На правах рукописи

4859122

Беседина Татьяна Владимировна

МОМЕНТНЫЕ ФУНКЦИИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ

01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Воронеж – 2011

Работа выполнена на кафедре нелинейных колебаний Воронежского государственного университета

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук,
профессор Задорожний Владимир Григорьевич

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук,
профессор Костин Владимир Алексеевич

доктор физико-математических наук,
профессор Жукова Галина Севастьяновна

Ведущая организация:

Саратовский государственный университет

Защита состоится 22 ноября 2011 года в 15 часов 10 минут на заседании диссертационного совета Д 212.038.22 при Воронежском государственном университете по адресу: 394006, г. Воронеж, Университетская пл. 1, ауд. 333.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Воронежского государственного университета.

Автореферат разослан "17" октября 2011 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.038.22
доктор физико-математических наук,
профессор Ю.Е. Гликлих

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Многие процессы в природе, технике и экономике описываются с помощью дифференциальных уравнений в частных производных. Если эти уравнения детерминированные, то такие задачи достаточно изучены и иногда могут быть найдены точные решения. Часто реальные процессы зависят от влияния случайных факторов и детерминированные модели не подходят. В этом случае рассматриваются дифференциальные уравнения, коэффициенты которых являются случайными процессами, при этом решения уравнений также являются случайными процессами. При исследовании случайных процессов наиболее важными характеристиками являются моментные функции.

Задачу нахождения моментных функций решений уравнений со случайными коэффициентами рассматривали Адомиан Дж., Вентцель А.Д., Клякцин В.И., Татарский В.И., Тихонов В.И., Фурсиков А.В., Монин А.С., Яглом А.М. и другие. Применяют различные подходы. Строят цепочки уравнений для моментных функций, используют метод последовательных приближений, при малых случайных возмущениях строят асимптотическое приближение, для некоторых задач значение моментных функций можно получить из явного вида решения. Для случая линейных дифференциальных уравнений Задорожним В.Г. рассмотрен метод, основанный на сведении поставленной задачи к нахождению решений детерминированных дифференциальных уравнений с обычными и вариационными производными. В работах Строевой Л.Н. рассматривается дифференциальное уравнение первого порядка в частных производных, получена формула моментной функции n–го порядка. Боровикова М.М. и Хребтова С.С. рассматривали частные случаи уравнения теплопроводности с двумя и тремя, соответственно, фазовыми переменными, получены формулы для первой, второй, дисперсионной и смешанных моментных функций.

Целью работы является нахождение решений дифференциальных уравнений с вариационными производными и моментных функций решения задачи Коши для уравнения переноса и диффузии с тремя фазовыми переменными.

Методика исследований. Исследование проводится методами теории дифференциальных уравнений, математического анализа, теории уравнений, содержащих вариационные производные, теории вероятностей.

Научная новизна. Перечисленные ниже основные результаты диссертации являются новыми. В работе выведены необходимые и достаточные условия существования решения обратной задачи вариационного исчисления для систем обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка; найдена формула для нахождения вариационного интеграла от систем обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка; выведены необходимые и достаточные условия существования интегрирующего множителя обратной задачи для линейных систем дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами при производных и искомой функции; получены следующие формулы: решения задачи Коши для неоднородных уравнений первого и третьего порядков с обычными и вариационными производными; математического ожидания, второй моментной и дисперсионной функций решения задачи Коши для уравнения диффузии с тремя фазовыми переменными; первых моментных функций при конкретных законах распределения, как в случае независимых между собой случайных процессов, так и зависимых; коэффициентов разложения характеристического функционала дифференциального уравнения диффузии в степенной ряд; моментной функции n–го порядка для решения уравнения диффузии.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Полученные в ней результаты могут использоваться в вариационном исчислении, теории дифференциальных уравнений с вариационными производными. Полученные формулы моментных функций могут применяться для расчетов конкретных процессов диффузии.

Апробация работы. Основные результаты докладывались и обсуждались на семинарах и научных конференциях Воронежского государственного университета; на Крымской осенней математической школе-симпозиуме "КРОМШ XX" - 2009 (Украина, Крым); на международной конференции "Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики" – 2009, 2010, 2011 (Воронеж); на Воронежской весенней математической школе "Понтрягинские чтения XX, XXI, XXII" - 2009, 2010, 2011 (Воронеж); workshop "Deterministic and stochastic variational methods and application" – 2010 (Германия, Галле).

Публикации. Основные результаты работы опубликованы в [1]–[11]. Из совместных публикаций [4],[7],[11] в диссертацию вошли результаты, принадлежащие лично автору. Работа [7] опубликована в издании, соответствующему списку ВАК РФ.

Структура диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, разбитых на параграфы, и списка цитируемой литературы, содержащего 61 наименование. Общий объем диссертации – 130 страниц.

Краткое содержание работы

Во **введении** излагается общая характеристика работы, приводится краткое содержание.

В **первой главе** приводятся определения и вспомогательные результаты, используемые в работе.

Во **второй главе** рассматриваются дифференциальные уравнения с вариационными производными.

В первом параграфе исследуется простейшее уравнение с вариационной производной $\delta I(y)/\delta y(x) = \varphi$, которое возникает при решении обратной задачи вариационного исчисления. Исследуется случай, когда $\varphi = 0$ – система обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка.

Пусть $C_n^k[a,b]$ – пространство k-раз непрерывно дифференцируемых функций на отрезке $[a,b]$ со значениями в $\mathbb{R}^n$, M_n^k – множество векторных функций из $C_n^k[a,b]$, удовлетворяющих условиям $y(a) = y_1$, $y(b) = y_2$, где y_1, y_2 – заданные векторы из $\mathbb{R}^n$, L – множество дважды кусочно дифференцируемых функций h на интервале (a,b) со значениями в $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющих условиям $h(a) = h(b) = 0$, $I : C_n^1[a,b] \to \mathbb{R}$.

Задача состоит в нахождении условий на отображение $\varphi : [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, при которых существует функционал I такой, что

$$\frac{\delta I(y)}{\delta y(x)} = \varphi(x,y,y',y'') \tag{1}$$

на множестве M_n^2 в направлении подпространства L, и этого функционала, если он существует.

В пункте 2.1.1 получены необходимые и достаточные условия существования решения обратной задачи.

