На правах рукописи

Завадский Дмитрий Викторович

ИНВАРИАНТНЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО СДВИГОВ МЕРЫ И УСРЕДНЕНИЕ ОПЕРАТОРНЫХ ПОЛУГРУПП В БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Специальность 01.01.01 —
«Вещественный, комплексный и функциональный анализ»

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2020

Работа выполнена на кафедре высшей математики Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)».

Научный руководитель:
Сакбаев Всеволод Жанович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)»

Ведущая организация: Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования "Казанский (Приволжский) федеральный университет".

Защита состоится 8 декабря 2020 года в 14:00 на заседании диссертационного совета № ФПМИ.01.01.01.005 по адресу: 141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., д. 9.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Московского физико-технического института (национального исследовательского университета) и на сайте университета: https://mipt.ru/.

Работа представлена «18» сентября 2020 г. в Аттестационную комиссию Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)» для рассмотрения советом по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, доктора наук в соответствии с п. 3.1 ст. 4 Федерального закона "О науке и государственной научно-технической политике".

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования и степень её разработанности

Исследование мер в бесконечномерных линейных пространствах, инвариантных относительно сдвигов на произвольный вектор, представляет интерес в следующих теориях:

1. теория инвариантных мер на группах, не являющихся локально компактными [1] [2] [3] [4] [5];

2. теории дифференциальных уравнений для функций бесконечномерного аргумента [6] [7] [8] [9] [10] [11];

3. теория бесконечномерных гамильтоновых систем [12] [13] [14];

---

[1] *R. Baker. "Lebesgue measure"on R^∞. Proceedings of the AMS. V. 113, N 4. (1991), 1023-1029.*

[2] *А. Вейль. Интегрирование в топологических группах и его применение. М.: Изд. иностр. лит. (1950).*

[3] *А.М. Вершик. Существует ли мера Лебега в бесконечномерном пространстве? Труды МИАН им. В.А. Стеклова. Т. 259 (2007), 256-281.*

[4] *В.В. Козлов, О.Г. Смолянов. Инвариантные и квазиинвариантные меры на бесконечномерных пространствах. Докл. РАН, 465:5 (2015), 527–531.*

[5] *Gill, Tepper; Kirtadze, Aleks; Pantsulaia, Gogi; Plichko, Anatolij. Existence and uniqueness of translation invariant measures in separable Banach spaces. Funct. Approx. Comment. Math. 50, no. 2 (2014) , 401–419.*

[6] *С.А. Альбеверио, Я.И. Белопольская, М.Н. Феллер. Задача Коши для волнового уравнения с лапласианом Леви. Матем. заметки, 87:6 (2010), 803–813.*

[7] *В.И. Богачев, А.И. Кириллов, С.В. Шапошников. Расстояния между стационарными распределениями диффузий и разрешимость нелинейных уравнений Фоккера–Планка–Колмогорова. Теория вероятн. и ее примен., 62:1 (2017), 16–43.*

[8] *Ю.Л. Далецкий, Г.К. Рогинский. О топологической классификации некоторых типов полулинейных эволюционных уравнений в банаховом пространстве. Дифференц. уравнения, 28:4 (1992), 576–587.*

[9] *I.D. Remizov. Explicit formula for evolution semigroup for diffusion in Hilbert space. Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics. 21:4, 1850025 (2018), 35.*

[10] *D.V. Zavadsky, V.Zh. Sakbaev. Diffusion on a Hilbert Space Equipped with a Shift- and Rotation-Invariant Measure. Proc. Steklov Inst. Math., 306 (2019), 102–119.*

[11] *О.Г. Смолянов, И. Купш. Асимптотическая декогерентность в бесконечномерных квантовых системах с квадратическими гамильтонианами. Матем. заметки, 73:1 (2003), 143–148.*

[12] *В.В. Козлов, О. Г. Смолянов, Гамильтонов подход к вторичному квантованию, Докл. РАН, 483:2 (2018), 138–142.*

[13] *В.В. Козлов, О.Г. Смолянов, Гамильтоновы аспекты квантовой теории. Докл. РАН, 444:6 (2012), 607–611.*

[14] *О.Г. Смолянов, Н.Н. Шамаров Квантование по Шредингеру бесконечномерных Гамильтоновых систем с неквадратичной функцией Гамильтона. Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. Том 492 (2020), 65-69.*

4. теория случайных блужданий в бесконечномерном пространстве [15] [16] [17] [18] [19] [20].

В данной работе рассматривается ряд вопросов анализа в бесконечномерных пространствах, тесно связанных с теорией меры и дифференциальным исчислением. В конечномерном анализе важную роль играет мера Лебега. Однако известно, что в бесконечномерном случае не существует меры, которая обладает всеми свойствами классической меры Лебега [21] [22]). Теорема А. Вейля утверждает, что в бесконечномерном линейном топологическом пространстве не существует определенной на борелевской σ-алгебре нетривиальной меры, которая обладает следующими свойствами:

1. инвариантность относительно сдвигов;
2. σ-конечность;
3. локальная конечность;
4. σ-аддитивность.

При этом существуют меры, которые обладают лишь некоторыми свойствами классической меры Лебега (см. [23] [24] [25] [26] [27]. В работе изучаются

[15] *В.Ж. Сакбаев. Случайные блуждания и меры на гильбертовом пространстве, инвариантные относительно сдвигов и поворотов. Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз., 140 (2017), 88–118.*

[16] *В.Ж. Сакбаев Усреднение случайных блужданий и меры на гильбертовом пространстве, инвариантные относительно сдвига. ТМФ, 191(2) (2017), 724–747.*

[17] *V.Zh. Sakbaev, D.V. Zavadsky. Shift-invariant measures on infinite-dimensional spaces: integrable functions and random walks. Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki. Volume 160, Book 2 (2018), 384–391.*

[18] *В.Ж. Сакбаев. Случайные блуждания и меры на гильбертовом пространстве, инвариантные относительно сдвигов и поворотов. Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз., 140 (2017), 88–118.*

[19] *Ya.A. Butko. Chernoff approximation for semigroups generated by killed Feller processes and Feynman formulae for time-fractional Fokker-Planck-Kolmogorov equations. Fract. Calc. Appl. Anal. 21 N 5 (2018), 35.*

