжений и деформаций вспомогательной среды, $k(t)$, $g(t)$ – функции времени, используемые в качестве упругих характеристик вспомогательной среды.

Функционалы удельных потенциальных энергий напряжений, соответствующие определяющим уравнениям (6),

$$\begin{aligned} W(\dot{\sigma}_{ij}) &= \int_0^T \varepsilon_{ij}(t) d\sigma_{ij}(t), \\ W_0(\dot{\sigma}_{ij}) &= \int_0^T \varepsilon_{ij}^0(t) d\sigma_{ij}(t), \quad (i, j = 1, 2, 3). \end{aligned}$$

Они могут быть приведены к положительно-определенному виду¹. Условие максимальной энергетической близости данных функционалов можно поставить следующим образом: существуют $M \geq m \geq 0$, обеспечивающие

$$mW_0(\dot{\sigma}_{ij}) \leq W(\dot{\sigma}_{ij}) \leq MW_0(\dot{\sigma}_{ij}).$$

Для определения M , m сформулированы две вариационные задачи.

$$m = \min W(\dot{\sigma}_{ij}), \quad M = \max W(\dot{\sigma}_{ij}),$$

$$W_0(\dot{\sigma}_{ij}) = 1, \quad W_0(\dot{\sigma}_{ij}) = 1.$$

Эти задачи на условный экстремум заменены одной задачей на безусловный экстремум функционала

$$\tilde{W}(\dot{\sigma}_{ij}) = W(\dot{\sigma}_{ij}) - \mu W_0(\dot{\sigma}_{ij}).$$

¹Кристенсен Р. М. Введение в теорию вязкоупругости / Р. М. Кристенсен. – М. : Мир, 1974. – 340 с.

где μ – множитель Лагранжа.

Последней удовлетворяют функции

$$k_c(t) = \frac{H(t)}{K^{*-1}H}, \quad (7)$$

$$g_c(t) = \frac{H(t)}{G^{*-1}H}, \quad (8)$$

при условии, что на границе напряжения зависят от единственной функции времени $H(t)$. Индекс "с" означает, что $g_c(t)$, $k_c(t)$ – эффективные модули кастильянового типа.

Предложен альтернативный способ получения (7), (8). Рассмотрена вспомогательная среда, в которой определяющие уравнения есть

$$\sigma_{ij}^0 = \left(k_s(t) - \frac{2}{3} \right) G^* \theta \delta_{ij} + 2G^* \varepsilon_{ij}, \quad (9)$$

где $k_s(t)$ – некоторая функция времени.

Дополнительное условие для вспомогательной среды

$$u_i = u'_i F'(t), \quad (10)$$

где u'_i – перемещения, зависящие только от координат, $F'(t)$ – функция времени. Тогда (9) записывается в виде

$$\sigma_{ij}^0 = \left(k_s(t) - \frac{2}{3} \right) \theta' G^* F' \delta_{ij} + 2\varepsilon'_{ij} G^* F' = \sigma'_{ij} H'(t), \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} \sigma'_{ij} &= \left(k_s(t) - \frac{2}{3} \right) G_0 \theta' \delta_{ij} + 2G_0 \varepsilon'_{ij}, \\ H'(t) &= \frac{G^*}{G_0} F', \quad F' = G_0 G^{*-1} H'. \end{aligned} \quad (12)$$

При $K^* \equiv K_0$ уравнения равновесия для вспомогательной среды с определяющими уравнениями (9) в тождественном (3) виде есть

$$\left(k_s(t) + \frac{1}{3} \right) G^* \theta_{,i} + \Delta G^* u_i = \left(k_s(t) G^* - K_0 \right) \theta_{,i}, \quad \langle i = 1, 2, 3 \rangle. \quad (13)$$

Правая часть (13) обращается в ноль при

$$k_s(t) = K_0 \frac{F'(t)}{H'(t)} = K_0 \frac{G^{*-1}H'}{H'(t)}. \quad (14)$$

Аналогичный анализ граничных условий для основной и вспомогательной сред, показал, что они также эквивалентны друг другу при выполнении (14), функции $H(t)$ и $H'(t)$ совпадают,

$$k_s = K_0 \frac{G^{*-1} H}{H(t) g_c(t)} = \frac{K_0}{g_c(t)}, \quad (15)$$

и (13) принимает тождественный вид

$$\left(K_0 + \frac{1}{3} g_c(t) \right) \theta_{,i} + g_c(t) \Delta u_i = 0. \quad (16)$$

Выражение для $k_c(t)$ получено аналогично из рассмотрения вспомогательной среды с определяющими уравнениями вида

$$\sigma_{ij}^1 = K^* \left[\left(1 - \frac{2}{3} g_s(t) \right) \theta \delta_{ij} + 2 g_s(t) \varepsilon_{ij} \right]$$

при условии $G^* \equiv G_0$.

Сформулирован метод решения задач линейной вязкоупругости с граничными условиями в напряжениях (II рода). Он состоит в замене вязкоупругой задачи на упругую, решение которой в заданный момент времени совпадает с решением исходной вязкоупругой. Постановки задач совпадают, за исключением того, что интегральные операторы заменяются на эффективные модули $g_c(t)$, $k_c(t)$. По найденным из упругого решения перемещениям определяются остальные параметры напряженно-деформированного состояния вязкоупругого тела.

Для подтверждения метода, с его помощью решен ряд тестовых задач, имеющих аналитическое решение.

Осевое растяжения стержня. Один его конец закреплен, а к другому прикладывается нагрузка S (Рисунок 1)



Рисунок 1 – Схема продольного нагружения стержня

Нагрузка S представляется в виде

$$S = P \cdot H(t), \quad (17)$$

где P – постоянная сила, $H(t)$ – некоторая функция времени.

Упругое решение дано из элементарной теории. Переход к вязкоупругому решению на основе принципа Вольтерра осуществляется заменой упругих констант на соответствующие операторы ползучести. В соответствии с методом разделения переменных в упругом решении сделана замена упругих констант на соответствующие эффективные модули $g_c(t)$ (определяется по (8)) и $k_c(t) = K_0$. Решения на основе принципа Вольтерра и методом разделения переменных тождественно совпадают.

Аналогично совпадают решения для чистого изгиба консольной балки.

Если условия на границе определяются несколькими функциями времени, применим принцип суперпозиции. На рисунке 2 показана консольная балка под распределенной нагрузкой.