Теорема 2.1.2. *Пусть φ имеет непрерывные производные до третьего порядка включительно. Тогда для существования решения обратной задачи вариационного исчисления для уравнения $\varphi(x,y,y',y'') = 0$, необходимо и достаточно, чтобы φ имело вид*

$$\varphi = A(x,y,y')y'' + B(x,y,y'),$$

и $\forall x \in (a,b)$, $y \in M_n^4$ выполнялись условия

$$A^* = A, \quad (Ah)_{y'} = (Ah)^*_{y'}, \quad B_{y'} + B^*_{y'} - 2A_x - 2A_y y' = 0,$$

$$2((Ah)^*_y - (Ah)_y) - D_{y'}h = 0, \quad 2(B^*_y - B_y) - D_x - D_y y' = 0,$$

где $D = B^*_{y'} - B_{y'}$, h – вектор-столбец из $\mathbb{R}^n$, B – функция-строка, оператор A определяется набором функций $a_{ij}, i,j = 1,2,..n$ и действует на вектор h по правилу

$$A : h \longrightarrow \Big(\sum_{i=1}^n a_{1i}h_i \;\; \sum_{i=1}^n a_{2i}h_i \;\; \dots \;\; \sum_{i=1}^n a_{ni}h_i \Big), \tag{2}$$

$$A^* : h \longrightarrow \Big(\sum_{i=1}^n a_{i1}h_i \;\; \sum_{i=1}^n a_{i2}h_i \;\; \dots \;\; \sum_{i=1}^n a_{in}h_i \Big).$$

В пункте 2.1.2 найдено решение уравнения (1) в виде функционала $I(y) = \int_a^b F(x, y, y')dx$.

В пункте 2.1.3 рассматривается ситуация, когда условия теоремы 2.1.2 не выполнены.

Определение 2.1.1. Невырожденный оператор T, определяющийся набором функций $t_{ij}(x, y, y'), i, j = 1, 2, ..n$ и действующий на вектор-строку h по следующему правилу

$$T : (\ h_1 \ \ h_2 \ \ \ldots \ \ h_n\ ) \longrightarrow (\ \sum_{i=1}^{n} t_{1i}h_i \ \ \sum_{i=1}^{n} t_{2i}h_i \ \ \ldots \ \ \sum_{i=1}^{n} t_{ni}h_i\ ),$$

называется *интегрирующим множителем* для системы $\varphi = 0$, если обратная задача вариационного исчисления для системы $T\varphi = 0$ имеет решение.

Пусть A, C, E – постоянные операторы, действующие на вектор h по правилу (2), $G(x)$ – произвольная функция от x. Для системы

$$Ay'' + Cy' + Ey + G(x) = 0$$

получены необходимые и достаточные условия существования интегрирующего множителя и система алгебраических уравнений, для его нахождения.

Второй параграф посвящен рассмотрению уравнений более сложного вида – линейных неоднородных дифференциальных уравнений, содержащих обычные и вариационные производные.

Пусть $t \in [t_0, \bar{t}] = T \subset \mathbb{R}$, $L_1(T)$ – пространство суммируемых на отрезке T функций, $n \in \mathbb{N}$, $L_1^n(T)$ – пространство n–мерных векторов, каждая компонента которых принадлежит $L_1(T)$, v – вектор из $L_1^n(T)$ с компонентами v_k, $k = 1, ..., n$, a – векторная функция, компоненты которой $a_k : T \to \mathbb{C}$, $k = 1, ..., n$, $g : T \times L_1^n(T) \to \mathbb{C}$, $y : T \times L_1^n(T) \to \mathbb{C}$, $y_0 : L_1^n(T) \to \mathbb{C}$.

В пункте 2.2.1 получено решение начальной задачи для дифференциального уравнения первого порядка

$$\frac{\partial y(t, v)}{\partial t} = \sum_{k=1}^{n} a_k(t) \frac{\delta y(t, v)}{\delta v_k(t)} + g(t, v), \qquad y(t_0, v) = y_0(v). \qquad (3)$$

Теорема 2.2.2. *Пусть a – непрерывная векторная функция, в некоторой окрестности точки $(s, v + a\chi(s, t, \cdot))$ существуют непрерывные по v_k при $s, t \in T$ и измеримые по s, t на $T \times T$ вариационные производные*

$$\delta g(s, v + a\chi(s, t, \cdot))/\delta v_k(t), \quad k = 1, ..., n,$$

существуют суммируемые на T функции $m_k(s)$ такие, что

$$|\delta g(s, v + a\chi(s, t, \cdot))/\delta v_k(t)| < m_k(s), k = 1, ..., n$$

при v из окрестности точки $(v + a\chi(s, t, \cdot))$, $t \in T$, g суммируемо на T по первой переменной, в некоторой окрестности точки $(v + a\chi(t_0, t, \cdot))$

существуют непрерывные по v_k вариационные производные

$$\delta y_0(v + a\chi(t_0, t, \cdot))/\delta v_k(t), \quad k = 1, ..., n,$$

при $t \in T$, *тогда*

$$y(t, v) = y_0(v + a\chi(t_0, t, \cdot)) + \int_{t_0}^{t} g(s, v + a\chi(s, t, \cdot))ds$$

является решением задачи (3).

Через $\chi(t_1, t_2, s)$ обозначена функция равная $sign(s - t_1)$ при s принадлежащем отрезку с концами t_1, t_2 и нулю в противном случае.

Пусть $v \in L_1^3(T)$, $p \in L_1(T)$, $a_k : T \to \mathbb{C}$, $k = 1,2,3$, $b : T \to \mathbb{C}$, $g : T \times \mathbb{R}^3 \times L_1^3(T) \times L_1(T) \to \mathbb{C}$, $y : T \times \mathbb{R}^3 \times L_1^3(T) \times L_1(T) \to \mathbb{C}$, $y_0 : \mathbb{R}^3 \times L_1^3(T) \times L_1(T) \to \mathbb{C}$.

В пункте 2.2.2 получено решение начальной задачи для дифференциального уравнения третьего порядка

$$\frac{\partial y(t,x,v,p)}{\partial t} = \sum_{k=1}^{3} a_k(t) \frac{\delta}{\delta v_k(t)} \frac{\partial}{\partial x_k} y(t,x,v,p) + \tag{4}$$
$$+ b(t) \frac{\delta}{\delta p(t)} \Delta y(t,x,v,p) + g(t,x,v,p), \qquad y(t_0,x,v,p) = y_0(x,v,p),$$

где Δ – оператор Лапласа по x.

Пусть ξ – вектор из $\mathbb{R}^3$ с компонентами ξ_k, $k = 1,2,3$. Обозначим $|\xi|^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2$, $\xi \times a$ – вектор с компонентами $\xi_k a_k$, $k = 1,2,3$.