[20] *Ya.A. Butko, R.L. Schilling and O.G. Smolyanov. Lagrangian and Hamiltonian Feynman formulae for some Feller semigroups and their perturbations. Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics. 15 N 3 (2012), 26.*

[21] *А. Вейль. Интегрирование в топологических группах и его применение. М.: Изд. иностр. лит. (1950).*

[22] *А.М. Вершик. Существует ли мера Лебега в бесконечномерном пространстве? Труды МИАН им. В.А. Стеклова. Т. 259 (2007), 256-281.*

[23] *В.И. Богачев. Гауссовские меры. Наука. Физматлит (1997).*

[24] *А.М. Вершик. Существует ли мера Лебега в бесконечномерном пространстве? Труды МИАН им. В.А. Стеклова. Т. 259 (2007), 256-281.*

[25] *В.Ж. Сакбаев Меры на бесконечномерных пространствах, инвариантные относитель но сдвигов. Труды МФТИ. Т. 8, № 2 (2016), 1–7.*

[26] *В.Ж. Сакбаев Усреднение случайных блужданий и меры на гильбертовом пространстве, инвариантные относительно сдвига. ТМФ, 191(2) (2017), 724–747.*

[27] *R. Baker. "Lebesgue measure"on R^∞. Proceedings of the AMS. V. 113, N 4. (1991), 1023-1029.*

трансляционно-инвариантные меры в различных пространствах последовательностей.

В силу утверждения теоремы Вейля, для построения трансляционно-инвариантных мер на бесконечномерных пространствах требуется расширить понятие меры на группе, не являющейся локально компактной. Под мерой на группе будем понимать неотрицательную аддитивную функцию, определенную на некотором кольце подмножеств группы. В работах [28] [29] [30] изучаются трансляционно-инвариантные меры на сепарабельных банаховых пространствах, обладающие всеми свойствами меры Лебега, кроме счетной аддитивности и борелевости (не всякое ограниченное борелевское подмножество является измеримым). В работах Бейкера и Панцулая исследуются меры на банаховых и топологических векторных пространствах последовательностей, обладающие всеми свойствами меры Лебега, кроме σ-конечности и локальной конечности. В диссертации также изучается класс (определенных на борелевских σ-алгебрах пространств последовательностей вещественных чисел) мер, которые обладают следующими свойствами:

1. σ-аддитивность
2. трансляционная инвариантность.

При этом рассматриваемые в данной работе меры не являются локально конечными и σ-конечными.

Предложенные в диссертации меры являются инвариантными относительно любых перестановок координат (в том числе и бесконечных). Это обстоятельство отличает предложенные в диссертационной работе меры от тех, которые рассматриваются в работах Бейкера. Также отметим, что существует множество, на котором мера Бейкера принимает конечное значение, а введенная в диссертации мера принимает значение, равное $+\infty$. В работах Панцулая также изучаются меры, которые инвариантны относительно некоторых преобразований. Однако рассматриваемые в работах Панцулая меры являются инвариантными относительно сдвигов на векторы лишь из некоторых плотных подпространств. Также инвариантные относительно некоторых

[28] *В.М. Бусовиков. Свойства одной конечно-аддитивной меры на l_p, инвариантной относительно сдвигов. Труды МФТИ. Том 10, № 2 (2018), 163-172.*

[29] *В.Ж. Сакбаев. Случайные блуждания и меры на гильбертовом пространстве, инвариантные относительно сдвигов и поворотов. Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз., 140 (2017), 88–118.*

[30] *В.Ж. Сакбаев Меры на бесконечномерных пространствах, инвариантные относитель но сдвигов. Труды МФТИ. Т. 8, № 2 (2016), 1–7.*

групп преобразований меры рассматриваются в работах В.И. Богачева и Е.Т. Шавгулидзе [31] [32] [33].

В диссертационной работе рассматриваются пространства интегрируемых функций, которые соответствуют инвариантным относительно сдвигов мерам, анализируются аппроксимационные свойства [34]. Исследуется вопрос о том, какими отличиями от пространств числовых функций, интегрируемых по мере Лебега, обладают аналоги пространств Лебега числовых функций на пространстве последовательностей, интегрируемых (в т.ч. квадратично) по трансляционно-инвариантной мере. Заметим, что наличие инвариантной относительно сдвигов меры позволяет ввести структуру гильбертового пространства на множестве функций бесконечномерного аргумента, относительно которой операторы сдвига аргумента на произвольные векторы являются унитарными. Наличие структуры гильбертового пространства позволяет говорить о самосопряженности некоторых преобразований, связанных со случайными блужданиями.

В диссертационной работе изучаются однопараметрические полугруппы операторов сдвига аргумента в пространствах интегрируемых функций (см. [35]). В бесконечномерном случае наблюдаются различные эффекты, которые отсутствуют в конечномерном случае. В качестве примера можно отметить отсутствие непрерывности в сильной операторной топологии указанных однопараметрических групп. При этом существуют и такие однопараметрические полугруппы, которые являются непрерывными. В работе исследуются условия, при которых имеет место непрерывность в сильной операторной топологии. Получен критерий сильной непрерывности однопараметрических полугрупп операторов сдвига вдоль постоянных векторов в пространстве последовательностей. Интерес к изучению полугрупп операторов сдвига в случае бесконечномерного координатного пространства обусловлен тем, что ана-

[31] *В.И. Богачев, М. Рёкнер, В. Штаннат. Единственность решений эллиптических уравнений и единственность инвариантных мер диффузий. Матем. сб., 193:7 (2002), 3–36.*

[32] *Е.Т. Шавгулидзе. Квазиинвариантные меры относительно групп диффеоморфизмов на пространствах кривых и поверхностей. Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 6 (1999), 19–25.*

[33] *Е.Т. Шавгулидзе. Квазиинвариантные меры на группах диффеоморфизмов. Тр. МИАН, 217 (1997), 189–208.*

[34] *Завадский Д.В. Инвариантные относительно сдвигов меры на пространствах последовательностей. Труды МФТИ. Том 9, №4 (2017) 142-148.*

[35] *Л.А. Борисов, Ю.Н. Орлов, В.Ж. Сакбаев. Формулы Фейнмана для усреднения полугрупп, порождаемых операторами типа Шредингера. Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша (2015), 23.*

логичные конструкции в конечномерном пространстве используются при альтернативном построении дифференциальных операторов второго порядка.