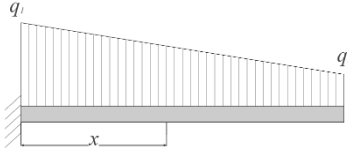


Рисунок 2 – Консольная балка под распределенной нагрузкой

Параметры нагрузки представляются в виде

$$q_1 = q_{10}H_1(t), \quad q_2 = q_{20}H_2(t).$$

где q_{10} , q_{20} – константы, $H_1(t)$, $H_2(t)$ – функции времени. Точное вязкоупругое решение

$$\begin{aligned} v(x, t) = & \frac{l^4}{360J} \left[5 \frac{x^4}{l^4} \left[\frac{q_2 H_2(t)}{3K_0} + q_{20} G^{*-1} H_2 \right] + \right. \\ & + \frac{x^5}{l^5} \left[\frac{q_1 H_1(t) - q_2 H_2(t)}{3K_0} + q_{10} G^{*-1} H_1 - q_{20} G^{*-1} H_2 \right] - \\ & \left. - \frac{x}{l} \left[\frac{5q_1 H_1(t) + 15q_2 H_2(t)}{3K_0} + 5q_{10} G^{*-1} H_1 + 15q_{20} G^{*-1} H_2 \right] \right], \end{aligned}$$

(18)

где l – длина балки, получено на основе упругого

$$\begin{aligned} v(x, t) = & \frac{l^4}{360J} \left[5 \left(\frac{x}{l} \right)^4 q_2 \left(\frac{1}{G_0} + \frac{1}{3K_0} \right) + \right. \\ & + \left(\frac{x}{l} \right)^5 (q_1 - q_2) \left(\frac{1}{G_0} + \frac{1}{3K_0} \right) - \\ & \left. - \frac{x}{l} (5q_1 + 15q_2) \left(\frac{1}{G_0} + \frac{1}{3K_0} \right) \right]. \end{aligned} \quad (19)$$

Для применения метода разделения переменных необходимо представить нагрузку, показанную на рисунке 3 как комбинацию нагрузок, каждая из которых определяется только одним компонентом – q_1 , либо q_2 . (рисунок 4)



Рисунок 4 – Суперпозиция нагрузок

Функции распределения нагрузки представляются в виде

$$q_{1x}(x) = \frac{q_{10}}{l} x H_1(t); \quad q_{2x}(x) = \frac{q_{20}}{l} (l-x) H_2(t), \quad (20)$$

где x – осевая координата. Упругие решения для этих случаев

$$v_1(x) = \frac{l^4}{360J} \left(\frac{1}{G_0} + \frac{1}{3K_0} \right) q_{1x} \left[\left(\frac{x}{l} \right)^5 - 5 \frac{x}{l} \right], \quad (21)$$

$$v_2(x) = \frac{l^4}{360J} \left(\frac{1}{G_0} + \frac{1}{3K_0} \right) q_{2x} \left[5 \left(\frac{x}{l} \right)^4 - \left(\frac{x}{l} \right)^5 - 15 \frac{x}{l} \right]. \quad (22)$$

Искомое решение есть сумма (21) и (22)

$$v = v_1 + v_2. \quad (23)$$

Переход к вязкоупругому решению по методу разделения переменных дает замена G_0 на $g_{c1}(t)$ в (21) и на $g_{c2}(t)$ в (22),

$$g_{c1}(t) = \frac{H_1(t)}{G^{*-1} H_1}; \quad g_{c2}(t) = \frac{H_2(t)}{G^{*-1} H_2}. \quad (24)$$

После такой замены и подстановки (21), (22) в (23), последнее принимает тождественный (18) вид.

Рассмотренные выше примеры имеют решение, содержащие линейные комбинации операторов G^* , G^{*-1} . Однако, часто решения имеют более сложный вид. В частности, многие из них содержат оператор связной ползучести g_{β}^*

$$g_{\beta}^* x \equiv \left(1 + \beta \frac{2}{3} G^* K^{*-1} \right)^{-1} x. \quad (25)$$

где β – некоторое число,

Далее приводятся результаты вычислений, полученные при заданных параметрах задачи.

Вязкоупругие свойства материала определяются (1), ядра релаксации имеют вид

$$\Gamma(t) = \lambda e^{(-\lambda-\gamma)t}, \quad \Gamma_1(t) = 0, \quad (26)$$

где λ , γ – параметры ядра сдвиговой релаксации

Такой выбор ядер обусловлен, в том числе тем, что при численном решении задач вязкоупругие свойства материала часто описываются суммами экспонент (рядами Прони). Объемный модуль задан постоянным, поскольку рассмотрены, главным образом, задачи, точные решения которых приведены в литературе и получены при этом условии.

Заданы следующие значения констант материала:

$$- G_0 = 6 \cdot 10^{10} \text{ Па},$$

$$- \lambda = 0,2,$$

$$- \gamma = 0,009,$$

$$- K_0 = 14 \cdot 10^{10} \text{ Па}.$$

Отношение мгновенного модуля к длительному, характеризующее степень проявления вязкоупругих свойств материала

$$\frac{G_0}{G_\infty} = \frac{\lambda + \gamma}{\gamma} \approx 23. \quad (27)$$

Чем меньше это соотношение, тем ближе поведение материала к упругому. Известно, что в реальных материалах оно практически никогда не превышает 15². Таким образом, обеспечен заведомо наилучший случай для точности нового метода.

Рассмотрена задача о нагружении кольца моментом. На внутренней границе кольца распределен момент M , внешняя граница жестко защемлена. Расчетная схема показана на рисунке 5.

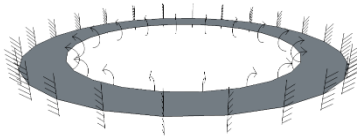


Рисунок 5 – Кольцо, защемленное по внешнему краю и нагруженное моментами, распределенным по внутреннему краю

Внешний радиус $a = 1$ м, внутренний $b = 0,3$ м

Момент M представляется в виде

$$M = M_0 H(t),$$

где M_0 – постоянная величина.

Рассмотрены два варианта:

– $H(t) = h(t)$ (постоянная нагрузка);

– $H(t) = \sin t$.

Точное решение

²Малый В. И., Метод квазиконстантных операторов в теории вязкоупругости анизотропных нестареющих материалов / В. И. Малый, Н. А. Труфанов // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1987. – № 6. С. 148-154

$$w(r, t) = \frac{3b^2}{2K_0\delta^3} \left\{ \left(1 - \frac{b^2}{a^2} \right) \frac{r^2}{b^2} + h(r-b) \left(2 \ln \frac{r}{b} - \frac{r^2}{b^2} + 1 \right) \right\} \times \\ \times \frac{1}{2} M \left[K_0 G^{*-1} H + g_{1/2}^* H \right], \quad (28)$$

Упругое решение отличается от (28) тем, что вместо операторов G^{*-1} , $g_{1/2}^*$ содержит соответствующие комбинации упругих констант, которые при решении методом разделения переменных заменяются на комбинации, содержащие $g_c(t)$. На рисунке 6 показано распределение по истории нагружения погрешности метода разделения переменных относительно точного решения для прогиба на внутреннем радиусе.

