На правах рукописи

ДИв

Иванов Денис Александрович

Задачи быстродействия для волнового уравнения с граничными управлениями

Специальность 01.01.02 —
Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Автореферат диссертации на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук

Москва — 2017

Работа выполнена на кафедре оптимального управления факультета вычислительной математики и кибернетики Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова».

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, доцент **Потапов Михаил Михайлович**.

Официальные оппоненты: **Амосов Андрей Авенирович**, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического моделирования Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский университет „МЭИ“»;

Костин Андрей Борисович, доктор физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский ядерный университет „МИФИ“».

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт математики и механики имени Н. Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук.

Защита состоится 14 июня 2017 года в 15 часов 00 минут на заседании диссертационного совета Д 501.001.43 при Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу: 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, дом 1, строение 52, факультет вычислительной математики и кибернетики, аудитория 685.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова и на сайте http://www.cs.msu.su/.

Автореферат разослан «19» апреля 2017 года.

Учёный секретарь диссертационного совета Д 501.001.43 — Захаров — Захаров Евгений Владимирович, доктор физико-математических наук, профессор

Общая характеристика работы

Актуальность темы. В диссертации рассматриваются задачи управления и быстродействия для пространственно-одномерного волнового уравнения вида

$$y_{tt} = y_{xx} - \theta(x)y, \quad (t,x) \in Q = (0,T) \times (0,l), \tag{1}$$

где $y = y(t,x)$ — функция двух вещественных аргументов, описывающая эволюцию процесса, а $\theta(x)$ — некоторая заданная функция действительного аргумента. Отметим, что с помощью известных замен пространственной переменной x и неизвестной функции y к виду (1) приводятся дифференциальные уравнения более общего вида

$$\rho(x)\, y_{tt} = (k(x)\, y_x)_x - q(x)\, y,$$

с переменными коэффициентами $\rho(x) > 0$, $k(x) > 0$, $q(x) \geqslant 0$, характеризующими физические свойства системы. Уравнением (1) описываются механические колебания струны и стержня, колебания электромагнитного поля, распространение акустических волн и многие другие процессы.

Дополним уравнение (1) следующими граничными и начальными условиями:

$$-\beta_0 y_x + \sigma_0 y|_{x=0} = u_0(t), \quad \beta_1 y_x + \sigma_1 y|_{x=l} = u_1(t), \qquad t \in (0,T), \tag{2}$$

$$y|_{t=0} = 0, \quad y_t|_{t=0} = 0, \qquad x \in (0,l). \tag{3}$$

Предполагается, что числа $T > 0$, $l > 0$, определяющие область, в которой рассматривается уравнение (1), известны, коэффициент $\theta(x)$ задан на отрезке $x \in [0,l]$, β_0, β_1, σ_0, σ_1 — известные числа, а $u_0(t)$, $u_1(t)$ — некоторые заданные функции, которые мы будем интерпретировать как управления.

Задача (1)–(3), в которой требуется найти функцию $y(t,x)$ в области $Q = (0,T) \times (0,l)$, называется краевой, смешанной или начально-краевой задачей для уравнения (1). Начально-краевые задачи вида (1)–(3) являются классическими задачами математической физики, вклад в изучение классических решений данных задач внесли многие известные математики. После появления основополагающей работы С. Л. Соболева [1] появился интерес к изучению обобщённых решений начально-краевых задач. Фундаментальный вклад в развитие соответствующей теории внесли В. С. Владимиров, С. К. Годунов, В. А. Ильин, О. А. Ладыженская и другие авторы. В данной работе решения $y(t,x)$ задач (1) – (3) будут пониматься в обобщённом смысле.

В *задаче двустороннего граничного управления* временной промежуток T фиксирован и требуется найти пару управлений $u = (u_0(t), u_1(t))$, которая переводит систему (1) – (3) либо в заданное целевое состояние $f = (f^0(x), f^1(x))$:

$$y|_{t=T} = f^0(x), \quad y_t|_{t=T} = f^1(x) \quad 0 < x < l, \tag{4}$$

либо в положение, наиболее близкое к f:

$$\|y\,|_{t=T} - f^0(\cdot)\|^2 + \|y_t\,|_{t=T} - f^1(\cdot)\|^2 \to \inf. \tag{5}$$

В случае, если такое управление не единственно, будем искать *нормальное* управление $u_*(t)$, имеющее минимальную норму среди всех управлений, решающих задачу управления (1) – (4) или (1) – (3), (5).