Отсутствие сильной непрерывности полугрупп операторов сдвига на некоторые векторы в бесконечномерных топологических векторных пространствах приводит к необходимости изучения разрывных операторных полугрупп. Некоторые сведения о разрывных операторных полугруппах изложены в книге [36]. В диссертации изложены некоторые результаты, которые носят структурный характер. Также приведены различные примеры разрывных операторных полугрупп.

Конструируются гауссовские меры в пространстве ограниченных последовательностей, которые сосредоточены на множестве векторов, относительно которых однопараметрические полугруппы операторов сдвига аргумента являются сильно непрерывными. Проводится усреднение операторных полугрупп по специальным гауссовским мерам. В конечномерных пространствах это приводит к построению операторных полугрупп, генераторами которых являются дифференциальные операторы второго порядка [37] [38]. В работе [39] было показано, что в случае бесконечномерных пространств последовательностей результатом такого усреднения является сильно непрерывная операторная полугруппа, генератор которой приходится бесконечномерным аналогом классического оператора Лапласа. В данной диссертации результатом усреднения полугрупп операторов сдвига по гауссовским мерам также является сильно непрерывная операторная полугруппа. Таким образом, в диссертации приведен еще один пример бесконечномерного аналога классического оператора Лапласа, который определен на некотором плотном подмножестве пространства квадратично интегрируемых по инвариантной относительно сдвигов мере функций. Основным отличием рассмотренных в диссертации построений от предложенных в статье [40] конструкций является то, что в диссертации усреднение операторных полугрупп прово-

[36] *Э. Хилле, Р. Филлипс. Функциональный анализ и полугруппы. Изд-во Иностр. лит., М. (1951).*

[37] *Ю.Н. Орлов, В.Ж. Сакбаев, О.Г. Смолянов. Неограниченные случайные операторы и формулы Фейнмана. Изв. РАН. Сер. матем., 80:6 (2016), 141–172.*

[38] *В.Ж. Сакбаев Усреднение случайных блужданий и меры на гильбертовом пространстве, инвариантные относительно сдвига. ТМФ, 191(2) (2017), 724–747.*

[39] *В.Ж. Сакбаев Усреднение случайных блужданий и меры на гильбертовом пространстве, инвариантные относительно сдвига. ТМФ, 191(2) (2017), 724–747.*

[40] *В.Ж. Сакбаев Усреднение случайных блужданий и меры на гильбертовом пространстве, инвариантные относительно сдвига. ТМФ, 191(2) (2017), 724–747.*

дится по σ-аддитивной мере (в статье [41]) рассматриваются усреднения по заданной специальном классе множеств конечно-аддитивной мере). От широко используемого в теории бесконечномерных эволюционных уравнений оператора Лапласа–Леви предложенный в диссертации бесконечномерный аналог оператора Лапласа отличает наличие свойства самосопряженности, которое играет важную роль в математической физике.

Цели и задачи

В данной диссертационной работе преследуются следующие цели.

1. Исследовать трансляционно-инвариантные σ-аддитивные меры на бесконечномерных локально выпуклых пространствах.
2. Исследовать полугруппы операторов сдвига в случае бесконечномерных локально выпуклых пространств. Определить условия, при которых полугруппы операторов сдвига являются сильно непрерывными.
3. Исследовать результаты усреднений полугрупп операторов сдвига по различным гауссовским мерам в случае бесконечномерных локально выпуклых пространств. Определить условия, при которых результаты усреднения являются сильно непрерывными операторными полугруппами.

Научная новизна

В диссертации построена инвариантная относительно сдвигов борелевская σ-аддитивная мера на пространстве последовательностей, которая, в отличие от используемых в работах Р. Бейкера мер, обладает следующими свойствами: инвариантность относительно произвольной перестановки номеров членов последовательностей, инвариантность относительно произвольного отражения, которое соответствует некоторому набору координатных направлений. Построен также широкий класс различных трансляционно-инвариантных мер на банаховых пространствах последовательностей l_p, где $p \in [1, +\infty)$. Предложенная в первой главе трансляционно-инвариантная мера применяется во второй главе для построения пространства интегрируемых функций. В третьей главе построенная мера используется для описания явления диффузии в бесконечномерных пространствах. Во второй главе

[41] *В.Ж. Сакбаев Усреднение случайных блужданий и меры на гильбертовом пространстве, инвариантные относительно сдвига. ТМФ, 191(2) (2017), 724–747.*

дано описание плотных подпространств пространства интегрируемых функций. Получен критерий сильной непрерывности полугруппы сдвигов вдоль постоянного векторного поля в гильбертовом пространстве комплекснозначных функций, квадратично интегрируемых по трансляционно-инвариантной мере. Также были выявлены структурные особенности некоторых классов разрывных операторных полугрупп. В третьей главе диссертации исследована процедура усреднения операторов сдвига на гауссовский случайный вектор. Исследована возникающая при этом полугруппа самосопряженных сжатий пространства функций, квадратично интегрируемых по трансляционно-инвариантной мере. Определен специальный класс гауссовских мер. Усреднение операторов случайного сдвига по мерам из данного класса порождает сильно непрерывные полугруппы самосопряженных сжатий. Показано, что генераторами полученных сильно непрерывных полугрупп являются самосопряженные операторы, являющиеся бесконечномерными аналогами оператора Лапласа. Для исследования зависимости полугруппы диффузии и соответствующего оператора Лапласа от гауссовского случайного процесса на множестве гауссовских мер введена топология, относительно которой указанная зависимость является непрерывной.

Теоретическая и практическая значимость

Диссертация носит теоретический характер. Изложенные в данной работе идеи, методы и результаты могут использоваться в теории меры, функциональном анализе, теории вероятностей и теории дифференциальных уравнений в частных производных с бесконечномерным аргументом.

Методология и методы

В диссертации применялись методы теории меры, теории вероятностей и функционального анализа. Более подробно: использовалась теорема Каратеодори о продолжении меры, были использованы различные свойства гауссовских мер на гильбертовых пространствах, применялись различные свойства сильно непрерывных операторных полугрупп в случае бесконечномерных топологических векторных пространств. Также в диссертации использовались оригинальные авторские конструкции.

Положения, выносимые на защиту

1. Была построена трансляционно-инвариантная σ-аддитивная мера на пространстве последовательностей вещественных чисел, которая

инвариантна относительно более широкой группы преобразований, по сравнению с рассматриваемыми в других работах аналогами меры Лебега на бесконечномерных топологических векторных пространствах.