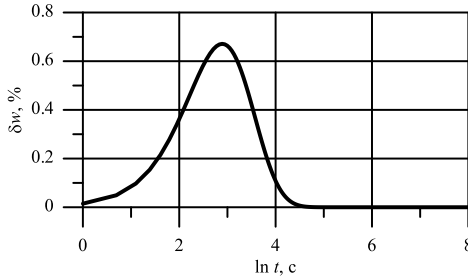


Рисунок 6 – Зависимость погрешности вычисления прогибов от времени

Максимальная погрешность определения перемещений для постоянной нагрузки ($H(t)=h(t)$) не более одного процента. Для гармонического закона изменения нагрузки относительная погрешность возрастает для моментов времени, когда абсолютные значения прогибов близки к нулю.

На рисунке 7 показано сравнение зависимостей прогибов от времени на внутреннем радиусе при $H(t) = \sin t$.

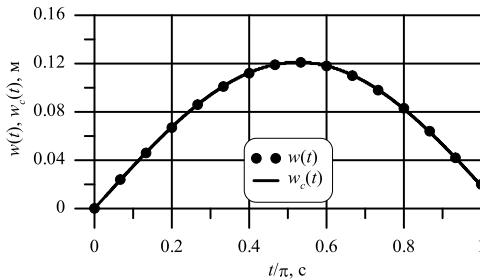


Рисунок 7 – Сравнение прогибов на внутреннем радиусе кольца, м

Абсолютные значения прогибов, полученные на основе принципа Вольтерра и методом разделения переменных, практически совпадают. Полученные расхождения в решениях, по-видимому, связаны с вычислительными погрешностями.

При этом, величина погрешности зависит от значения мгновенного коэффициента Пуассона. Для несжимаемых материалов она минимальна.

Рассмотрен пример применения метода разделения переменных для непосредственного определения напряжений. На боковой поверхности длинного полого цилиндра действуют линейно распределенные по длине касательные нагрузки. Граничные условия

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}(a, z) = 0; \quad \sigma_{rr}(b, z) = 0; \\ \tau_{rz}(a, z) = p_{z0}^0 \frac{z}{a}; \quad \tau_{rz}(b, z) = p_{z0} \frac{z}{b}, \end{aligned} \quad (29)$$

где a, b – соответственно внутренний и внешний радиусы цилиндра, P_{z0}^0, P_{z0} , – независимые от координат параметры нагрузки

$$p_{z0}^0 = \tilde{p}_{z0}^0 H_1(t); \quad p_{z0} = \tilde{p}_{z0} H_2(t). \quad (30)$$

В свою очередь, \tilde{p}_{z0}^0, p_{z0} – константы. Расчетная схема показана на рисунке 8.

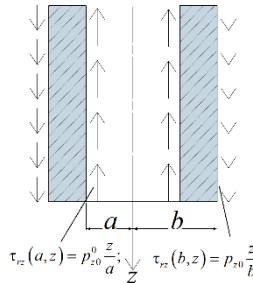


Рисунок 8– Схема нагружения цилиндра

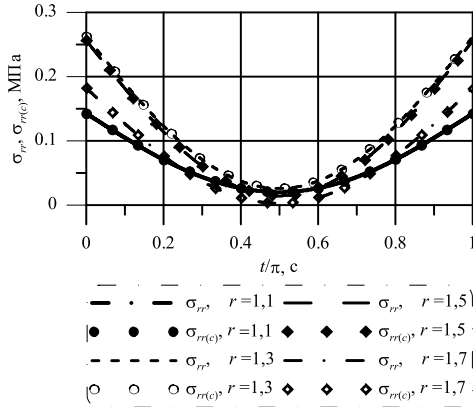
Точные упругое и вязкоупругое решения этой задачи приводятся в литературе³. Сравнение решений проведено при заданных функциях $H_1 = \sin(\pi t)$, $H_2(t) = h(t)$ и параметрах

$$a = 1 \text{ м}, \quad b = 2 \text{ м}, \quad \tilde{p}_{z0}^0 = 1 \text{ МПа}, \quad \tilde{p}_{z0}^0 = 2 \text{ МПа}.$$

Свойства материала аналогичны предыдущей задаче

На рисунке 9 показаны результаты сравнения вычисленных радиальных напряжений σ_{rr} .

³Колтунов, М. А. Прочностные расчеты изделий из полимерных материалов / М. А. Колтунов, В. П. Майборода, В. Г. Зубчанинов. – М. : Высшая школа, 1983. – 239 с.

Рисунок 9 – Сравнение напряжений σ_{rr}

Для остальных напряжений получены сходные результаты. Во всех рассмотренных случаях решение методом разделения переменных практически совпало с решением на основе принципа Вольтерра.

Вторая глава посвящена формулировке метода разделения переменных для краевых задач линейно вязкоупругого изотропного тела с граничными условиями в перемещениях (I рода). Приводится обоснование вида функций времени – эффективных по времени модулей для данного типа задач. Рассмотрены решения тестовых задач.

Граничные условия в перемещениях

$$u_i|_{\Gamma} = u_i^0, \quad \langle i = 1, 2, 3 \rangle, \quad (31)$$

$$u_i^0 = u_{ik}^0(\bar{x}) H_k(t), \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

где u_{ik}^0 – перемещения, зависящие только от координат, n – количество слагаемых.

Вид эффективных модулей метода разделения переменных для этого случая можно получить, записав функционалы удельных потенциальных энергий деформаций

$$W(\varepsilon_{ij}) = \int_0^T \sigma_{ij}(t) d\varepsilon_{ij}(t), \quad (32)$$

$$W_0(\dot{\varepsilon}_{ij}) = \int_0^T \sigma_{ij}^0(t) d\varepsilon_{ij}(t), \quad (i, j = 1, 2, 3),$$

и решив вариационную задачу о максимальной близости данных функционалов аналогично случаю граничных условий в напряжениях. Полученное решение дает вид эффективных модулей лагранжевого типа

$$g_i(t) = \frac{G^* H}{H(t)}, \quad k_i(t) = \frac{K^* H}{H(t)}. \quad (33)$$

Рассмотрен ряд тестовых задач, имеющих аналитическое решение.

Задача о сжатом амортизаторе в виде призматического стержня из вязкоупругого материала, вклеенного между двумя жесткими пластинами. На рисунке 10 представлена расчетная схема.