Характерной особенностью волнового уравнения является наличие критического (порогового) момента управляемости $T_* > 0$. Известно, что при согласованном выборе пространств управлений и целевых состояний на докритических промежутках $T < T_*$ задача управления (1) – (4) разрешима не для произвольных целей, но управления, приводящие систему в достижимые целевые состояния обязательно *единственны*, а на сверхкритических интервалах $T > T_*$ выполняется свойство *полной* управляемости, причём существует бесконечно много управлений, приводящих в произвольно заданное целевое состояние. В критический момент $T = T_*$ факт достижимости произвольных целей существенным образом зависит от рассматриваемых функциональных пространств. Так, в классах сильных обобщённых решений критическое время имеет свойства докритических промежутков, а в классах слабых обобщённых решений критическое время имеет свойства сверхкритических промежутков. Отметим, что для задач (1) – (4) с двусторонними граничными управлениями критический момент равен [2, 3]

$$T_* = l.$$

В случаях сверхкритических и критических времён $T \geqslant T_*$ задачи граничного управления (1) – (4), в том числе и пространственно-многомерные, рассматривались в работах многих авторов. Аналитические решения задач граничного управления для простейшего одномерного волнового уравнения $\theta(x) = 0$ в классах *сильных* обобщённых решений приведены, например, в работах В. А. Ильина и Е. И. Моисеева [4], А. А. Никитина [5] для произвольного момента времени $T \geqslant l$. В классах *слабых* обобщённых решений для критического момента $T = l$ аналитические выражения для граничных управлений были получены Л. Н. Знаменской [6], а для $T > l$ — в работе [7]. Разрешимость задач управления для более общего волнового уравнения с переменным коэффициентом $\theta(t, x)$, зависящим также и от времени, на критическом промежутке времени $T = l$ была исследована М. Ф. Абдукаримовым и Л. В. Крицковым [8]. В работах [2, 3] для уравнений как вида (1), так и более общего вида, исследовались проблемы управляемости и наблюдаемости. На сверхкритических промежутках $T \geqslant T_*$ также разрабатывались и численные методы решения таких задач [9–12], среди которых одним из наиболее удобных является вариационный метод М. М. Потапова [10] (о технических деталях его применения см., например, [13–15]).

В случае докритических времён $T < T_*$ работ, посвящённых данным задачам, значительно меньше, причём рассматривалось только простейшее уравнение с $\theta(x) \equiv 0$. В классах сильных обобщённых решений для такого уравнения в работе В. А. Ильина [16] были сформулированы необходимые и достаточные условия разрешимости задачи управления (1) – (4) и получен аналитический вид её единственного решения, а в работе Г. Д. Чабакаури [17] аналитически решена задача (1) – (3), (5) о наилучшем приближении к заданной цели. В данной работе для управляемых процессов вида (1) – (3) с произвольным непрерывным коэффициентом $\theta(x)$ на временных промежутках фиксированной докритической длины $T < l$ *впервые* получены конструктивные оценки в классах сильных и слабых обобщённых решений, позволяющие с помощью вариационного метода М. М. Потапова находить устойчивые приближённые решения задач (1) – (4) и (1) – (3), (5).

В *задаче быстродействия* для каждого фиксированного целевого состояния $f = (f^0(x), f^1(x))$ ищется пара граничных управлений $u_\star = (u_{\star 0}(t), u_{\star 1}(t))$, обеспечивающих точное попадание в заданную цель f за *наименьшее* время $T_\star$:

$$T_\star = T_\star(f) = \inf T, \quad y\,|_{t=T} = f^0(x), \quad y_t\,|_{t=T} = f^1(x), \quad 0 < x < l. \qquad (6)$$

В силу того, что при $T > T_*$ в системе (1) – (3) все наперед заданные цели (6) являются достижимыми, искомое время быстродействия принимает заведомо докритические значения $T_\star \leqslant T_* = l$. Таким образом, задачи быстродействия являются естественным направлением исследований проблем граничного управления на докритических промежутках.