В формулировке следующей теоремы у отображений g и y_0 опущены обозначения аргументов: $s, x, v - i\xi \times a(t)\chi(s,t,\cdot), p - |\xi|^2 b(t)\chi(s,t,\cdot)$ у g и $x, v - i\xi \times a(t)\chi(t_0,t,\cdot), p - |\xi|^2 b(t)\chi(t_0,t,\cdot)$ у y_0.

Теорема 2.2.3. *Пусть a и b – непрерывные функции, существует окрестность U нуля в $L_1^3(T) \times L_1(T)$ такая, что при всех $(v,p) \in U$ в окрестности точки $(s, x, v - i\xi \times a(t)\chi(s,t,\cdot), p - |\xi|^2 b(t)\chi(s,t,\cdot))$ существуют непрерывные по v_k при $s,t \in T$ и измеримые по s,t на $T \times T$ вариационные производные $\delta g/\delta v_k(t)$, $k = 1,2,3$, существует непрерывная по p при $s,t \in T$ и измеримая по s,t на $T \times T$ вариационная производная $\delta g/\delta p(t)$, g суммируемо на T по первой переменной, в окрестности точки $(x, v - i\xi \times a(t)\chi(t_0,t,\cdot), p - |\xi|^2 b(t)\chi(t_0,t,\cdot))$ существуют непрерывные по v_k вариационные производные $\delta y_0/\delta v_k(t)$, $k = 1,2,3$, и непрерывная по p вариационная производная $\delta y_0/\delta p(t)$ при $t \in T$, функции*

$$|y_0|,\ |\partial y_0/\partial t|,\ |\delta y_0/\delta v_k(t)|,\ |\delta y_0/\delta b(t)|,\ |\xi_k F_x[y_0](\xi)|,\ ||\xi|^2 F_x[y_0](\xi)|,$$
$$|F_x[\partial y_0/\partial t](\xi)|,\ |\xi_k F_x[\delta y_0/\delta v_k(t)](\xi)|,\ ||\xi|^2 F_x[\delta y_0/\delta b(t)](\xi)|,$$
$$|g|,\ |\partial g/\partial t|,\ |\delta g/\delta v_k(t)|,\ |\delta g/\delta b(t)|,\ |\xi_k F_x[g](\xi)|,\ ||\xi|^2 F_x[g](\xi)|,$$
$$|F_x[\partial g/\partial t](\xi)|,\ |\xi_k F_x[\delta g/\delta v_k(t)](\xi)|,\ ||\xi|^2 F_x[\delta g/\delta b(t)](\xi)|, k = 1,2,3$$

ограничены при $s,t \in T$ суммируемыми на $\mathbb{R}^3$ функциями, тогда

$$y(t,x,v,p) = F_\xi^{-1}[F_x[y_0(x, v - i\xi \times a(t)\chi(t_0,t,\cdot), p-$$

$$-|\xi|^2 b(t)\chi(t_0,t,\cdot))](\xi)](x) + \int\limits_{t_0}^{t} F_\xi^{-1}[F_x[g(s,x,v-$$
$$-i\xi \times a(t)\chi(s,t,\cdot),p - |\xi|^2 b(t)\chi(s,t,\cdot))](\xi)](x)ds$$

является решением задачи (4).

Третья глава посвящена нахождению моментных функций решения начальной задачи для уравнения диффузии

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_k(t)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x_k} + \mu(t)\Delta u(t,x) + f(t,x), \tag{5}$$

$$u(t_0,x) = u_0(x), \tag{6}$$

где $t \in [t_0,\bar{t}] = T \subset \mathbb{R}$, x - вектор из $\mathbb{R}^3$ с компонентами x_k, $k = 1,2,3$, $u : T\times\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ — искомая функция; $\varepsilon : T \to \mathbb{R}^3$ - вектор с компонентами ε_k, $k = 1,2,3$, $\mu : T \to \mathbb{R}$, $f : T \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $u_0 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ — случайные процессы.

Предполагается, что случайный процесс u_0 не зависит от случайных процессов ε, μ, f, заданных характеристическим функционалом $\varphi(v,p,w) = \mathbf{M}e_\varphi(v,p,w)$, где $e_\varphi(v,p,w) = exp(i\int\limits_T[< \varepsilon(s),v(s) > +\mu(s)p(s)]ds + i\int\limits_T\int\limits_{\mathbb{R}^3} f(s,q)w(s,q)dqds)$, $\mathbf{M}$ - знак математического ожидания по функции распределения процессов ε, μ и f, $v \in L_1^3(T)$, $p \in L_1(T)$, $w \in L_1(T \times \mathbb{R}^3)$.

Во втором параграфе вводятся вспомогательные отображения

$$\mathcal{M}(t_1,x_{[1]},v,p,w) = \mathbf{M}(u(t_1,x_{[1]})e_\varphi(v,p,w)),$$
$$\mathcal{D}(t_1,x_{[1]},t_2,x_{[2]},v,p,w) = \mathbf{M}(u(t_1,x_{[1]})u(t_2,x_{[2]})e_\varphi(v,p,w)),$$

где $u(t,x)$ – решение задачи (5), (6), $\mathbf{M}$ – знак математического ожидания по функции распределения случайных процессов ε, μ, f и u_0, $t_k \in T$, $x_{[k]} \in \mathbb{R}^3$, $k = 1,2$. Из этих отображений, положив v, p, w равными нулю, можно получить математическое ожидание и вторую моментную функцию. Строятся детерминированные начальные задачи с обычными и вариационными производными третьего порядка для $\mathcal{M}$ и для $\mathcal{D}$

$$\frac{\partial\mathcal{M}(t_1,x_{[1]},v,p,w)}{\partial t_1} = -i\sum_{k=1}^{3}\frac{\delta}{\delta v_k(t_1)}\frac{\partial\mathcal{M}(t_1,x_{[1]},v,p,w)}{\partial x_{[1]k}} -$$
$$-i\frac{\delta}{\delta p(t_1)}\Delta_{[1]}\mathcal{M}(t_1,x_{[1]},v,p,w) - i\frac{\delta\varphi(v,p,w)}{\delta w(t_1,x_{[1]})},$$
$$\mathcal{M}(t_0,x_{[1]},v,p,w) = \mathbf{M}(u_0(x_{[1]}))\varphi(v,p,w),$$

$$\frac{\partial\mathcal{D}(t_1,x_{[1]},t_2,x_{[2]},v,p,w)}{\partial t_1}=-i\sum_{k=1}^{3}\frac{\delta}{\delta v_k(t_1)}\frac{\partial\mathcal{D}(t_1,x_{[1]},t_2,x_{[2]},v,p,w)}{\partial x_{[1]k}}-$$
$$-i\frac{\delta}{\delta p(t_1)}\Delta_{[1]}\mathcal{D}(t_1,x_{[1]},t_2,x_{[2]},v,p,w)-i\frac{\delta\mathcal{M}(t_2,x_{[2]},v,p,w)}{\delta w(t_1,x_{[1]})},$$
$$\mathcal{D}(t_0,x_{[1]},t_2,x_{[2]},v,p,w)=\mathrm{M}(u_0(x_{[1]})u(t_2,x_{[2]})e_\varphi(v,p,w)),$$

где $\Delta_{[1]}$ — оператор Лапласа по $x_{[1]}$.