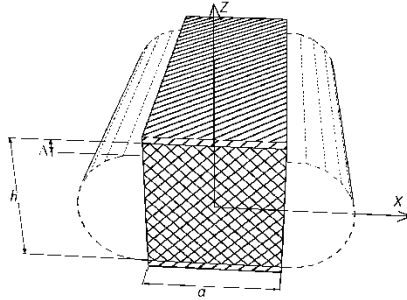


Рисунок 10 – Прямоугольный амортизатор

Граничные условия:

$$u_{z=\pm\frac{h}{2}} = 0, \quad u_{x=0} = 0, \quad w_{z=-\frac{h}{2}} = 0, \quad w_{z=\frac{h}{2}} = -\Delta; \quad \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=0} = 0. \quad (34)$$

Поджатие Δ представляется в виде произведения константы Δ_0 на функцию времени $H(t)$

$$\Delta = \Delta_0 H(t). \quad (35)$$

Упругое решение данной задачи приводит Э. Лавендел⁴. Соответствующее вязкоупругое решение

$$\begin{aligned} \sigma_x(t) &= 24 \left[C_{10} + 3C_{40} (x^2 + 3z^2) \right] G^* H; \\ \sigma_y(t) &= 12 \left[C_{10} + C_{20} + 6C_{40} (x^2 - z^2) \right] G^* H; \\ \sigma_z(t) &= 24 \left[C_{20} + 3C_{40} (x^2 + z^2) \right] G^* H; \\ \tau_{xz}(t) &= -144C_4 xz G^* H; \end{aligned} \quad (36)$$

где

⁴ Лавендел Э. Э. Расчет резинотехнических изделий / Э. Э. Лавендел. – М. : Машиностроение, 1976. – 232 с.

$$C_{10} = \frac{\Delta_0}{16h} (1 - \rho^2); \quad C_{20} = -\frac{\Delta_0}{16h} (3 + \rho^2); \quad C_{40} = \frac{\Delta_0}{12h^3}. \quad (37)$$

Решение, полученное подстановкой эффективного модуля сдвига

$$g_t(t) = \frac{G^* H}{H(t)}.$$

в упругое решение, тождественно (36).

Рассмотрена задача релаксации напряжений в растянутом стержне. (Рисунок 11)

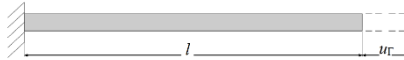


Рисунок 11 – Релаксирующий стержень

Перемещение u_T представляется в виде

$$u_T = u_0 \cdot H(t). \quad (38)$$

где u_0 – константа. Упругое решение дается элементарной теорией. Вязкоупругое решение в случае нерелаксирующего объема

$$\sigma = \frac{u_0}{l} E^* H = \frac{u_0}{l} 9K_0 (1 - g_{1/2}^*) H. \quad (39)$$

На рисунке 12 показано сравнение напряжений $\sigma(t)$, $\sigma_T(t)$, вычисленных по методу Вольтерра и по методу разделения переменных соответственно.

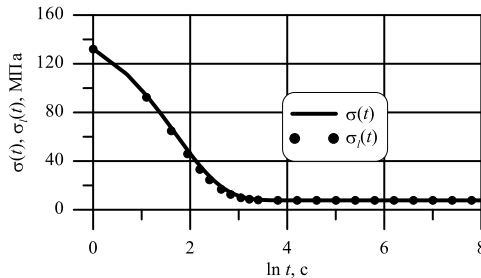


Рисунок 12 – Сравнение напряжений $\sigma(t)$ и $\sigma_T(t)$, МПа

На локальном участке истории нагружения имеется расхождение решений, вызванное вычислительными погрешностями.

Рассмотрен пример решения задачи со смешанными граничными условиями. Имеется круглая манжета фланцевого уплотнения прямоугольного

сечения. Ее размеры в исходном состоянии: R_1 – внешний радиус, R_2 – внутренний радиус, h – высота (рисунок 13).

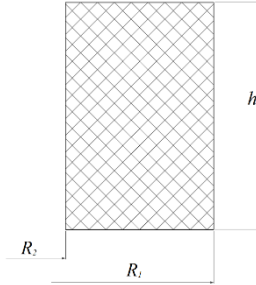


Рисунок 13 – Размеры сечения манжеты

В рабочем состоянии манжета поджата на величину Δ и находится под действием внутреннего давления P . Она не касается бортов канавки. На рисунке 14 показана расчетная схема.

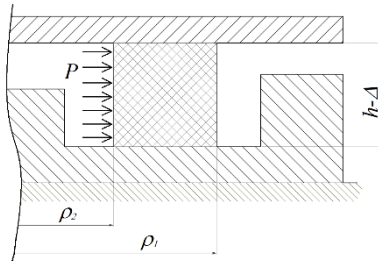


Рисунок 14– Схема нагружения манжеты

ρ_1 , ρ_2 – соответственно внешний и внутренний радиусы деформированной манжеты. Давление P и поджатие Δ представляются в виде

$$P = P_0 H_p(t), \quad (40)$$

$$\Delta = \Delta_0 H_\Delta(t), \quad (41)$$

где P_0 , Δ_0 – константы.

Граничные условия

$$\begin{aligned} w|_{z=0} &= 0; & w|_{z=h} &= -\Delta; \\ \sigma_r|_{r=R_2} &= -P; & \sigma_r|_{r=R_1} &= 0; \\ \tau_{r\theta}|_{r=R_1} &= \tau_{r\theta}|_{r=R_2} = \tau_{rz}|_{r=R_1} = \tau_{rz}|_{r=R_2} = 0. \end{aligned} \quad (42)$$

От механических свойств материала зависят только компоненты u_r и σ_z

В случае упругого материала

$$u_r = \frac{C_0}{2} r + \frac{C_1}{r}, \quad \sigma_z = G_0 (-2C_0 + C_3). \quad (43)$$

где r – радиальная координата,

$$C_0 = \frac{\Delta}{h}; \quad C_1 = \frac{P}{G_0} R_2^2 \left[2 \left(1 - \frac{R_2^2}{R_1^2} \right) \right]^{-1}; \quad C_3 = \frac{P}{G_0} \left(1 - \frac{R_2^2}{R_1^2} \right)^{-1} - \frac{\Delta}{h}. \quad (44)$$

Вязкоупругое решение получается заменой в (44) модуля сдвига на оператор ползучести. Поскольку на разных участках границы заданы условия разного типа, применен принцип суперпозиции. В одном случае задано только давление, в другом – только перемещения.

$$u_r = \frac{\Delta_0 r}{2h} H_\Delta(t) + \frac{P_0}{r} R_2^2 \left[2 \left(1 - \frac{R_2^2}{R_1^2} \right) \right]^{-1} G^{*-1} H_p, \quad (45)$$

$$\sigma_z = -3 \frac{\Delta_0}{h} G^* H_\Delta + \left(1 - \frac{R_2^2}{R_1^2} \right)^{-1} P_0 H_p(t).$$

Для перехода к решению методом разделения переменных в (44) G_0 заменен на $g_c(t)$ для слагаемых с индексом Δ и на $g(t)$ – с индексом P . Полученные выражения тождественны (45).