2. Был найден критерий сильной непрерывности полугрупп операторов сдвига в случае пространства последовательностей действительных чисел.
3. Были найдены условия, при которых результаты усреднений полугрупп операторов сдвига (в случае пространства последовательностей вещественных чисел) являются сильно непрерывными операторными полугруппами, генераторами которых являются бесконечномерные самосопряженные аналоги классического оператора Лапласа.
4. Была найдена топологическая структура, относительно которой результат усреднения полугруппы операторов сдвига (в случае пространства последовательностей действительных чисел) непрерывно зависит от гауссовской меры, по которой проводилось усреднение.

Степень достоверности и апробация результатов

По теме диссертации были сделаны доклады на следующих научно-исследовательских семинарах.

1. Семинар по теории функций многих действительных переменных и ее приложениям к задачам математической физики (Семинар Никольского).
2. Санкт-Петербургский семинар по теории операторов и теории функций.
3. Семинар "Динамические системы и дифференциальные уравнения".
4. Семинар "Бесконечномерный анализ и математическая физика".
5. Научный семинар кафедры высшей математики МФТИ.

Результаты диссертации докладывались автором на следующих научных конференциях.

1. Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов» (Москва, МГУ, 2017, 2018 г.).

2. Международная научная конференция “Infinite Dimensional Analysis and Control Theory”. Moscow. 2018.
3. 62-ая Всероссийская научная конференция МФТИ (Долгопрудный, МФТИ, 2019 г.).
4. Международная научная конференция Mathematical Physics, "Dynamical Systems and Infinite-Dimensional Analysis". Dolgoprudny. 2019.
5. Международная конференция по теории функций, посвящённая 100-летию А.Ф. Леонтьева (Уфа, 2017).
6. International Kazan Conference "Probability Theory and Mathematical Statistics 2017"(Kazan, 2017).

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в 4 работах автора.

1. Завадский Д.В. Аналоги меры Лебега в пространствах последовательностей и классы интегрируемых по ним функций. Квантовая вероятность, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз., 151, ВИНИТИ РАН, М. (2018), 37–44.
2. Завадский Д.В. Инвариантные относительно сдвигов меры на пространствах последовательностей. Труды МФТИ. Том 9, №4 (2017), 142-148.
3. D.V. Zavadsky, V.Zh. Sakbaev. Diffusion on a Hilbert Space Equipped with a Shift- and Rotation-Invariant Measure. Proc. Steklov Inst. Math., 306 (2019), 102–119.
4. V.Zh. Sakbaev, D.V. Zavadsky. Shift-invariant measures on infinite-dimensional spaces: integrable functions and random walks. Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki. Volume 160, Book 2 (2018), 384–391.

Работы [1], [2], [3] и [4] опубликованы в рецензируемых журналах из списка ВАК. Работа [3] опубликована в рецензируемом журнале, который входит в базы данных SCOPUS и Web of Science. Работа [4] опубликована в рецензируемом журнале, который входит в базу данных Web of Science.

Личный вклад автора в публикации с соавторами состоит в следующем: в работе [3] автору принадлежит теорема о структуре обширного класса разрывных полугрупп компактных операторов в сепарабельном гильбертовом пространстве. В работе [4] автором была проведена процедура усреднения полугрупп операторов сдвига по однопараметрическому семейству гауссовских мер.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы, который состоит из 38 наименований. Общий объем диссертации составляет 93 страницы. Чертежей и рисунков нет.

Основное содержание работы

Нумерация приводимых здесь результатов соответствует нумерации в основном тексте диссертации.

В первой главе конструируются трансляционно-инвариантные меры на различных локально выпуклых пространствах. Также изучаются различные свойства построенных мер.

Перейдем к содержание пункта 1.1. В данном пункте рассматривается пространство последовательностей вещественных чисел R^∞ со стандартной метрикой d: $R^\infty \to R$, которая определяется следующим образом: пусть даны векторы $x = (x_1, x_2, ...) \in R^\infty$, $y = (y_1, y_2, ...) \in R^\infty$. Тогда

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n - y_n|}{2^n(1 + |x_n - y_n|)}.$$

Вводятся следующие обозначения. Символом τ обозначается топология пространства R^∞, которая отвечает метрике d. Символ K обозначает единичный куб в пространстве R^∞: $K = [0, 1] \times [0, 1] \times ....$ В пункте 1.1 была построена числовая функция λ, которая определена на некоторой σ-алгебре S_3. Элементами σ-алгебры S_3 являются некоторые подмножества пространства R^∞. Основным результатом пункта 1.1 является следующее утверждение.

Теорема 1.1.5.1. Функция λ является σ-аддитивной и инвариантной относительно сдвигов мерой, которая задана на σ-алгебре S_3 и удовлетворяет следующему условию нормировки: $\lambda(K) = 1$.

Рассмотрим содержание пункта 1.2. В данном пункте изучаются различные свойства, которыми обладает мера λ. Были введены следующие определения.

Пусть отображение σ: $N \to N$ является биективным преобразованием множества N. Отображение f_σ: $R^\infty \to R^\infty$ определено следующим образом: $\forall (x_1, x_2, ...) \in R^\infty$ $f_\sigma(x_1, x_2,...) = (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)},...)$. Отображение f_σ будет называться перестановкой координат.

Пусть линейное отображение $A : R^n \to R^n$ является ортогональным преобразованием. Пусть $A(x_1, x_2, ...x_n) = (x_1^A, x_2^A, ...x_n^A)$ при всех $(x_1, x_2, ...x_n) \in R^n$. Определим отображение f_A: $R^\infty \to R^\infty$ следующим образом:

$$\forall (x_1, x_2, ...) \in R^\infty \ f_A(x_1, x_2, ...) = (x_1^A, x_2^A, ...x_n^A, x_{n+1}, x_{n+2}, ...).$$

Отображение f_A будет называться n-ортогональным.

Пусть $h = (h_1, h_2, ...) \in \{0, 1\} \times \{0, 1\} \times ....$ Отображение f_h: $R^\infty \to R^\infty$ определяется следующим образом:

$$\forall (x_1, x_2, ...) \in R^\infty \ f_h(x_1, x_2, ...) = ((-1)^{h_1} x_1, (-1)^{h_2} x_2, ...).$$

Отображение f_h будет называться отражением.