Решение этих задач в общем виде найдено в главе 2. Положив в полученных решениях v, p, w равными нулю, получаем соответствующие моментные функции. Если получены решения детерминированных задач в смысле обобщенных функций, то моментные функции называем обобщенными.

Знак $*_k$ означает свертку по $x_{[k]}$, $k=1,2$, $*_{1,2}$ – свертку по $x_{[1]}$ и $x_{[2]}$.

В формулировке следующей теоремы вновь опущены обозначения аргументов: $-\xi_{[1]}\chi(t_0,t_1,\cdot),i|\xi_{[1]}|^2\chi(t_0,t_1,\cdot),0$ у φ, если речь идет о вариационной производной φ по $w(s,x_{[1]})$, то $-\xi_{[1]}\chi(s,t_1,\cdot),i|\xi_{[1]}|^2\chi(s,t_1,\cdot),0$.

Теорема 3.2.1. *Пусть функция* $\mathrm{M}(u_0(x_{[1]}))$ *суммируема на* $\mathbb{R}^3$, *существует окрестность* U *нуля в* $L_1^3(T)\times L_1(T)\times L_1(T\times\mathbb{R}^3)$ *такая, что при всех* $(v,p,w)\in U$ *существуют измеримые по* s,t_1 *на* $T\times T$ *и непрерывные, соответственно, по* v_k *и* p *при* $s,t_1\in T$ *вариационные производные* $\delta^2\varphi/\delta v_k(t_1)\delta w(s,x_{[1]})$, $k=1,2,3$, $\delta^2\varphi/\delta p(t_1)\delta w(s,x_{[1]})$, *причем* $\delta\varphi(v,p,w)/\delta w(s,x_{[1]})$ *суммируемо по* s, *существуют непрерывные, соответственно, по* v_k *и* p *при* $t_1\in T$ *вариационные производные* $\delta\varphi/\delta v_k(t_1)$, $k=1,2,3$, $\delta\varphi/\delta p(t_1)$, *функции*

$$|F_{x_{[1]}}[\mathrm{M}(u_0(x_{[1]}))](\xi_{[1]})\varphi|,\ |F_{x_{[1]}}[\mathrm{M}(u_0(x_{[1]}))](\xi_{[1]})\partial\varphi/\partial t_1|,$$
$$|\delta\varphi/\delta w(s,x_{[1]})|,\ |\partial/\partial t_1\delta\varphi/\delta w(s,x_{[1]})|,\ |\delta^2\varphi/\delta v_k(t_1)\delta w(s,x_{[1]})|,$$
$$|\delta^2\varphi/\delta p(t_1)\delta w(s,x_{[1]})|,\ |F_{x_{[1]}}[\partial/\partial t_1\delta\varphi/\delta w(s,x_{[1]})](\xi_{[1]})|,$$
$$|\xi_{[1]k}F_{x_{[1]}}[\mathrm{M}(u_0(x_{[1]}))](\xi_{[1]})\varphi|,\ ||\xi_{[1]}|^2F_{x_{[1]}}[\mathrm{M}(u_0(x_{[1]}))](\xi_{[1]})\varphi|,$$
$$|\xi_{[1]k}F_{x_{[1]}}[\mathrm{M}(u_0(x_{[1]}))](\xi_{[1]})\delta\varphi/\delta v_k(t_1)|,\ ||\xi_{[1]}|^2F_{x_{[1]}}[\mathrm{M}(u_0(x_{[1]}))](\xi_{[1]})\delta\varphi/\delta p(t_1)|,$$
$$|\xi_{[1]k}F_{x_{[1]}}[\delta\varphi/\delta w(s,x_{[1]})](\xi_{[1]})|,\ |\xi_{[1]k}F_{x_{[1]}}[\delta^2\varphi/\delta v_k(t_1)\delta w(s,x_{[1]}](\xi_{[1]})|,$$
$$||\xi_{[1]}|^2F_{x_{[1]}}[\delta\varphi/\delta w(s,x_{[1]})](\xi_{[1]})|,\ ||\xi_{[1]}|^2F_{x_{[1]}}[\delta^2\varphi/\delta p(t_1)\delta w(s,x_{[1]})](\xi_{[1]})|$$

ограничены при $s,t_1\in T$ *суммируемыми на* $\mathbb{R}^3$ *функциями, тогда*

$$\mathrm{M}(u(t_1,x_{[1]}))=$$
$$=\mathrm{M}(u_0(x_{[1]}))*_1F^{-1}_{\xi_{[1]}}[\varphi(-\xi_{[1]}\chi(t_0,t_1,\cdot),i|\xi_{[1]}|^2\chi(t_0,t_1,\cdot),0)](x_{[1]})-$$
$$-i\int_{t_0}^{t_1}F^{-1}_{\xi_{[1]}}[F_{x_{[1]}}[\frac{\delta\varphi(-\xi_{[1]}\chi(s,t_1,\cdot),i|\xi_{[1]}|^2\chi(s,t_1,\cdot),0)}{\delta w(s,x_{[1]})}](\xi_{[1]})](x_{[1]})ds$$

является математическим ожиданием решения задачи (5), (6).

Чтобы ослабить накладываемые условия, далее переходим от рассмотрения моментных функций в классическом смысле к обобщенным моментным функциям.