Для систем обыкновенных дифференциальных уравнений по проблемам быстродействия имеется огромная библиография. Было показано, что оптимальное управление удовлетворяет принципу максимума Л. С. Понтрягина, является bang-bang управлением и единственно (см., например, [18]). Из работ, в которых развиваются численные методы решения данных задач, отметим работы [19–22].

Для параболических систем с зонным управлением был получен аналог принципа максимума Л. С. Понтрягина, было показано, что оптимальное управление является bang-bang управлением и что задача быстродействия эквивалентна задаче на фиксированном промежутке времени [23, 24]. Часть подобных результатов была получена и для задач с граничными управлениями [25]. Метод решения задачи быстродействия с граничными управлениями для параболических систем был предложен в работе Ф. П. Васильева [26].

В работе [27] для абстрактного уравнения типа Шрёдингера с зонным управлением установлен аналог принципа максимума Л. С. Понтрягина и приведены достаточные условия, при которых оптимальное управление является bang-bang управлением.

В работах [28, 29] для волнового уравнения с зонным управлением установлены различные формы принципа максимума Л. С. Понтрягина и показано, что оптимальное управление не является bang-bang управлением в отличие от систем ОДУ, параболических систем и уравнения Шрёдингера. Данное отличие обусловлено наличием у волнового уравнения ненулевого критического момента T_*, начиная с которого все цели являются достижимыми. В работе [30] предложен численный метод решения данных задач. Результатов по задачам быстродействия для волнового уравнения с граничными управлениями значительно меньше. Для простейшего уравнения (1) с $\theta(x) \equiv 0$ аналитические решения этих задач нетрудно получить из результатов работ В. А. Ильина [16] и Л. Н. Знаменской [6], сами авторы которых постановки задач в форме задач быстродействия не рассматривали. Для общего случая $\theta(x) \neq 0$ теоретическое исследование задач быстродействия начато в недавней работе [31], в которой отмечается актуальность разработки соответствующих эффективных численных методов.

Отметим, что Ф. П. Васильевым и Р. П. Ивановым в [32] был предложен общий метод приближённого решения задач быстродействия для весьма широкого класса линейных управляемых процессов в банаховых пространствах, содержащего, в частности, и рассматриваемую нами систему (1)–(3).

В данной диссертации предлагаются *новые* численные методы решения задач быстродействия вида (1) – (3), (6), отвечающие основным требованиям, сформулированным в [31]. Эти методы, уступающие [32] по широте области применимости, благодаря использованию специфических свойств решения пространственно-одномерного волнового уравнения (1), имеют на данном классе задач заметные преимущества перед общим подходом [32] по конструктивности, экономичности и устойчивости и вырабатывают приближённые управления, которые, в отличие от [32], обладают свойством *сильной* сходимости.

Целью данной работы является определение новых свойств процесса (1) – (3) таких, которые гарантировали бы возможность применения вариационного метода М. М. Потапова для приближённого решения задач управления или наилучшего приближения на *докритических* промежутках, а также разработка методов численного решения соответствующих задач быстродействия. Для этого в диссертации ставятся и решаются следующие две конкретные **задачи**:

1. Для задач управления вида (1) – (4) и (1) – (3), (5) на временных промежутках фиксированной докритической длины вывод *новых* конструктивных оценок для граничных управлений через достижимые целевые функции, позволяющих применять для устойчивого численного решения таких задач вариационный метод М. М. Потапова.

2. Разработка *новых* эффективных методов решения задач быстродействия (1) – (3), (6) в классах сильных и слабых обобщённых решений с приложением соответствующих теоретических обоснований.

Научная новизна диссертационной работы определяется тем, что оба этих направления исследований другими авторами практически не разрабатывались.

Теоретическая значимость результатов диссертации заключается в конструктивном определении новых качественных и количественных свойств обобщённых решений волнового уравнения, существенно расширяющих информационную базу для развития эффективных численных методов решения задач управления и быстродействия. **Практическая значимость** этих результатов состоит в возможности их применения к решению задач управления и быстродействия для различных процессов колебаний по предложенным в диссертации схемам.