В пункте 1.2 были получены следующие результаты.

Лемма 1.2.3. Элементы борелевской σ-алгебры пространства R^∞ являются измеримыми: $\mathfrak{B}(R^\infty) \subset S_3$.

Лемма 1.2.4. Справедливо следующее равенство:

$$\lambda(B \times [0, 1] \times [0, 1] \times ...) = \lambda^n(B),$$

где $n \in N$, $B \in \mathfrak{B}(R^n)$.

Лемма 1.2.6. Пусть $A \in S_3$, $\lambda(A) < \infty$, $\epsilon > 0$. Тогда существуют числа $n, k \in N$, существуют векторы $h_1, h_2,...h_n \in R^\infty$ и существуют множества $B_1, B_2,...B_n \in \mathfrak{B}(R^k)$, для которых выполняется следующее неравенство:

$$\lambda\Big(A \triangle \bigcup_{i=1}^{n} h_i + (B_i \times [0, 1] \times [0, 1] \times ...)\Big) < \epsilon.$$

Замечание 1.2.3. Мера λ является полной.

Лемма 1.2.7. Мера λ не является σ-конечной.

Далее считается, что мера λ определена на борелевской σ-алгебре $\mathfrak{B}(R^\infty)$.

Лемма 1.2.8. Мера λ не является локально конечной.

Лемма 1.2.9. Мера λ инвариантна относительно перестановок координат.

Замечание 1.2.4. Построенная в статье [42] мера не является инвариантной относительно всех перестановок координат.

Теорема 1.2.1. Группа инвариантов меры λ включает следующие непрерывные относительно топологии поточечной сходимости преобразования пространства R^∞: сдвиги, перестановки координат, n-ортогональные преобразования (при всех натуральных значениях параметра n), отражения.

Пункт 1.3 посвящен определению трансляционно-инвариантной меры на пространстве l^∞ и изучению свойств построенной меры.

В данном пункте были введены следующие обозначения и определения. Символ τ_∞ обозначает топологию поточечной сходимости на пространстве l^∞. Символом $\mathfrak{B}_\infty$ была обозначена борелевская σ-алгебра, которая отвечает топологии τ_∞. Перестановки координат, n-ортогональные отображения (при всех натуральных значениях параметра n) и отражения в пространстве l^∞ определяются по аналогии с пространством R^∞.

Далее в пункте 1.3 доказываются следующее вспомогательные утверждения, которое необходимы для построения трансляционно-инвариантной меры на пространстве l^∞.

Лемма 1.3.2. Пространство l^∞ является борелевским подмножеством пространства R^∞ относительно топологии поточечной сходимости.

Замечание 1.3.2. Путем сужения меры λ получается σ-аддитивная и инвариантная относительно сдвигов мера, определенная на борелевских (относительно топологии τ_∞) подмножествах пространства l^∞.

Сужение меры λ на σ-алгебру $\mathfrak{B}_\infty$ обозначено символом λ_∞. Также в пункте 1.3 было отмечено, что трансляционно-инвариантная мера λ_∞ обладает следующими свойствами.

Замечание 1.3.3. Мера λ_∞ не является локально конечной.

---

[42] *R. Baker. "Lebesgue measure"on R^∞. Proceedings of the AMS. V. 113, N 4. (1991), 1023-1029.*

Замечание 1.3.4. Мера λ_∞ является инвариантной относительно перестановок координат, n-ортогональных отображений (при всех натуральных значениях параметра n) и отражений.

Перейдем к содержанию пункта 1.4. Целью данного пункта является построение и изучение трансляционно-инвариантных мер на пространствах l^p, где $p \in [1, +\infty)$. Пусть зафиксировано некоторое значение параметра $p \in [1, +\infty)$. В пункте 1.4 вводятся следующие обозначения. Символом τ_p обозначена топология поточечной сходимости на пространстве l^p. Борелевская σ-алгебра, которая отвечает топологии τ_p, обозначена символом $\mathfrak{B}_p$.

Далее в пункте 1.4 фиксируется вектор $x = (x_1, x_2, ...) \in l^p$, у которого все координаты являются положительными. Рассматривается отображение $f\colon R^\infty \to R^\infty$, которое определяется следующим образом:

$$\forall y = (y_1, y_2, ...) \in R^\infty \; f(y) = (x_1 y_1, x_2 y_2, ...).$$

Далее доказываются следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 1.4.2. Пусть $r > 0$. Множество $\{y \in R^\infty |\, y \in l^p, ||y||_p \leq r\}$ является замкнутым подмножеством пространства R^∞ относительно топологии поточечной сходимости.

Лемма 1.4.3. Множество $f^{-1}(l^p)$ является борелевским подмножеством пространства R^∞ относительно топологии поточечной сходимости.

Трансляционно-инвариантная мера $\lambda_p\colon \mathfrak{B}_p \to R$ определяется следующим образом:

$$\lambda_p(B) = \lambda(f^{-1}(B)),$$

где B является произвольным борелевским подмножеством пространства l^p относительно топологии поточечной сходимости.

В пункте 1.3 было установлено, что мера λ_p обладает следующими свойствами.

Лемма 1.4.4. Мера λ_p является инвариантной относительно сдвигов.

Лемма 1.4.5. Мера λ_p не является σ-конечной.

Лемма 1.4.6. Пусть $\epsilon > 0$. Справедливо следующее равенство:

$$\lambda_p(\{x \in l^p |\, ||x||_p \leq \epsilon\}) = +\infty.$$

Замечание 1.4.2. Мера λ_2 отличается от меры, построенной в статье [43], так как множество $\{x \in l^2| \, ||x||_2 \leq \epsilon\}$ является множеством нулевой меры (относительно меры, предложенной в статье [44]) при достаточно малых положительных значениях параметра ϵ. При этом предложенная в статье [45] мера является инвариантной относительно всех ортогональных преобразований.

Рассмотрим содержание пункта 1.5. В данном пункте рассматриваются σ-алгебры, которые отвечают различным топологиям на пространствах числовых последовательностей. Пусть зафиксировано некоторое значение параметра $p \in [1, +\infty)$.