Теорема 3.2.2. *Пусть функция* $\mathbf{M}(u_0(x_{[1]}))$ *суммируема на* $\mathbb{R}^3$, *функция* $\mathbf{M}(u_0(x_{[1]})u_0(x_{[2]}))$ *суммируема на* $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, *существует окрестность* U *нуля в* $L_1^3(T) \times L_1(T) \times L_1(T \times \mathbb{R}^3)$ *такая, что при всех* $(v, p, w) \in U$, $s, s_1, t_1 \in T$ *существуют непрерывные по* v_k *вариационные производные* $\delta\varphi/\delta v_k(t_1)$, $\delta^2\varphi/\delta v_k(t_1)\delta w(s, x_{[1]})$, $\delta^3\varphi/\delta v_k(t_1)\delta w(s, x_{[1]})\delta w(s_1, x_{[2]})$, $k = 1, 2, 3$, *непрерывные по* p *вариационные производные* $\delta\varphi/\delta p(t_1)$, $\delta^2\varphi/\delta p(t_1)\delta w(s, x_{[1]})$, $\delta^3\varphi/\delta p(t_1)\delta w(s, x_{[1]})\delta w(s_1, x_{[2]})$, *где производные вычисляются в точке* $-\xi_{[2]}\chi(s_1, t_2, \cdot) - \xi_{[1]}\chi(s, t_1, \cdot), i|\xi_{[2]}|^2\chi(s_1, t_2, \cdot) + i|\xi_{[1]}|^2\chi(s, t_1, \cdot), 0$, *тогда*

$$\mathbf{M}(u(t_1, x_{[1]})u(t_2, x_{[2]})) = \mathbf{M}(u_0(x_{[1]})u_0(x_{[2]})) *_{1,2} F^{-1}_{\xi_{[1]}}[F^{-1}_{\xi_{[2]}}[\varphi(-\xi_{[2]}\chi(t_0, t_2, \cdot) -$$
$$-\xi_{[1]}\chi(t_0, t_1, \cdot), i|\xi_{[2]}|^2\chi(t_0, t_2, \cdot) + i|\xi_{[1]}|^2\chi(t_0, t_1, \cdot), 0)](x_{[2]})](x_{[1]}) -$$
$$-i\int_{t_0}^{t_2} \mathbf{M}(u_0(x_{[1]})) *_1 F^{-1}_{\xi_{[1]}}[F^{-1}_{\xi_{[2]}}[F_{x_{[2]}}[\frac{\delta}{\delta w(s, x_{[2]})}\varphi(-\xi_{[2]}\chi(s, t_2, \cdot) -$$
$$-\xi_{[1]}\chi(t_0, t_1, \cdot), i|\xi_{[2]}|^2\chi(s, t_2, \cdot) + i|\xi_{[1]}|^2\chi(t_0, t_1, \cdot), 0)](\xi_{[2]})](x_{[2]})](x_{[1]})ds -$$
$$-i\int_{t_0}^{t_1} \mathbf{M}(u_0(x_{[2]})) *_2 F^{-1}_{\xi_{[2]}}[F^{-1}_{\xi_{[1]}}[F_{x_{[1]}}[\frac{\delta}{\delta w(s, x_{[1]})}\varphi(-\xi_{[2]}\chi(t_0, t_2, \cdot) -$$
$$-\xi_{[1]}\chi(s, t_1, \cdot), i|\xi_{[2]}|^2\chi(t_0, t_2, \cdot) + i|\xi_{[1]}|^2\chi(s, t_1, \cdot), 0)](\xi_{[1]})](x_{[1]})](x_{[2]})ds -$$
$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_2} F^{-1}_{\xi_{[1]}}[F_{x_{[1]}}[F^{-1}_{\xi_{[2]}}[F_{x_{[2]}}[\frac{\delta^2}{\delta w(s, x_{[1]})\delta w(s_1, x_{[2]})}\varphi(-\xi_{[2]}\chi(s_1, t_2, \cdot) -$$
$$-\xi_{[1]}\chi(s, t_1, \cdot), i|\xi_{[2]}|^2\chi(s_1, t_2, \cdot) +$$
$$+ i|\xi_{[1]}|^2\chi(s, t_1, \cdot), 0)](\xi_{[2]})](x_{[2]})](\xi_{[1]})](x_{[1]})ds_1 ds$$

является обобщенной второй моментной функцией решения задачи (5), (6).

В пункте 3.2.3 выводится формула обобщенной дисперсионной функции решения задачи (5), (6).

В пункте 3.2.4 рассматривается ряд частных случаев.

В подпункте 3.2.4.1 показывается, что если f не зависит от случайных процессов ε и μ, то для нахождения моментных функций решения задачи (5), (6) надо знать не характеристический функционал f, а его моментные функции до того порядка включительно, какого порядка ищется моментная функция решения задачи (5), (6).

В подпунктах 3.2.4.2, 3.2.4.3 находятся моментные функции решения задачи (5), (6) при конкретных законах распределения в случае независимых и зависимых процессов, соответственно.

Характеристический функционал скалярного равномерно распределенного процесса $\mu(t)$ имеет вид

$$\varphi_\mu(p) = \frac{\sin\int\limits_T a_\mu(s)p(s)ds}{\int\limits_T a_\mu(s)p(s)ds} exp(i\int\limits_T \mathbf{M}\mu(s)p(s)ds).$$

Характеристический функционал скалярного нормально распределенного процесса $\varepsilon_k(t)$ имеет вид
$$\varphi_{\varepsilon_k}(v) = exp(i\int\limits_T \mathbf{M}\varepsilon_k(s_1)v(s_1)ds_1 - \frac{1}{2}\int\limits_T\int\limits_T b_{k,k}(s_1,s_2)v(s_1)v(s_2)ds_1ds_2),$$
где $b_{k,k}(s_1,s_2)$ - корреляционная функция процесса $\varepsilon_k(t)$.

Введем обозначения

$$M_k(s,t_1) = \int\limits_s^{t_1} \mathbf{M}\varepsilon_k(s_1)ds_1,$$
$$M(s,t_1) = (M_1(s,t_1), M_2(s,t_1), M_3(s,t_1)),$$
$$\widetilde{B}_{k,k}(s_1,t_2,s,t_1) = \int\limits_{s_1}^{t_2}\int\limits_s^{t_1} b_{k,k}(s_1,s_2)ds_1ds_2,$$
$$M_\mu(s,t_1) = \int\limits_s^{t_1} \mathbf{M}\mu(s_1)ds_1, \quad A_\mu(s,t_1) = \int\limits_s^{t_1} a_\mu(s_1)ds_1,$$
$$G_k^-(s,t_1) = \frac{1}{2}\widetilde{B}_{k,k}(s,t_1,s,t_1) + M_\mu(s,t_1) - A_\mu(s,t_1),$$
$$G_k^+(s,t_1) = \frac{1}{2}\widetilde{B}_{k,k}(s,t_1,s,t_1) + M_\mu(s,t_1) + A_\mu(s,t_1),$$
$$H_{k,k}^\star(s_1,t_2,s,t_1) = 4G_k^\star(s_1,t_2)G_k^\star(s,t_1) - \widetilde{B}_{k,k}^2(s_1,t_2,s,t_1),$$
где $k = 1,2,3$, знак $\star$ обозначает $-$ либо $+$.