В третьей главе метод разделения переменных распространен на случай анизотропного линейно вязкоупругого тела.

Определяющие уравнения нестареющего линейно вязкоупругого тела, обладающего свойствами анизотропии общего вида:

$$\varepsilon_{ij}(t) = \Gamma_{ijkl}^* \sigma_{kl}, \quad \langle i, j = 1, 2, 3 \rangle, \quad (k, l = 1, 2, 3). \quad (46)$$

Операторы релаксации:

$$\Gamma_{ijkl}^* \sigma_{kl} = \int_0^t R_{ijkl}(t-\tau) \dot{\sigma}_{kl}(\tau) d\tau,$$

$$(k, l = 1, 2, 3), \quad \langle i, j = 1, 2, 3 \rangle,$$

где $R_{ijkl}(t)$ – функции релаксации, обладающие свойствами симметрии:

$$R_{ijkl}(t) = R_{jikl}(t) = R_{ijlk}(t).$$

Кроме того,

$$R_{ijkl}(t) = R_{klij}(t),$$

$$R_{ijkl}(0) = G_{ijkl}^0.$$

где G_{ijkl}^0 – тензор упруго-мгновенных постоянных. Число независимых функций памяти равно 21.

Физические уравнения, разрешенные относительно напряжений:

$$\sigma_{ij}(t) = C_{ijkl}^* \varepsilon_{kl},$$

$$\langle i, j = 1, 2, 3 \rangle, \quad \langle k, l = 1, 2, 3 \rangle.$$

$$C_{ijkl}^* \varepsilon_{kl} \equiv \int_0^t K_{ijkl}(t-\tau) \dot{\varepsilon}_{kl}(\tau) d\tau.$$

Свойства симметрии тензора функций ползучести $K_{ijkl}(t)$ аналогичны свойствам соответствующих функций релаксации $R_{ijkl}(t)$.

Система уравнений равновесия в перемещениях:

$$\left[C_{ijkl}^* u_{k,l} \right]_{,j} + X_i = 0, \quad \langle i = 1, 2, 3 \rangle, \quad \langle j, k, l = 1, 2, 3 \rangle.$$

Граничные условия в напряжениях:

$$C_{ijkl}^* u_{k,l} n_j \Big|_{\Sigma_1} = S_i^0, \quad \langle i = 1, 2, 3 \rangle, \quad \langle j, k, l = 1, 2, 3 \rangle,$$

где S_i^0 – граничные напряжения (5), Σ_1 – часть границы Σ , на которой заданы напряжения, n_j – направляющие косинусы нормали.

Граничные условия в перемещениях соответствуют (31)

Определяющие уравнения для вспомогательной упругой среды сравнения:

$$\varepsilon_{ij}^0(t) = P_{ijkl}(t) \sigma_{kl}(t), \quad \langle i, j = 1, 2, 3 \rangle, \quad \langle k, l = 1, 2, 3 \rangle. \quad (47)$$

где $P_{ijkl}(t)$ – искомые эффективные модули.

Функционалы удельных потенциальных энергий напряжений для основной и вспомогательной сред:

$$P(\dot{\sigma}_{ij}) = \int_0^T \dot{\sigma}_{ij}(t) \Gamma_{ijkl}^* \sigma_{kl} dt, \quad (48)$$

$$P_0(\dot{\sigma}_{ij}) = \int_0^T \dot{\sigma}_{ij}(t) P_{ijkl}(t) \sigma_{kl}(t) dt, \quad \langle i, j, k, l = 1, 2, 3 \rangle.$$

Функционалы (48) могут быть приведены к положительно-определенному виду. Решение задачи о максимальной близости данных функционалов дает выражения для эффективных модулей кастильянского типа для анизотропной среды.

$$P_{ijkl}^c(t) = \frac{\Gamma_{ijkl}^* H}{H(t)}, \quad \langle i, j, k, l = 1, 2, 3 \rangle. \quad (49)$$

При заданных на границе перемещениях использованы функционалы удельной потенциальной энергии деформаций

$$W(\dot{\varepsilon}_{ij}) = \int_0^t \dot{\varepsilon}_{ij}(t) C_{ijkm}^* \varepsilon_{km} dt, \quad \langle i, j, k, m = 1, 2, 3 \rangle. \quad (50)$$

$$W_0(\dot{\varepsilon}_{ij}) = \int_0^T \dot{\varepsilon}_{ij}(t) g_{ijkm}(t) \varepsilon_{km} dt, \quad \langle i, j, k, m = 1, 2, 3 \rangle, \quad (51)$$

где $g_{ijkm}(t)$ – искомые эффективные модули кастильянового типа.

Решение задачи о максимальной близости функционалов (50), (51) дает выражения для эффективных модулей лагранжевого типа анизотропного тела

$$g_{ijkm}^l(t) = \frac{C_{ijkn}^* H}{H(t)}, \langle i, j, k, m = 1, 2, 3 \rangle. \quad (52)$$

В частном случае трансверсально-изотропной вязкоупругой среды с определяющими уравнениями

$$\begin{aligned} \sigma_r &= A_{11}^* \varepsilon_r + A_{12}^* \varepsilon_\theta + A_{13}^* \varepsilon_z, \\ \sigma_\theta &= A_{12}^* \varepsilon_r + A_{11}^* \varepsilon_\theta + A_{13}^* \varepsilon_z, \\ \sigma_z &= A_{13}^* (\varepsilon_r + \varepsilon_\theta) + A_{33}^* \varepsilon_z, \\ \tau_{\theta z} &= A_{44}^* \gamma_{\theta z}, \quad \tau_{rz} = A_{44}^* \gamma_{rz}, \\ \tau_{r\theta} &= \frac{1}{2} (A_{11}^* - A_{12}^*) \gamma_{r\theta}, \end{aligned} \quad (53)$$

где A_{ij}^* – операторы релаксации, эффективных модули лагранжевого типа есть:

$$g_{11}^l(t) = \frac{A_{11}^* H}{H(t)}, \quad g_{12}^l(t) = \frac{A_{12}^* H}{H(t)}, \quad \dots, \quad g_{44}^l(t) = \frac{A_{44}^* H}{H(t)}. \quad (54)$$

Методом разделения переменных решен ряд тестовых задач. Прямоугольная пластинка из анизотропного вязкоупругого материала нагружена в соответствии с рисунком 15.