Основные методы исследования. В работе используются элементы теории обобщённых решений дифференциальных уравнений с частными производными и соответствующие методы исследования их свойств, методы функционального анализа в гильбертовых пространствах, методы аппроксимации и вычислительной математики.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Для задач двустороннего граничного управления волновым уравнением на докритических временных промежутках *впервые* получены *конструктивные* неравенства ограниченной обратимости оператора управления. Показано, как при наличии полученных оценок с помощью вариационного метода М. М. Потапова находятся устойчивые численные приближения к управлениям, решающим задачу о наилучшем приближении к заданному терминальному состоянию.

2. Для заданного целевого состояния получены *новые конструктивные* оценки порога распознавания достижимости в классах сильных и слабых обобщённых решений, позволяющие находить устойчивые и не завышенные приближения к моменту быстродействия.

3. Предложены алгоритмы решения задач быстродействия для волнового уравнения с двусторонними граничными управлениями в классах сильных и слабых обобщённых решений. Доказана сходимость вырабатываемых приближений как по времени быстродействия, так и по управлению, при асимптотическом уточнении параметров конечномерной аппроксимации и уменьшении уровня погрешности в задании целевых функций.

Достоверность полученных в работе результатов подтверждается строгими математическими доказательствами соответствующих утверждений и теорем, их публикациями в научных журналах и в тезисах конференций. Работоспособность предложенных в работе алгоритмов подтверждается результатами соответствующих тестовых расчётов.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на следующих научных конференциях и семинарах:

- IV Международная конференция «Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Общая топология. Проблемы математического образования», посвящённая 90-летию со дня рождения Л. Д. Кудрявцева (Москва, РУДН, 2013 год);

- Научная конференция «Ломоносовские чтения» (Москва, МГУ, 2014 год);

- Международный научный семинар по обратным и некорректно поставленным задачам (Москва, МГУ, 2015 год);

- XIII Международная конференция «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления» (конференция Пятницкого) (Москва, ИПУ РАН, 2016 год);

- Международная конференция «Динамические системы: обратные задачи, устойчивость и процессы управления», посвящённая 80-летию со дня рождения Ю. С. Осипова (Москва, МИАН, 2016 год);

- Семинар кафедры оптимального управления факультета ВМК МГУ «Методы оптимизации» (Москва, 2016 год);

- Научно-исследовательский семинар кафедр общей математики и функционального анализа и его применений факультета ВМК МГУ (Москва, 2016 год);

- Научно-исследовательский семинар кафедры математической физики факультета ВМК МГУ (Москва, 2016 год);

- Научно-исследовательский семинар кафедры математического моделирования национального исследовательского университета «МЭИ» (Москва, 2016 год);

- Научно-исследовательский семинар кафедры оптимального управления факультета ВМК МГУ (Москва, 2016 год);

- Семинар кафедры математического анализа механико-математического факультета МГУ «Обратные задачи анализа, математической физики и естествознания» (Москва, 2016 год);

- Научно-исследовательский семинар кафедры высшей математики государственного университета «МФТИ» (г. Долгопрудный, 2016 год);

- Семинар кафедры системного анализа факультета ВМК МГУ «Прикладные задачи системного анализа» (Москва, 2016 год).

Публикации автора по теме диссертации включают 10 работ, 5 из которых опубликованы в журналах, рекомендованных ВАК [33–37], а остальные — в докладах на конференциях [38–42].

Личный вклад автора в данную диссертационную работу состоит в самостоятельном получении всех основных её теоретических результатов, а также в проведении численных экспериментов. Участие научного руководителя М. М. Потапова ограничивается постановкой задач, составлением планов исследований, проверкой достоверности их результатов, а также редактированием текстов основных публикаций.

Объём и структура работы. Диссертация состоит из введения, трёх глав и заключения. Объём диссертации составляет 99 страниц, на которых помещены 7 таблиц и 12 рисунков. Список цитированной литературы включает 116 работ.

Основное содержание работы

Первая глава посвящена решению задач двустороннего граничного управления в классах сильных и слабых обобщённых решений на промежутках фиксированной докритической длины $T \leqslant l$. В § 1.1 приводятся вспомогательные сведения об обобщённых решениях рассматриваемых смешанных задач и о вариационном методе М. М. Потапова [10].