В пункте 1.5 введены следующие обозначения. Символом $\tau_{l_p,\infty}$ обозначена топология равномерной сходимости в пространстве l^p. Стандартная топология пространства l^p (топология стандартной нормы) обозначена символом τ_{l_p}. Символ $\mathfrak{B}_{p,\infty}$ обозначает борелевскую σ-алгебру, которая отвечает топологии $\tau_{l_p,\infty}$. Символом $\mathfrak{B}_{l_p}$ обозначена борелевская σ-алгебра, которая отвечает топологии τ_{l_p}.

В пункте 1.5 были получены следующие результаты.

Лемма 1.5.1. Выполняются следующие равенства: $\mathfrak{B}_p = \mathfrak{B}_{p,\infty} = \mathfrak{B}_{l_p}$.

Лемма 1.5.2. Существует непрерывная относительно стандартной топологии пространства l^∞ вещественнозначная функция, которая не является измеримой относительно борелевской σ-алгебры, которая отвечает топологии поточечной сходимости.

Во второй главе изучаются свойства пространств интегрируемых по мере λ функций. Рассматриваются полугруппы операторов сдвига и некоторые структурные особенности разрывных полугрупп в различных гильбертовых пространствах.

Пункт 2.1 посвящен изучению различных свойств пространств интегрируемых по мере λ функций.

В данном пункте вводится следующее определение. При каждом фиксированном значении параметра $q \in [1, +\infty)$ пространство $\overline{L}^q(R^\infty, \mathfrak{B}(R^\infty), \lambda)$ определяется следующим образом: функция $f \in L^q(R^\infty, \mathfrak{B}(R^\infty), \lambda)$ является

[43] *В.Ж. Сакбаев Усреднение случайных блужданий и меры на гильбертовом пространстве, инвариантные относительно сдвига. ТМФ, 191(2) (2017), 724–747.*

[44] *В.Ж. Сакбаев Усреднение случайных блужданий и меры на гильбертовом пространстве, инвариантные относительно сдвига. ТМФ, 191(2) (2017), 724–747.*

[45] *В.Ж. Сакбаев Усреднение случайных блужданий и меры на гильбертовом пространстве, инвариантные относительно сдвига. ТМФ, 191(2) (2017), 724–747.*

элементом функционального пространства $\overline{L}^q(R^\infty, \mathfrak{B}(R^\infty), \lambda)$, если имеет место следующее утверждение. Существует счетное множество $A \subset Z \times Z \times ...$, для которого справедливо следующее включение:

$$\{x \in R^\infty | \, f(x) \neq 0\} \subset \bigcup_{h \in A} h + [0,1] \times [0,1] \times ....$$

При каждом фиксированном значении параметра $q \in [1, +\infty)$ норма в пространстве $\overline{L}^q(R^\infty, \mathfrak{B}(R^\infty), \lambda)$ наследуется из банахового пространства $L^q(R^\infty, \mathfrak{B}(R^\infty), \lambda)$. Символ $C(R^\infty)$ обозначает пространство определенных на пространстве R^∞ комплекснозначных непрерывных относительно топологии поточечной сходимости функций.

В пункте 2.1 были получены следующие результаты.

Лемма 2.1.1. Пусть действительное число $q \in [1, +\infty]$. Тогда пространство $L^q(R^\infty, \mathfrak{B}(R^\infty), \lambda)$ не является сепарабельным.

Лемма 2.1.2. Пусть $q \in [1, +\infty]$. Тогда пространство $L^q(l^\infty, \mathfrak{B}_\infty, \lambda_\infty)$ не является сепарабельным.

Лемма 2.1.3. Пусть $q \in [1, +\infty]$, $p \in [1, +\infty)$. Тогда пространство $L^q(l^p, \mathfrak{B}_p, \lambda_p)$ не является сепарабельным.

Лемма 2.1.6. Пусть $q \in [1, +\infty)$. Тогда справедливо следующее утверждение:

$$L^q(R^\infty, \mathfrak{B}(R^\infty), \lambda) \bigcap C(R^\infty) = \{0\}.$$

Лемма 2.1.8. Пусть заданы $n \in N$ и $f \in L^1([0,1]^n, \mathfrak{B}([0,1]^n), \lambda^n)$. Пусть отображение F: $[0,1] \times [0,1] \times ... \to C$ определяется следующим образом:

$$\forall x = (x_1, x_2, ...) \in [0{,}1] \times [0{,}1] \times ... \; F(x) = f(x_1, x_2, ... x_n).$$

Тогда справедливо следующее равенство:

$$\int\limits_{[0,1]\times[0,1]\times...} F d\lambda = \int\limits_{[0,1]^n} f d\lambda^n.$$

Далее в пункте 2.1 изучаются универсальные свойства, которыми обладает гильбертово пространство $L^2([0,1] \times [0,1] \times ..., \mathfrak{B}([0,1] \times [0,1] \times ...), \lambda)$. Строится категория H. Объектами категории H являются комплексные гильбертовы пространства. Морфизмами в категории H являются сжимающие операторы (оператор называется сжимающим, если он ограничен и его норма не превосходит 1). Был получен следующий результат.

Лемма 2.1.11. Справедливо следующее равенство:

$$\lim_{\longrightarrow} L^2([0,1]^i, \mathfrak{B}([0,1]^i), \lambda^i) = L^2([0,1]\times[0,1]\times ..., \mathfrak{B}([0,1]\times[0,1]\times ...), \lambda).$$

В конце пункта 2.1 приведены следующие свойства пространства $\overline{L}^q(R^\infty, \mathfrak{B}(R^\infty), \lambda)$, где $q \in [1, +\infty)$.

Замечание 2.1.6. Пространство $\overline{L}^q(R^\infty, \mathfrak{B}(R^\infty), \lambda)$ является банаховым.

Замечание 2.1.7. Пространство $\overline{L}^q(R^\infty, \mathfrak{B}(R^\infty), \lambda)$ не является сепарабельным.

Лемма 2.1.12. Справедливо следующее равенство:

$$\overline{L}^2(R^\infty, \mathfrak{B}(R^\infty), \lambda) = \bigoplus_{i\in[0,1]} \lim_{\longrightarrow} \bigotimes_{k=1}^{n} L^2([0,1], \mathfrak{B}([0,1]), \lambda^1).$$

Пункт 2.2 посвящен изучению разрывных полугрупп в различных гильбертовых пространствах.