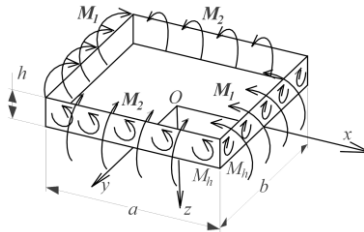


Рисунок 15 – Изгиб прямоугольной вязкоупругой пластинки

Рассмотрен случай ортотропного материала с тремя плоскостями симметрии. Одна из плоскостей параллельна срединной поверхности пластины. Модель ортотропного тела содержит 9 постоянных и упругие перемещения есть:

$$\begin{aligned}
u &= \frac{6}{h^3} [2a_{11}xzM_1 + M_2 2a_{12}xz + M_h a_{66}yz], \\
v &= \frac{6}{h^3} [-a_{12}yzM_1 + M_2 a_{22}yz + M_h 2a_{66}xz], \\
w &= \frac{6}{h^3} [M_1 (-a_{11}x^2 - a_{12}y^2 - a_{13}z^2) + \\
&\quad + M_2 (-a_{12}x^2 + a_{22}y^2 + a_{23}z^2) - M_h a_{66}xy].
\end{aligned} \tag{55}$$

где

$$\begin{aligned}
a_{11} &= \frac{1}{E_1}, \quad a_{12} = -\frac{\nu_{21}}{E_2}, \quad a_{13} = -\frac{\nu_{31}}{E_3}, \\
a_{12} &= -\frac{\nu_{12}}{E_1}, \quad a_{22} = \frac{1}{E_2}, \quad a_{23} = -\frac{\nu_{32}}{E_3}, \quad a_{66} = \frac{1}{G_3}.
\end{aligned} \tag{56}$$

$E_1, E_2, E_3, \nu_{12}, \nu_{21}, \nu_{31}, \nu_{32}, G_3$ – упругие характеристики вдоль осей ортотропии. При переходе к вязкоупругости в (55) упругие константы заменены вязкоупругими операторами

$$a_{11} \rightarrow a_{11}^*, \quad a_{12} \rightarrow a_{12}^*, \dots, a_{66} \rightarrow a_{66}^*,$$

Внешние нагрузки:

$$\begin{aligned}
M_1 &= \tilde{M}_1 H_1(t), \\
M_2 &= \tilde{M}_2 H_2(t), \\
M_h &= \tilde{M}_3 H_3(t),
\end{aligned}$$

где $\tilde{M}_1, \tilde{M}_2, \tilde{M}_3$ – константы. Поскольку внешние нагрузки могут меняться во времени по индивидуальным законам, использован принцип суперпозиции.

Эффективные модули кастильянового типа ортотропного вязкоупругого тела

$$g_{m,c}^l(t) = \frac{H_l(t)}{G_m^{*-1} H_l}, \quad K_{m,c}^l(t) = \frac{H_l(t)}{K_m^{*-1} H_l}, \quad \langle m = 1, 2, 3 \rangle, \langle l = 1, 2, 3 \rangle. \tag{57}$$

Решение, полученное методом разделения переменных, тождественно совпадает с решением, найденным по методу Вольтерра.

Рассмотрена задача о напряженно-деформированном состоянии трансверсально-изотропного вязкоупругого массива, имеющего цилиндрическую полость. Компоненты напряжений и деформаций имеют вид

$$\begin{aligned}
\sigma_r &= \frac{a_{13}}{a_{11} + a_{12}} \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) \gamma z, \quad \dot{\epsilon}_\phi = \frac{a_{13}}{a_{11} + a_{12}} \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) \gamma z, \quad \sigma_z = -\gamma z, \\
\epsilon_r &= -\frac{(a_{11} - a_{12}) a_{13}}{a_{11} + a_{12}} \frac{R^2}{r^2} \gamma z, \quad \epsilon_z = \frac{2a_{13} - (a_{11} + a_{12}) a_{33}}{a_{11} + a_{12}} 2\gamma z.
\end{aligned}$$

где γ – удельный вес массива, r, z – координаты, R – радиус полости.

Константы $a_{11} - a_{33}$ выражены через модули G, G_1, K, K_1 . Заменой упругих констант G, G_1 на соответствующие вязкоупругие операторы

$$\begin{aligned} \frac{a_{13}^*}{a_{11}^* + a_{12}^*} &= \frac{K}{2K_1} \left(1 - g_2^* - \frac{3}{2} K_1 G_1^{*-1} + \frac{3}{2} K_1 G_1^{*-1} g_2^* \right), \\ \frac{(a_{11}^* - a_{12}^*) a_{13}^*}{a_{11}^* + a_{12}^*} &= \frac{1}{3K_1} g_2^* - \frac{1}{2} G_1^{*-1} g_2^*, \\ \frac{2a_{13}^* - (a_{11}^* + a_{12}^*) a_{33}^*}{a_{11}^* + a_{12}^*} &= \frac{K}{K_1} \left(1 - g_2^* - \frac{3}{2} K_1 G_1^{*-1} + \frac{3}{2} G_1^{*-1} g_2^* \right) - \\ &\quad - \left(\frac{1}{3} G_1^{*-1} + \frac{1}{9K} \right) \end{aligned} \quad (58)$$

получено вязкоупругое решение.

В (58) основную вычислительную сложность представляет произведение операторов G_1^{*-1} и g_2^* . На рисунке 16 показано распределение отклонений функции

$$\delta(t) = \frac{G^{*-1} g_2^* h - \left(\frac{1 + 4g_c(t)}{3K_0} \right)^{-1} \frac{g_c^1(t)}{G^{*-1} g_2^* h} h(t)}{G^{*-1} g_2^* h}.$$

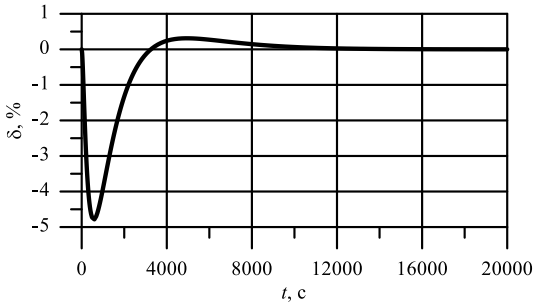


Рисунок 16 – Распределение отклонений функции $G_1^{*-1} g_2^* h$

На рисунке 17 показано сравнение зависимости от времени радиальных напряжений σ_r, σ_r^f полученных двумя методами.