Предполагаются выполненными следующие условия на исходные данные задачи (1) – (3):

$$\theta(x) \in C[0,l], \quad \beta_i \in \{0,1\}, \quad \beta_i + |\sigma_i| > 0, \quad i = 0,1. \tag{7}$$

Задачи управления (1) – (4) и (1) – (3), (5) ставятся в форме минимизации невязки:

$$J(u) = \|\mathcal{A}u - f\|_F^2 \to \inf, \quad u \in H. \tag{8}$$

Здесь H и F — пара пространств, определяемая классами обобщённых решений, а $\mathcal{A}$ — оператор управления вида

$$\mathcal{A}u = (y(T,x), y_t(T,x)), \tag{9}$$

где $y = y(t,x)$ — решение дифференциальной задачи (1) – (3), соответствующее граничному управлению u.

В случае *сильных* обобщённых решений выбираются пространства

$$H = H_0 \times H_1, \quad H_i = H^1(\overset{\circ}{0}, T) \quad \text{при } \beta_i = 0,$$
$$H_i = L^2(0,T) \quad \text{при } \beta_i = 1, \quad i = 0, 1, \tag{10}$$

$$F = H^1(0,l) \times L^2(0,l), \tag{11}$$

где $L^2(0,T), L^2(0,l)$ — пространства Лебега, а $H^1(\overset{\circ}{0},T) = \{f(t) \in H^1(0,T) \mid f(0) = 0\}$, $H^1(0,l)$ — пространства Соболева.

В случае *слабых* обобщённых решений рассматриваются пространства

$$H = H_0 \times H_1, \quad H_i = L^2(0,T) \quad \text{при } \beta_i = 0,$$
$$H_i = (H^1(0,T))^* \quad \text{при } \beta_i = 1, \quad i = 0, 1, \tag{12}$$

$$F = L^2(0,l) \times (F^1)^*, \tag{13}$$

где $(H^1(0,T))^*$, $(F^1)^*$ — пространства, сопряжённые к пространствам Соболева $H^1(0,T)$ и $F^1 = \{f(x) \in H^1(0,l) \mid (1-\beta_0)\, f(0) = 0, \ (1-\beta_1)\, f(l) = 0\}$.

Заканчивается § 1.1 описаниями вариационного метода и условий его применимости. На сверхкритических промежутках $T > T_*$ одним из основных таких условий обычно являются конструктивные оценки вида [13, 14]

$$\|\mathcal{A}^* v\|^2_{H^*} \geqslant \mu \|v\|^2_{F^*}, \quad \forall v \in F^* \quad (\mu = \text{const} > 0), \tag{14}$$

для сопряжённого к (9) оператора наблюдения $\mathcal{A}^*$. Неравенства вида (14) принято называть *неравенствами наблюдаемости* [3], а значения оценочной константы $\mu > 0$ при использовании вариационного метода М. М. Потапова должны быть *известны*. В данной работе рассматриваются докритические промежутки $T < T_*$, на которых неравенства наблюдаемости (14) выполняться не могут, зато оказывается возможным установить двойственные по отношению к ним *конструктивные оценки непрерывной обратимости оператора управления* (9):

$$\|\mathcal{A}u\|^2_F \geqslant \nu \|u\|^2_H, \quad \forall u \in H, \tag{15}$$

с *известными* значениями постоянной $\nu > 0$, которые будут явно выражены через параметры задачи. Эти значения могут быть использованы для устойчивых вычислений приближённых решений задач управления (8) с помощью вариационного метода М. М. Потапова подобно тому, как значения постоянной μ из неравенств наблюдаемости (14) использовались в [13, 14] для приближённого решения задач управления $Au = f$ на сверхкритических промежутках $T > T_*$.

В § 1.2 представлен вывод оценки (15) для случая *сильных* обобщённых решений. В этом случае константа ν не вырождается при приближении T к пороговому моменту T_*, что даёт возможность применять вариационный метод М. М. Потапова для решения задачи (8) в классах сильных обобщённых решений при любых $T \leqslant T_*$. Главный результат этого параграфа содержит

Теорема 4[1] [33]. *Пусть коэффициенты дифференциальной задачи* (1) - (3) *удовлетворяют условиям* (7), *а граничные управляющие воздействия* $u = (u_0(t), u_1(t))$ *выбираются из класса* (10). *Тогда при всех* $T \leqslant T_* = l$ *для сильного обобщённого решения* $y(t,x)$ *системы* (1) - (3) *справедливо неравенство непрерывной обратимости* (15) *для оператора* $\mathcal{A}$ *из* (9) *и пространства* F *из* (11). *Значение оценочной константы* ν *в* (15) *отделено от нуля и явно выражается через* l *и коэффициенты* $\theta(x)$, β_0, β_1, σ_0, σ_1[2].