Теорема 3.2.7. *Пусть случайные процессы $\varepsilon_k(t)$, $k = 1,2,3$, $\mu(t)$, $f(t,x)$ независимы, $\varepsilon_k(t)$ распределены по нормальному закону, $\mu(t)$ распределен равномерно, функция $\mathbf{M}(u_0(x_{[1]}))$ суммируема на $\mathbb{R}^3$, $\mathbf{M}(f(t_1,x_{[1]}))$ суммируема на $T\times\mathbb{R}^3$. Если*

$$G_k^-(s,t_1) > 0, \quad k=1,2,3, \quad \forall s,t_1\in T, \tag{7}$$

то математическое ожидание решения задачи (5), (6) *находится по формуле*

$$\mathbf{M}(u(t_1,x_{[1]})) = \mathbf{M}(u_0(x_{[1]})) *_1 \mathcal{F}_1(t_0,t_1,x_{[1]}) +$$
$$+\int\limits_{t_0}^{t_1} \mathcal{F}_1(s,t_1,x_{[1]}) *_1 \mathbf{M}(f(s,x_{[1]}))ds,$$

где

$$\mathcal{F}_1(s,t_1,x_{[1]}) = \frac{1}{2^6\pi^{5/2}A_\mu(s,t_1)}\frac{1}{|x_{[1]}+M(s,t_1)|} *_1$$
$$*_1(\prod_{k=1}^3 \frac{1}{\sqrt{G_k^-(s,t_1)}} exp(-\frac{x_{[1]k}^2}{4G_k^-(s,t_1)}) - \prod_{k=1}^3 \frac{1}{\sqrt{G_k^+(s,t_1)}} exp(-\frac{x_{[1]k}^2}{4G_k^+(s,t_1)})). \tag{8}$$

Пусть, кроме того, функция $\mathbf{M}(u_0(x_{[1]})u_0(x_{[2]}))$ суммируема на $\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3$, $\mathbf{M}(f(t_1,x_{[1]})f(t_2,x_{[2]}))$ суммируема на $T\times T\times\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3$. Если

$$H_{k,k}^-(s_1,t_2,s,t_1) > 0, \quad k=1,2,3, \quad \forall s,s_1,t_1,t_2\in T,$$

то вторая моментная функция решения задачи (5), (6) *находится по формуле*

$$\mathbf{M}(u(t_1,x_{[1]})u(t_2,x_{[2]})) = \mathbf{M}(u_0(x_{[1]})u_0(x_{[2]})) *_{1,2} \mathcal{F}_2(t_0,t_2,t_0,t_1,x_{[1]},x_{[2]})+$$
$$+\int_{t_0}^{t_2} \mathbf{M}(u_0(x_{[1]})) *_1 \mathcal{F}_2(s,t_2,t_0,t_1,x_{[1]},x_{[2]}) *_2 \mathbf{M}(f(s,x_{[2]}))ds+$$
$$+\int_{t_0}^{t_1} \mathbf{M}(u_0(x_{[2]})) *_2 \mathcal{F}_2(t_0,t_2,s,t_1,x_{[1]},x_{[2]}) *_1 \mathbf{M}(f(s,x_{[1]})ds+$$
$$+\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_2} \mathcal{F}_2(s_1,t_2,s,t_1,x_{[1]},x_{[2]}) *_{1,2} \mathbf{M}(f(s,x_{[1]})f(s_1,x_{[2]}))ds_1 ds,$$

где

$$\mathcal{F}_2(s_1,t_2,s,t_1,x_{[1]},x_{[2]}) =$$
$$=\frac{1}{2^6\pi^6}\frac{\sqrt{A_\mu(s_1,t_2)A_\mu(s,t_1)}}{(A_\mu(s,t_1)|x_{[2]}+M(s_1,t_2)|^2+A_\mu(s_1,t_2)|x_{[1]}+M(s,t_1)|^2)^2} *_{1,2}$$
$$*_{1,2}(\prod_{k=1}^{3}\frac{1}{\sqrt{H^-_{k,k}(s_1,t_2,s,t_1)}}\times$$
$$\times exp(-\frac{G^-_k(s_1,t_2)x^2_{[1]k}-\widetilde{B}_{k,k}(s_1,t_2,s,t_1)x_{[1]k}x_{[2]k}+G^-_k(s,t_1)x^2_{[2]k}}{H^-_{k,k}(s_1,t_2,s,t_1)})-$$
$$-\prod_{k=1}^{3}\frac{1}{\sqrt{H^+_{k,k}(s_1,t_2,s,t_1)}}\times$$
$$\times exp(-\frac{G^+_k(s_1,t_2)x^2_{[1]k}-\widetilde{B}_{k,k}(s_1,t_2,s,t_1)x_{[1]k}x_{[2]k}+G^+_k(s,t_1)x^2_{[2]k}}{H^+_{k,k}(s_1,t_2,s,t_1)})).$$

Получены формулы для первой и второй моментных функций в случае, когда случайные процессы $\varepsilon_k(t)$, $k=1,2,3$, $\mu(t)$, $f(t,x)$ независимы, а $\varepsilon(t)$, $\mu(t)$ распределены равномерно.

Получена формула для нахождения математического ожидания в случае, когда процессы ε, μ, f независимые между собой процессы, компоненты процесса ε зависимы и распределены по нормальному закону, процесс μ распределен равномерно.

Обозначим $\widetilde{B}_{1,f}(t_2,t_1,s,x_{[1]}) = \int_{t_2}^{t_1} b_{1,f}(s_1,s,x_{[1]})ds_1$, где $b_{1,f}(s_1,s,x_{[1]})$ – взаимная корреляционная функция $\varepsilon_1(s_1)$ и $f(s,x_{[1]})$.