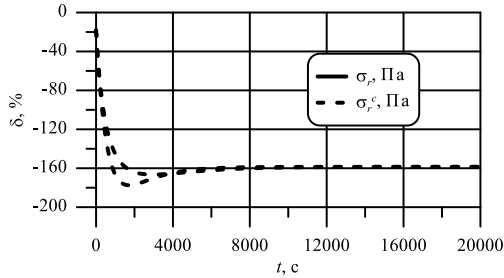


Рисунок 17 – Сравнение величин σ_r , σ_r^c в течение истории нагружения

Наибольшие погрешности решения методом разделения переменных возникают на участках истории нагружения с большим изменением скорости ползучести и релаксации. Это является ограничением представляемого метода.

Четвертая глава посвящена совместному применению метода разделения переменных и метода конечных элементов. Даются сравнительные оценки эффективности метода разделения переменных и метода интегрирования истории нагружения по рекуррентным формулам.

Для реализации метода конечных элементов и метода интегрирования истории нагружения использован коммерческий программный продукт ANSYS Mechanical.

Функции релаксации, используемые в ANSYS, имеют вид

$$G(t) = G_0 \left[\alpha_\infty^G + \sum_{i=1}^{n_G} \alpha_i^G e^{-\frac{t}{\tau_i^G}} \right],$$

$$K(t) = K_0 \left[\alpha_\infty^K + \sum_{i=1}^{n_K} \alpha_i^K e^{-\frac{t}{\tau_i^K}} \right],$$
(59)

где G_0 , K_0 – мгновенные модуль сдвига и объемный модуль, α_i^G , α_i^K , α_∞^G , α_∞^K , τ_i^G , τ_i^K , n_G , n_K – константы, определяемые по экспериментальным кривым. Индексы G соответствуют параметрам функции сдвиговой ползучести, индексы K – объемной. При этом величины α_∞^G , α_∞^K определяются как

$$\alpha_\infty^G = \frac{G_\infty}{G_0}, \quad \alpha_\infty^K = \frac{K_\infty}{K_0},$$
(60)

где, в свою очередь, G_∞ , K_∞ – длительные сдвиговой и объемный модули. Значения остальных параметров определяются по экспериментальным данным.

Если ядро сдвиговой релаксации имеет вид (26), эквивалентность с функцией сдвиговой релаксации вида (59) достигается, когда отрезок ряда Прони состоит из единственного члена, и связь параметров имеет вид

$$\tau_1^G = \frac{1}{\lambda + \gamma}, \quad \alpha_1^G = \frac{\lambda}{\lambda + \gamma}. \quad (61)$$

При интегрировании истории нагружения возникает вопрос выбора шага интегрирования по времени.

Рассмотрено три варианта:

– шаг интегрирования по времени t_{step} равен длительности истории нагружения t (интегрирование производится за один шаг);

– t_{step} выбирается автоматически;

– t_{step} равен 1 с.

Также рассмотрены разные варианты выбора типа конечных элементов.

Рассмотрена задача осевого растяжения стержня длиной 1 м и площадью поперечного сечения 1 м². Расчетная схема соответствует рисунку 1. Реализованы три конечно-элементные модели:

– на двухузловых стержневых элементах,

– на четырехузловых плоских элементах,

– на восьмиузловых объемных элементах.

Для всех конечно-элементных моделей оценивалась точность определения перемещений относительно аналитического решения.

Рассмотрены два варианта:

– постоянная во времени нагрузка,

– нагрузка, изменяющаяся по гармоническому закону.

На рисунке 18 приведены зависимости от времени относительной погрешности численного решения при различных настройках алгоритма интегрирования истории нагружения и использовании метода разделения переменных для модели на двухузловых элементах при постоянной нагрузке.

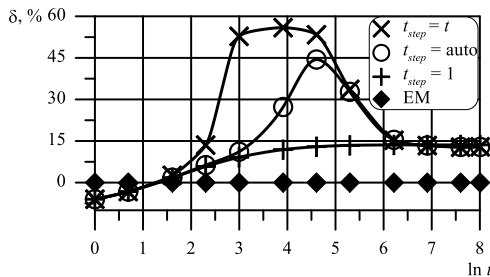


Рисунок 18– Погрешность численного решения и решения на основе метода разделения переменных для одномерных элементов

На рисунке 19 показаны аналогичные зависимости для моделей на плоских и объемных элементах (во всех случаях результаты расчетов полностью совпали).

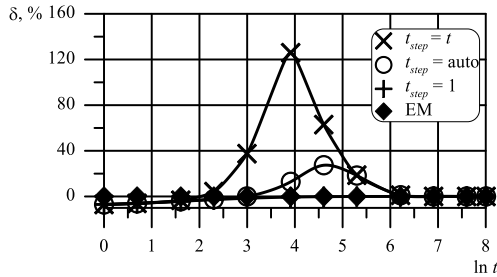


Рисунок 19 – Погрешность численного решения и решения на основе метода разделения переменных для дву- и трехмерных элементов

При переменной во времени нагрузке, также получено существенное ухудшение точности вязкоупругого решения при увеличении шага интегрирования.

На рисунке 20 представлено сравнение процессорного времени счета t_{CP} при разных шагах интегрирования и при использовании метода разделения переменных для случая постоянной нагрузки (модель на двухузловых элементах).

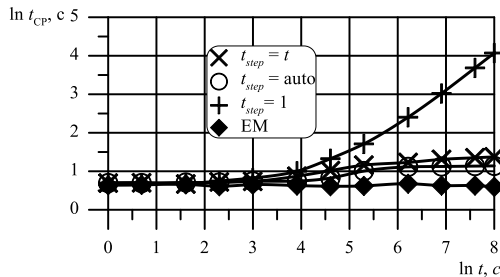


Рисунок 20 – Зависимость процессорного времени счета t_{CP} от длительности истории нагружения t при разных шагах интегрирования t_{step} и использовании метода разделения переменных (модель на двухузловых элементах)

Аналогичная зависимость получена для моделей на четырех- и восьмиузловых элементах.

На рисунке 21 показано сравнение времени счета для случая гармонической нагрузки (модель на плоских элементах).

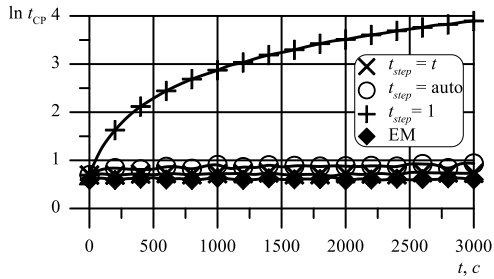


Рисунок 21 – Зависимость процессорного времени t_{CP} от длительности истории нагружения t при разных шагах интегрирования t_{step} и использовании метода разделения переменных (модель на плоских элементах)

Аналогичная зависимость получена для модели на двухузловых элементах.