В § 1.3 выводится оценка (15) для случая *слабых* обобщённых решений. Установлено, что в классах слабых обобщённых решений при $T < T_*$ оценочная константа $\nu = \nu(T)$ зависит от T и имеет вид

$$\nu = (T_* - T)/\mathcal{N}, \quad \mathcal{N} = \text{const} > 0, \tag{16}$$

значение $\mathcal{N}$ не зависит от T, а порядок вырождения $\nu(T)$ при $T \to T_*$ в (16) является точным. Справедлива

Теорема 5 [34]. *Пусть коэффициенты дифференциальной задачи* (1) - (3) *удовлетворяют условиям* (7), *а граничные управляющие воздействия* $u = (u_0, u_1)$ *выбираются из класса* (12). *Тогда при всех* $T < T_* = l$ *для слабого обобщённого решения* $y(t,x)$ *системы* (1) - (3) *справедливо неравенство непрерывной обратимости* (15) *для оператора* $\mathcal{A}$ *из* (9) *и пространства* F *из* (13). *Значение оценочной константы* ν *в* (15) *имеет вид* (16), *в котором значение* $\mathcal{N}$ *не зависит от* T *и явно выражается через* l *и коэффициенты* $\theta(x)$, β_0, β_1, σ_0, σ_1.

В § 1.4 предложен и исследован альтернативный метод вычисления граничных управлений в классах слабых обобщённых решений задачи (1) - (4) в предположении, что цель $f \in F$ (4) достижима за время $T < T_*$, не использующий неравенство обратимости (15) с вырождающимися значениями

---

[1]нумерация лемм и теорем полностью соответствует принятой в диссертации

[2]конкретный вид констант во всех утверждениях приведён в диссертации

из (16). Он основан на предварительном сглаживании фазовых траекторий

$$Y(t,x) = \int_0^t y(\tau, x)\, d\tau, \tag{17}$$

после которого задача управления для $Y(t,x)$ переходит в класс *сильных* обобщённых решений, а целевое состояние $Y(T,x)$ определяется по $f^1(x)$ с точностью до аддитивной составляющей $P(x)$ из множества решений однородного дифференциального уравнения

$$p'' - \theta(x)p = 0, \quad 0 < x < l.$$

Приведём краткую схему реализации предлагаемого метода, состоящую из трёх этапов:

I. Ищется разложение целевой скорости $f^1 \in (F^1)^*$, то есть определяются $f_0^1 \in \mathcal{J}_{F^1}^{-1} H_0^1$ и c_0, $c_1 \in \mathbb{R}$ такие, что

$$f^1 = f_0^1 + c_0\beta_0\delta(x) + c_1\beta_1\delta(x-l),$$

где $\mathcal{J}_{F^1}^{-1} : F^1 \to (F^1)^*$ — обратный оператор Рисса, а $\delta(x)$, $\delta(x-l)$ — дельта функции Дирака.

II. Определяется целевое состояние $Y(T,x)$ из условий достижимости сглаженной цели в момент времени T и находится соответствующее решение $\widehat{u}(t) = (\widehat{u}_0(t), \widehat{u}_1(t))$ сглаженной задачи управления.

III. С помощью оператора дифференцирования $\mathcal{D}$ вычисляется искомое решение $u(t) = (u_0(t), u_1(t))$ задачи управления (1)–(4) в классах слабых обобщённых решений:

$$u(t) = \left(\mathcal{D}\widehat{u}_0(t) + c_0\beta_0\delta(t-T),\ \mathcal{D}\widehat{u}_1(t) + c_1\beta_1\delta(t-T)\right).$$

Если на практике вместо точных целевых функций $f = (f^0(x), f^1(x))$ доступны некоторые их приближения $\widetilde{f} = (\widetilde{f}^0(x), \widetilde{f}^1(x))$ и известен соответствующий уровень погрешности $\delta > 0$:

$$\|\widetilde{f} - f\|_F \leqslant \delta, \tag{18}$$

то этапы $I-III$ реализуются приближённо.