Теорема 3.2.10. *Пусть процессы ε_1 и f зависимы, но независимы с ε_2, ε_3, μ, которые независимы между собой, ε, f распределены по нормальному закону, μ распределен равномерно, функция $\mathbf{M}(u_0(x_{[1]}))$ суммируема на $\mathbb{R}^3$, $\mathbf{M}(f(t_1,x_{[1]}))$ суммируема на $T\times\mathbb{R}^3$, выполнено условие* (7), *тогда*

$$\mathbf{M}(u(t_1,x_{[1]})) = \mathbf{M}(u_0(x_{[1]})) *_1 \mathcal{F}_1(t_0,t_1,x_{[1]}) + \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{F}_1(s,t_1,x_{[1]}) *_1$$
$$*_1 \mathbf{M}(f(s,x_{[1]}))ds - \int_{t_0}^{t_1} \frac{\widetilde{B}_{1,f}(s,t_1,s,x_{[1]})}{2^7\pi^{5/2}A_\mu(s,t_1)|x_{[1]}+M(s,t_1)|} *_1$$
$$*_1(x_{[1]1}(\frac{1}{G_1^-(s,t_1)}\prod_{k=1}^{3}\frac{1}{\sqrt{G_k^-(s,t_1)}}exp(-\frac{x_{[1]k}^2}{4G_k^-(s,t_1)})-$$
$$-\frac{1}{G_1^+(s,t_1)}\prod_{k=1}^{3}\frac{1}{\sqrt{G_k^+(s,t_1)}}exp(-\frac{x_{[1]k}^2}{4G_k^+(s,t_1)})))ds$$

является обобщенным математическим ожиданием решения задачи (5), (6), *где* $\mathcal{F}_1(s,t_1,x_{[1]})$ *определяется по формуле* (8).

В третьем параграфе вводится понятие характеристического функционала дифференциального уравнения со случайными коэффициентами – это характеристический функционал коэффициентов и решения уравнения.

Рассмотрим характеристический функционал процессов ε, μ, f, u

$$\psi(v,p,w,z) = \mathbf{M}e_\psi(v,p,w,z), \tag{9}$$

где $e_\psi(v,p,w,z) = exp(i\int_T[<\varepsilon(s),v(s)> + \mu(s)p(s)]ds +$ $+ i\int_T\int_{\mathbb{R}^3}[f(s,q)w(s,q) + u(s,q)z(s,q)]dqds)$, $\mathbf{M}$ – знак математического ожидания по функции распределения процессов ε, μ, f и u, $v \in L_1^3(T)$, $p \in L_1(T)$, $w \in L_1(T\times\mathbb{R}^3)$, $z \in L_1(T\times\mathbb{R}^3)$.

Определение 3.3.2. Характеристический функционал $\psi(v,p,w,z)$ назовем *характеристическим функционалом дифференциального уравнения диффузии* (5), решение которого удовлетворяет начальному условию (6).

Для ψ получена детерминированная задача в виде дифференциального уравнения с обычными и вариационными производными и начального условия, решение которой ищется в виде степенного ряда

$$\psi = \psi_0(v,p,w) + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{i^n}{n!}\int...\int\psi_n(v,p,w,s_1,...,s_n,x_{[1]},...,x_{[n]})\times$$
$$\times z(s_1,x_{[1]})...z(s_n,x_{[n]})ds_1...ds_ndx_{[1]}...dx_{[n]},$$

где интегрирование ведется по переменным $s_1,...,s_n$ по промежутку T, по переменным $x_{[1]},...,x_{[n]}$ по $\mathbb{R}^3$, отображения ψ_n симметричны по парам переменных $(s_k,x_{[k]})$, $k=1,...,n$.

Получены рекуррентные задачи для нахождения ψ_n, $n = 1, 2, ...$

$$\frac{\partial \psi_n(v, p, w, t_1, ..., t_n, x_{[1]}, ..., x_{[n]})}{\partial t_n} =$$

$$= -i \sum_{k=1}^{3} \frac{\delta}{\delta v_k(t_n)} \frac{\partial \psi_n(v, p, w, t_1, ..., t_n, x_{[1]}, ..., x_{[n]})}{\partial x_{[n]k}} -$$
$$-i \frac{\delta}{\delta p(t_n)} \Delta_{[n]} \psi_n(v, p, w, t_1, ..., t_n, x_{[1]}, ..., x_{[n]}) -$$
$$-i \frac{\delta \psi_{n-1}(v, p, w, t_1, ..., t_{n-1}, x_{[1]}, ..., x_{[n-1]})}{\delta w(t_n, x_{[n]})}, \tag{10}$$

$$\psi_n(v, p, w, t_0, ..., t_0, x_{[1]}, ..., x_{[n]}) = \mathbf{M}(\prod_{k=1}^{n} u_0(x_{[k]})) \varphi(v, p, w), \tag{11}$$

$$\psi_0(v, p, w) = \varphi(v, p, w).$$

Введем следующие обозначения

$$\mathbb{F}_n^{-1}[f] = F_{\xi_{[1]}}^{-1}[...[F_{\xi_{[n]}}^{-1}[f](x_{[n]})]...](x_{[1]}),$$
$$\mathbb{F}_m(k_1, ..., k_m)[f] = F_{x_{[k_1]}}[...[F_{x_{[k_m]}}[f](\xi_{[k_m]})]...](\xi_{[k_1]}),$$
$$\mathbb{F}_m^{-1}(k_1, ..., k_m)[f] = F_{\xi_{[k_1]}}^{-1}[...[F_{\xi_{[k_m]}}^{-1}[f](x_{[k_m]})]...](x_{[k_1]}),$$
$$V_m^n(k_1, ..., k_m) \varphi(v, p, w) =$$
$$= \varphi(v - \sum_{l=1, l \notin \{k_1, ..., k_m\}}^{n} \xi_{[l]} \chi(t_0, t_l, \cdot) - \sum_{l=1, l \in \{k_1, ..., k_m\}}^{n} \xi_{[l]} \chi(s_l, t_l, \cdot), p +$$
$$+ i \sum_{l=1, l \notin \{k_1, ..., k_m\}}^{n} |\xi_{[l]}|^2 \chi(t_0, t_l, \cdot) + i \sum_{l=1, l \in \{k_1, ..., k_m\}}^{n} |\xi_{[l]}|^2 \chi(s_l, t_l, \cdot), w),$$
$$V_0^n \varphi(v, p, w) = \varphi(v - \sum_{l=1}^{n} \xi_{[l]} \chi(t_0, t_l, \cdot), p + i \sum_{l=1}^{n} |\xi_{[l]}|^2 \chi(t_0, t_l, \cdot), w).$$

Знак $*_{1, ..., n, \notin \{k_1, ..., k_m\}}$ обозначает свертку по переменным x с указанными индексами.