Таким образом, для достижения высокой точности численного решения методом интегрирования истории нагружения необходимо использовать достаточно малый шаг по времени, что с увеличением длительности анализируемого временного промежутка увеличивает процессорное время счета. При этом использование двухузловых элементов дает худшую точность по сравнению с четырех- и восьмиузловыми элементами. Напротив, точность и ресурсоемкость метода разделения переменных не зависят от длительности истории нагружения и формулировки конечных элементов.

Заключение

Получены следующие результаты:

1. Построены зависимости, позволяющие определить вид функций времени – эффективных модулей в зависимости от вида ядер ползучести и релаксации, определяющих вязкоупругие свойства среды, а также от типа граничных условий краевой задачи изотропного тела.

2. Построены аналогичные зависимости и предложен способ решения краевых задач линейной вязкоупругости для случая анизотропного тела.

3. Проведена практическая отработка предложенного метода на задачах, имеющих аналитическое решение. Реализовано применение метода совместно с программным комплексом инженерного конечно-элементного анализа.

4. Сделаны сравнительные оценки точности и экономичности предложенного метода путем сравнения решений, полученных новым методом с решениями основе принципа Вольтерра, а также с численными решениями, полученными методом интегрирования истории нагружения по рекуррентным формулам.

5. Сформулированы основные преимущества и ограничения предложенного метода. Преимущества:

- простота реализации как при решении аналитическими методами, так и при численном решении;

- независимость точности решения и ресурсоемкости метода от длительности истории нагружения;

- предложенный метод позволяет достигать высокой точности вязкоупругого решения при использовании двуузловых конечных элементов, что затруднительно при использовании метода интегрирования истории нагружения;

- при использовании метода совместно с программным обеспечением конечно-элементного анализа, от последнего не требуется наличие функционала учета вязкоупругих свойств материалов.

Ограничения метода:

- необходимость многократного решения упругой задачи для определения напряженно-деформированного состояния в различные моменты времени.

Публикации по теме диссертации

Статьи в журналах, включённых в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание учёной степени кандидата наук, на соискание учёной степени доктора наук:

1. **Павлов М. С.** Модифицированная формулировка итерационного алгоритма решения задач линейной вязкоупругости на основе разделения временных и пространственных переменных / М. С. Павлов, А. А. Светашков, Н. А. Куприянов // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2020. – № 61. – С. 82–94. – DOI : 10.17223/19988621/61/8. – 0,5 / 0,35 а.л.

Scopus: **Pavlov M. S.** Modified formulation of the iterative algorithm for solving linear viscoelasticity problems based on the separation of time and space variables / M. S. Pavlov, A. A. Svetashkov, N. A. Kupriyanov // Vestnik Tomskogo Gosudarstvennogo Universiteta, Matematika i Mekhanika. – 2020. – № 61. – P. 82–94.

2. Svetashkov A. Variable separation method for solving boundary value problems of isotropic linearly viscoelastic bodies / A. Svetashkov, N. Kupriyanov, **M. Pavlov**, A. Vakurov // Acta Mechanica. – 2020. – Vol. 231, is. 9. – P. 3583–3606. – DOI: 10.1007/s00707-020-02698-4. – 1,25 / 0,47 а.л. (Scopus).

3. Svetashkov A. Modification of the Time-Effective Moduli of Viscoelastic Bodies / A. A. Svetashkov, S. C. Fok, N. A. Kupriyanov, K. K. Manabaev, **M. S. Pavlov**, A. A. Vakurov // Mechanics of Composite Materials. – 2019. – Vol. 55, is. 5. – P. 667–686. – DOI: 10.1007/s11029-019-09843-8. – 1 / 0,35 а.л. (Scopus).

Статья в сборнике материалов конференции, представленном в издании, входящем в Scopus:

4. Svetashkov A. A. Algorithm of iterative transformation for effective modules of multicomponent isotropic composite / A. A. Svetashkov, J. Micinski, **M. S. Pavlov**, A. A. Vakurov // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering . – 2017. – Vol. 177 : Mechanical Engineering, Automation and Control Systems (MEACS 2016). Tomsk, Russia, October 27–29, 2016. – Article number 012094. – 6 p. – URL: DOI: 10.1088/1757-899X/177/1/012094. – 0,4 / 0,08 а.л

Публикации в сборниках материалов конференций:

5. Светашков А. А., Гибридные эффективные модули вязкоупругих композитов / А. А. Светашков, Ф. А. Симанкин, **М. С. Павлов**, А. В. Лушников // Высокие технологии в современной науке и технике (ВТСНТ-2016) : сборник научных трудов V Международной научно-технической конференции молодых ученых, аспирантов и студентов. Томск, 05–07 декабря 2016 г. – Томск, 2016. – С. 168–169. – 0,25 / 0,05 а.л.

6. Светашков А. А. О решении квазистатических задач теории вязкоупругости изотропного нестареющего тела на основе аналитического метода / А. А. Светашков, **М. С. Павлов**, А. А. Вакуров // XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики : аннотации докладов. Уфа, 19–24 августа 2019 г. – Уфа, 2019. – С. 356. – 0,02 / 0,01 а.л.

7. Дубровский Д. Д. Расчет изгиба вязкоупругих анизотропных балок – Calculation of bending of viscoelastic anisotropic beams / Д. Д. Дубровский, Н. А. Куприянов, **М. С. Павлов** // Перспективы развития фундаментальных наук : сборник научных трудов XVIII Международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых. Томск, 27–30 апреля 2021 г. – 2021. – Т. 6. – С. 35–37. – 0,25 / 0,05 а.л.

8. Pavlov M. S. Comparison of the Innovative Method for Linear Viscoelasticity Problems With Standard ANSYS Tools Using Simple Tasks / **M. S. Pavlov**, A. A. Svetashkov, V. Barashkov // EPJ Web of Conferences. – 2019. – Vol. 221 : XXVI Conference on Numerical Methods for Solving Problems in the Theory of Elasticity and Plasticity (EPPS-2019). Tomsk, Russia, June 24–28, 2019. – Article number 01036. – 10 p. – URL: https://www.epj-conferences.org/articles/epjconf/pdf/2019/26/epjconf_epps2018_01036.pdf (access date: 26.05.2022). – DOI : 10.1051/epjconf/201922101036. – 0,25 / 0,18 а.л.

Подписано в печать: 01 августа 2022 г.
Заказ № 5110. Тираж 100 экз.
Издание подготовлено в авторской редакции.
Отпечатано на участке цифровой печати
Издательства Национального исследовательского
Томского государственного университета. ИНН 7018012970.
634050 г. Томск, Московский тр.8, тел. (3822) 53-15-28
publish.tsu.ru
rio.tsu@mail.ru