Основной результат этого параграфа содержит

Теорема 6 [36]. *Приближённые управления $\widetilde{u}(t)$, построенные по схеме I–III, при $\delta \to 0$ и асимптотическом уточнении параметров конечномерной аппроксимации сходятся по норме исходного пространства H из* (12) *к точному решению $u(t)$ задачи* (1)–(4).

В §1.5 приведены вычислительные иллюстрации, демонстрирующие практические возможности полученных в данной главе теоретических результатов.

Результаты первой главы опубликованы в [33, 34, 36, 38, 39].

Во второй главе ставится задача быстродействия (1)–(3), (6) в классах *сильных* обобщённых решений и разрабатывается метод её численного решения.

В §2.1 предложен численный алгоритм поиска времени быстродействия и сформулированы информационные и аппроксимационные условия, достаточные для его сходимости. Данный алгоритм основывается на проверке условия достижимости, поэтому кратко остановимся на его описании. Пусть $\Delta(s)$ и $\nabla(s)$ — верхний и нижний характеристические треугольники с общим основанием $t = s$, $0 \leqslant x \leqslant l$, а Ω_s — квадрат, образованный их объединением:

$$\Omega_s = \Delta(s) \cup \nabla(s), \quad \Delta(s) = \{0 \leqslant x \leqslant l, \ \ s \leqslant t \leqslant s + l/2 - |x - l/2|\},$$
$$\nabla(s) = \{0 \leqslant x \leqslant l, \ \ s - l/2 + |x - l/2| \leqslant t \leqslant s\}, \quad \omega_T = \Omega_T \cap \Omega_0.$$

В квадрате Ω_0 рассматривается задача Коши

$$\begin{gathered} y_{tt} = y_{xx} - \theta(x) y, \quad (t,x) \in \Omega_0, \\ y|_{t=0} = f^0(x), \quad y_t|_{t=0} = -f^1(x), \quad x \in (0,l). \end{gathered} \tag{19}$$

Справедлива

Лемма 6 [35]. *Пусть функция $y = y(t,x)$ является решением задачи Коши* (19) *в квадрате Ω_0. Тогда условие $y(t,x) \equiv 0 \ \ \forall\, (t,x) \in \omega_T$ является необходимым и достаточным для того, чтобы цель $f = (f^0(x), f^1(x)) \in F = H^1(0,l) \times L^2(0,l)$ была достижимой в исходной задаче граничного управления* (1)–(4) *за время T.*

Следствие. *Пусть функция $y = y(t,x)$ является решением задачи Коши* (19) *в квадрате Ω_0. Тогда время быстродействия $T_*(f)$ для цели*

$f = (f^0(x), f^1(x))$ *находится из условия*

$$T_\star(f) = \min T: \quad y(t,x) \equiv 0 \quad \forall (t,x) \in \omega_T.$$

На практике мы имеем дело с *численным* решением $\widetilde{y}^\tau = \widetilde{y}^\tau(t,x)$ задачи Коши (19) с возмущёнными данными $\widetilde{f}$, удовлетворяющими условию (18). Это решение $\widetilde{y}^\tau$ вычисляется на сетке с шагом $\tau > 0$ и вместо точного условия достижимости $y\,|_{\omega_T} = 0$ проверяется неравенство вида

$$\|\widetilde{y}^\tau\|_{\omega_T} \leqslant \varepsilon_T. \qquad (20)$$

Параметр ε_T будем называть *порогом распознавания достижимости*. Для обоснованного применения численного алгоритма нахождения времени быстродействия требуется *конструктивно* выразить ε_T через уровни погрешностей и шаги сетки, то есть $\varepsilon_T = \varepsilon_T(\widetilde{f}, \tau, \delta)$.