В случае одномерных гильбертовых пространств были получены следующие результаты.

Лемма 2.2.1. Пусть отображение a: $R_+ \to R$ является полугруппой сжимающих линейных операторов в одномерном вещественном гильбертовом пространстве. Тогда справедливо ровно одно из следующих двух утверждений:

(1) для любого действительного числа $t > 0$ выполняется следующее равенство: $a(t) = 0$;

(2) существует число $\lambda \in (-\infty, 0]$, для которого имеет место следующее условие:

$$\forall t \geq 0 \; a(t) = e^{\lambda t}.$$

Лемма 2.2.2. Пусть отображение a: $R_+ \to C$ является полугруппой сжимающих линейных операторов в одномерном комплексном гильбертовом пространстве. Тогда справедливо ровно одно из следующих двух утверждений:

(1) для любого действительного числа $t > 0$ выполняется следующее равенство: $a(t) = 0$;

(2) существует число $\lambda \in (-\infty, 0]$, существует вещественнозначная функция φ: $R_+ \to [0, 2\pi)$ для которых имеют место следующие утверждения:

$$\forall t \geq 0 \; a(t) = e^{\lambda t} e^{i\varphi(t)},$$

$$\forall (t, s) \in R_+ \times R_+ \; \varphi(t + s) = \varphi(t) + \varphi(s) \pmod{2\pi}.$$

Следствие 2.2.1. Пусть отображение $a: \; R_+ \to C$ является полугруппой сжимающих линейных самосопряженных операторов в одномерном комплексном гильбертовом пространстве. Тогда справедливо ровно одно из следующих двух утверждений:

(1) для любого действительного числа $t > 0$ выполняется следующее равенство: $a(t) = 0$;

(2) существует число $\lambda \in (-\infty, 0]$, для которого имеет место следующее условие:

$$\forall t \geq 0 \; a(t) = e^{\lambda t}.$$

В случае бесконечномерных гильбертовых пространств справедливы следующие утверждения.

Теорема 2.2.1. Пусть A – полугруппа самосопряженных сжимающих операторов в некотором комплексном гильбертовом пространстве H. Тогда существует такое разложение $H = H_0 \oplus H_1$ пространства H в прямую сумму двух подпространств, что подпространства H_0 и H_1 являются инвариантными относительно полугруппы A. При этом справедливы следующие утверждения:

(1) для любого вектора $u \in H_0$ и любого положительного числа t выполняется следующее равенство: $A(t)u = 0$;

(2) существует самосопряженный оператор L в пространстве H_1, для которого справедливо следующее утверждение:

$$\forall t \geq 0 \; P_{H_1} A(t) P_{H_1} = e^{Lt},$$

где символом P_{H_1} обозначен ортогональный проектор на подпространство H_1.

Теорема 2.2.2. Пусть A — компактный неотрицательный самосопряженный оператор с нетривиальным ядром в комплексном сепарабельном гильбертовом пространстве H. Пусть полугруппа $U: R_+ \to B(H)$ задана следующим образом: $U(0) = Id_H$, $\forall t > 0 \, U(t) = A^t$. Тогда полугруппа U не является сильно непрерывной. Пусть $H_0 = \mathrm{Ker}(A)$, $H_1 = \overline{\mathrm{Im}(A)}$. Тогда справедливы следующие утверждения:

(1) подпространства H_0 и H_1 инвариантны относительно полугруппы U;

(2) $\forall (x, t) \in \mathrm{Ker}(A) \times (0, +\infty) \, U(t)x = 0$;

(3) сужение полугруппы U на подпространство H_1 является сильно непрерывной операторной полугруппой.

В пункте 2.3 изучаются полугруппы операторов сдвига. В данном пункте рассматривается мера λ на пространстве R^∞ с топологией поточечной сходимости.

В пункте 2.3 вводится следующее определение. Пусть $h \in R^\infty$. Операторозначная функция

$$A_h\colon R_+ \to B(L^2(R^\infty, \mathfrak{B}(R^\infty), \lambda))$$

определена следующим образом:

$$\forall (t, f, x) \in R_+ \times L^2(R^\infty, \mathfrak{B}(R^\infty), \lambda) \times R^\infty \; (A_h(t)f)(x) = f(x + th).$$

Цель данного пункта – определить значения параметра $h \in R^\infty$, при которых операторная полугруппа A_h является непрерывной относительно сильной операторной топологии.

В пункте 2.3 были получены следующие результаты.

Лемма 2.3.1. Пусть дана последовательность $t_1, t_2, ... \geq 0$, которая сходится к нулю. Пусть $h = (h_1, h_2, ...) \in l^1$, $s \in R^\infty$, $k \in N$, $Q \in \mathfrak{B}([0, 1]^k)$. Определим множество $X \subset R^\infty$ следующим образом:

$$X = \{x = (x_1, x_2, ...) \in R^\infty | \, \forall i \in N \, |x_i| \leq |h_i|)\}.$$

Тогда справедливо следующее равенство:

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in X}||A_x(t_n)I_{s+Q\times[0,1]\times[0,1]\times\ldots}-I_{s+Q\times[0,1]\times[0,1]\times\ldots}||_{L^2}=0.$$

Теорема 2.3.1. Путь $h\in R^\infty$. Операторная полугруппа A_h является непрерывной относительно сильной операторной топологии тогда и только тогда, когда $h\in l_1$.

В третьей главе изучаются результаты усреднения полугрупп операторов сдвига по гауссовским мерам.

Пункт 3.1 носит вспомогательный характер.

В данном пункте вводятся следующие обозначения и определения. Пусть $\sigma>0$. Символом γ_σ обозначена невырожденная центрированная гауссовская мера на прямой с дисперсией σ^2. Пусть дана произвольная последовательность положительных чисел $\sigma_1,\sigma_2,\ldots$. Мера γ определяется следующим образом:

$$\gamma=\bigotimes_{n=1}^{\infty}\gamma_{\sigma_n}.$$

Полагается, что вероятностная мера γ отвечает вектору $(\sigma_1,\sigma_2,\ldots)\in R^\infty$. Множество l^1_+ определяется следующим образом:

$$l^1_+=\{(x_1,x_2,\ldots)\in l^1|\,\forall i\in N\;x_i>0\}.$$

Символ Γ обозначает класс вероятностных мер, которые отвечают векторам из множества l^1_+.