Теорема 3.3.1. *Пусть функции* $\mathbf{M}(\prod_{l=1}^{k} u_0(x_{[l]}))$ *суммируемы на* $\mathbb{R}^3 \times ... \times \mathbb{R}^3$, $k = 1, ..., n$, *существует окрестность* U *нуля в* $L_1^3(T) \times L_1(T) \times L_1(T \times \mathbb{R}^3)$ *такая, что при всех* $(v, p, w) \in U$, $t, s_1, ..., s_n \in T$ *существуют непрерывные по* v_k *вариационные производные*

$$\delta\varphi/\delta v_k(t), \delta^2\varphi/\delta v_k(t)\delta w(s_1, x_{[1]}), ..., \delta^{n+1}\varphi/v_k(t)\delta w(s_1, x_{[1]})...\delta w(s_n, x_{[n]}),$$

$k = 1, 2, 3$ *и непрерывные по* p *вариационные производные*

$$\delta\varphi/\delta p(t), \delta^2\varphi/\delta p(t)\delta w(s, x), ..., \delta^{n+1}\varphi/\delta p(t)\delta w(s_1, x_{[1]})...\delta w(s_n, x_{[n]}),$$

где производные вычисляются в точке

$v - \sum_{l=1}^{n} \xi_{[l]} \chi(s_l, t_l, \cdot), p + i \sum_{l=1}^{n} |\xi_{[l]}|^2 \chi(s_l, t_l, \cdot), w$, *тогда*

$$\psi_n(v,p,w,t_1,...,t_n,x_{[1]},...,x_{[n]}) = \mathrm{M}(\prod_{k=1}^{n} u_0(x_{[k]})) *_{1,...,n} \mathbb{F}_n^{-1}[V_0^n \varphi(v,p,w)]+$$

$$+\sum_{m=1}^{n-1}(-i)^m \sum_{k_1<k_2<...<k_m=1}^{n} \int_{t_0}^{t_{k_1}} ... \int_{t_0}^{t_{k_m}} \mathrm{M}(\prod_{l=1, l\notin\{k_1,...,k_m\}}^{n} u_0(x_{[l]})) *_{1,...,n,\notin\{k_1,...,k_m\}}$$

$$*_{1,...,n,\notin\{k_1,...,k_m\}} \mathbb{F}_n^{-1}[\mathbb{F}_m(k_1,...,k_m)$$

$$[V_m^n(k_1,...,k_m)\frac{\delta^m\varphi(v,p,w)}{\delta w(s_{k_1},x_{[k_1]})...\delta w(s_{k_m},x_{[k_m]})}]]ds_{k_m}...ds_{k_1}+$$

$$+(-i)^n \int_{t_0}^{t_1} ... \int_{t_0}^{t_n} \mathbb{F}_n^{-1}[\mathbb{F}_n(1,...,n)[V_n^n(1,...,n) \tag{12}$$

$$\frac{\delta^n\varphi(v,p,w)}{\delta w(s_1,x_{[1]})...\delta w(s_n,x_{[n]})}]]ds_n...ds_1$$

является решением задачи (10), (11) *в смысле обобщенных функций.*

В пункте 3.3.2 находятся моментные функции n–го порядка решения задачи (5), (6).

Из соотношений, связывающих вариационные производные от характеристического функционала и моментные функции случайного процесса, получаем, что $\psi_n(0,0,0,s_1,...,s_n,x_{[1]},...,x_{[n]})$ является моментной функцией n–го порядка решения задачи (5), (6).

Из формулы (12) получается формула для моментной функции n–го порядка решения задачи (5), (6).

Автор выражает глубокую благодарность доктору физико-математических наук Владимиру Григорьевичу Задорожнему за научное руководство и постоянный интерес к работе.

Публикации автора по теме диссертации

1. Беседина Т.В. Условия существования решения обратной задачи вариационного исчисления для систем дифференциальных уравнений / Т.В. Беседина // Черноземный альманах научных исследований. – 2007. – № 2(6). – С. 18–25.

2. Беседина Т.В. Интегрирующий множитель обратной задачи вариационного исчисления для систем дифференциальных уравнений / Т.В. Беседина // Вестник факультета прикладной математики, информатики и механики. – 2009. – Вып. 7. – С. 15–19.

3. Беседина Т.В. О математическом ожидании решения трехмерного стохастического уравнения диффузии / Т.В. Беседина // Современные методы теории краевых задач: материалы Воронежской весенней математической школы "Понтрягинские чтения XX". – 2009. – С. 24–25.

4. Беседина Т.В. О трехмерном стохастическом уравнении диффузии / Т.В. Беседина, В.Г. Задорожний // Spectral and evolution problems. – 2009. – Vol. 19. – P. 13–20.

5. Беседина Т.В. О математическом ожидании решения уравнения диффузии со случайными коэффициентами / Т.В. Беседина // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики. Ч.1: сборник трудов Международной конференции. – 2009. – С. 55–58.

6. Беседина Т.В. Вторая моментная функция решения уравнения диффузии со случайными коэффициентами / Т.В. Беседина // Современные методы теории краевых задач: материалы Воронежской весенней математической школы "Понтрягинские чтения XXI". – 2010. – С. 32–33.

7. Беседина Т.В. Моментные функции решения уравнения переноса и диффузии / Т.В. Беседина, В.Г. Задорожний // Вестник Воронежского государственного университета. Серия Физика. Математика. – 2010. – № 2. – С. 15–25.

8. Беседина Т.В. Моментная функция n-го порядка решения уравнения диффузии со случайными коэффициентами / Т.В. Беседина // Современные методы теории краевых задач: материалы Воронежской весенней математической школы "Понтрягинские чтения XXII". – 2011. – С. 34.

9. Беседина Т.В. Дисперсионная функция решения уравнения диффузии со случайными коэффициентами / Т.В. Беседина // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: сборник трудов Международной конференции. – 2010. – С. 55–57.

10. Беседина Т.В. Характеристический функционал дифференциального уравнения диффузии со случайными коэффициентами / Т.В. Беседина // Крымская осенняя математическая школа (КРОМШ-2011). 22-я ежегодная международная конференция. Тезисы докладов. – 2011. – С. 9.

11. Беседина Т.В. Среднее значение решения уравнения диффузии с зависимыми случайными коэффициентами / Т.В. Беседина, В.Г. Задорожний // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: сборник трудов Международной конференции. – 2011. – С. 65–68.

Работа [7] соответствует списку ВАК РФ.

Подписано в печать 12.10.11. Формат 60×84 $^1/_{16}$. Усл. печ. л. 0.93.
Тираж 80 экз. Заказ 1258.

Отпечатано с готового оригинал-макета
в типографии Издательско-полиграфического центра
Воронежского государственного университета.
394000, Воронеж, ул. Пушкинская, 3