Также в пункте 3.1 собраны вспомогательные утверждения из теории гауссовских мер, которые будут использоваться в дальнейшем.

В пункте 3.2 проводится процедура усреднения полугрупп операторов сдвига по гауссовским мерам.

В данном пункте вводятся следующие определения и обозначения. Пусть произвольным образом зафиксирована вероятностная мера $\gamma\in\Gamma$. Операторозначная функция

$$H_\gamma\colon[0,+\infty)\to B(L^2(R^\infty,\mathfrak{B}(R^\infty),\lambda))$$

определяется следующим образом: пусть $u \in L^2(R^\infty, \mathfrak{B}(R^\infty), \lambda)$, тогда

$$\forall t \in [0, +\infty)\ (H_\gamma(t)u)(x) = \int\limits_{R^\infty} u(x + \sqrt{t}h)\gamma(dh).$$

Вектор $H_\gamma(t)u$ следует понимать в смысле интеграла Петтиса:

$$\forall v \in L^2(R^\infty, \mathfrak{B}(R^\infty), \lambda)\ (H_\gamma(t)u, v)_{L^2} = \int\limits_{R^\infty} \left(\int\limits_{R^\infty} u(x + \sqrt{t}h)\overline{v}(x)\lambda(dx) \right) \gamma(dh).$$

Пусть дан произвольный вектор $q \in \{0,1\} \times \{0,1\} \times ...$. Пусть символ f_q обозначает отражение, которое отвечает вектору q. Полагается, что функция $g \in L^2(R^\infty, \mathfrak{B}(R^\infty), \lambda)$ является инвариантной относительно преобразования f_q, если выполняется следующее условие: $\forall x \in R^\infty\ g(x) = g(f_q(x))$. Символ D_q обозначает пространство, которое состоит из инвариантных относительно преобразования f_q функций.

В пункте 3.2 получены следующие результаты.

Теорема 3.2.1. Отображение H_γ является сильно непрерывной операторной полугруппой.

Лемма 3.2.3. Пусть $q \in \{0,1\} \times \{0,1\} \times ...$. Тогда пространство D_q является замкнутым подпространством пространства $L^2(R^\infty, \mathfrak{B}(R^\infty), \lambda)$.

Лемма 3.2.4. Пусть $q \in \{0,1\} \times \{0,1\} \times ...$. Тогда пространство D_q является инвариантным относительно операторной полугруппы H_γ:

$$\forall t \in [0, +\infty)\ H_\gamma(t)(D_q) \subset D_q.$$

Целью пункта 3.3 является определение топологических структур, относительно которых операторная полугруппа H_γ непрерывно зависит от вектора из множества l^1_+.

В данном пункте рассматривается пространство

$$C_s([0, +\infty), B(L^2(R^\infty, \mathfrak{B}(R^\infty), \lambda))),$$

которое состоит из определенных на множестве $[0, +\infty)$ функций, которые принимают значения в пространстве $B(L^2(R^\infty, \mathfrak{B}(R^\infty), \lambda))$ и являются непрерывными относительно сильной операторной топологии. Топологическая структура пространства $C_s([0,+\infty), B(L^2(R^\infty, \mathfrak{B}(R^\infty), \lambda)))$ задается следующей системой полунорм:

$$\forall f \in C_s([0,+\infty), B(L^2(R^\infty, \mathfrak{B}(R^\infty), \lambda)))\ ||f||_{T,u} = \sup_{t\in[0,T]} ||f(t)u||_{L^2},$$

где $T \in [0,+\infty)$, $u \in L^2(R^\infty, \mathfrak{B}(R^\infty), \lambda)$.

Далее в пункте 3.3 определяется топологическая структура на множестве l^1_+.

Также в данном пункте введено отображение

$$F\colon l^1_+ \to C_s([0,+\infty), B(L^2(R^\infty, \mathfrak{B}(R^\infty), \lambda))),$$

которое задается следующим образом: пусть $(\sigma_1, \sigma_2, ...) \in l^1_+$. Пусть вероятностная мера $\gamma \in \Gamma$ отвечает вектору $(\sigma_1, \sigma_2, ...)$. Тогда $F(\sigma_1, \sigma_2, ...) = H_\gamma$.

В конце пункта 3.3 были приведены следующие результаты.

Теорема 3.3.1. Функция $F\colon l^1_+ \to C_s([0,+\infty), B(L^2(R^\infty, \mathfrak{B}(R^\infty), \lambda)))$ является непрерывной.

В заключении перечислены основные результаты диссертации и возможные направления дальнейших исследований.

В первой главе данной диссертационной работы были предложены инвариантные относительно сдвигов меры на различных пространствах последовательностей действительных чисел. Изучались различные свойства построенных мер. Также было показано, что предложенные в диссертации трансляционно-инвариантные меры отличаются от инвариантных относительно сдвигов мер, которые встречаются в литературе.

Вторая глава диссертации посвящена изучению различных свойств пространств интегрируемых по предложенным в первой главе мерам функций. Также были получены некоторые сведения о структуре разрывных операторных полугрупп. Были изучены полугруппы операторов сдвига. Был получен критерий сильной непрерывности полугрупп операторов сдвига.

В третьей главе диссертационной работы была проведена процедура усреднения полугрупп операторов сдвига по гауссовским мерам, которые сосредоточены на пространстве l^1. Было доказано, что результатом усреднений являются сильно непрерывные однопараметрические операторные полугруппы, генерируемые бесконечномерными аналогами классического оператора

Лапласа. Также было установлено, что результат усреднения полугруппы операторов сдвига непрерывно зависит от семейства гауссовских мер, по которому проводилось усреднение.

Дальнейшие исследования по тематике диссертации могут проводиться по следующим направлениям:

1. спектральные свойства бесконечномерных аналогов классического оператора Лапласа;

2. теория гладких функций, определенных на пространствах последовательностей действительных чисел;

3. теория дифференциальных уравнений для функций бесконечномерного аргумента.

Благодарности. Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю – доктору физико-математических наук, профессору Всеволоду Жановичу Сакбаеву за всестороннюю поддержку, постановку задач и их обсуждение. Также автор благодарен участникам семинара "Бесконечномерный анализ и математическая физика"под руководством профессора Олега Георгиевича Смолянова за полезные обсуждения затрагиваемых в диссертации вопросов.