Основной результат данного параграфа содержит

Теорема 7 [35]. *Пусть* $f \in F = H^1(0,l) \times L^2(0,l)$ *— произвольный целевой элемент в исходной задаче управления* (1) - (4) *и* $T_\star = T_\star(f)$ *— соответствующее ему время быстродействия. Пусть уровень погрешности* $\varepsilon_T = \varepsilon_T(\widetilde{f}, \tau, \delta)$ *из условия* (20) *известен и* $\varepsilon_T \to 0$ *при* δ, $\tau \to 0$. *Тогда вырабатываемые алгоритмом моменты* $\widetilde{T}_\star = \widetilde{T}_\star(\widetilde{f})$ *оказываются незавышенными и обладают сходимостью:*

$$\widetilde{T}_\star \leqslant T_\star \quad \forall \delta, \tau > 0; \quad \widetilde{T}_\star \to T_\star \quad \textit{при} \quad \delta, \tau \to 0.$$

В § 2.2 содержится непосредственный вывод порога распознавания достижимости ε_T. А именно, справедлива следующая лемма.

Лемма 8 [35]. *При выполнении условия* (18) *справедлива оценка* (20) *с явным выражением* ε_T *через уровень погрешности* δ *и шаг сетки* τ, *причём*

$$\varepsilon_T \to 0 \quad \textit{при} \quad \delta,\, \tau \to 0.$$

В § 2.3 предложен численный алгоритм нахождения оптимальных по времени управлений и сформулированы условия его сходимости. Этот алгоритм конструирует приближения $\widetilde{u}_\star$ к оптимальному по быстродействию управлению $u_\star$ из приближений $\widetilde{u}_*$ к единственному управлению u_* в критический момент $T_* = l$ с учётом уже найденного приближённого момента быстродействия $\widetilde{T}_\star$. Результат сходимости данного алгоритма содержит

Теорема 8 [35]. *Пусть выполнены все условия теоремы 7 и* $f \in F = H^1(0,l) \times L^2(0,l)$ *— произвольный целевой элемент в исходной задаче управления* (1)–(4), *достижимый за время быстродействия* $T_\star = T_\star(f)$ *посредством граничных управлений* $u_\star(t) = (u_{\star 0}(t),\ u_{\star 1}(t))$, $t \in [0, T_\star]$. *Пусть* $\widetilde{T}_\star$ *и* $\widetilde{u}_\star(t)$, $t \in [0, \widetilde{T}_\star]$, *— приближённые решения задачи быстродействия, вырабатываемые алгоритмом, а* $U_\star(t)$ *и* $\widetilde{U}_\star(t)$ *— продолжения на* $[0,l]$ *управлений* $u_\star(t)$ *и* $\widetilde{u}_\star(t)$. *Тогда имеет место сходимость:*

$$\|\widetilde{U}_\star - U_\star\| \to 0 \quad \text{при} \quad \tau,\ \delta \to 0.$$

В §2.4 приведены результаты численных экспериментов, показывающие практические возможности полученных в данной главе теоретических результатов.

Результаты второй главы опубликованы в [35, 40–42].

В третьей главе рассматривается задача быстродействия в классах слабых обобщённых решений.

В §3.1 с помощью процедуры сглаживания (17) производится переход к постановке в классах сильных обобщённых решений. Это сделано прежде всего для того, чтобы при выводе оценки порога распознавания достижимости в слабых классах полнее использовать аналогичные оценки, уже полученные в главе 2 для сильных обобщённых решений. Доказано, что при этом значение $T_\star(f)$ момента быстродействия не изменяется и даётся его конструктивное описание в терминах сглаженной задачи. А именно, в квадрате Ω_0 рассматривается задача Коши

$$\begin{aligned} &Z_{tt} = Z_{xx} - \theta(x)Z, \quad (t,x) \in \Omega_0, \\ &Z|_{t=0} = -\mathcal{J}_{F^1} f^1(x), \quad Z_t|_{t=0} = -f^0(x), \quad x \in (0,l), \end{aligned} \tag{21}$$

где $\mathcal{J}_{F^1} f^1(x)$ — образ Рисса $f^1(x) \in F^1$. Вводится функция $V(t,x)$

$$V(t,x) \equiv Z(t,x) - Z(t^+(x),x), \quad (t,x) \in \Omega_0,$$

где $t = t^+(x) \equiv l/2 - |x - l/2|$, $x \in [0,l]$ — уравнение верхней границы квадрата Ω_0. Справедлива лемма о представлении времени быстродействия $T_\star(f)$ в терминах $V(t,x)$.

Лемма 14 [37]. *Для любой цели $f = (f^0(x), f^1(x)) \in F = L^2(0,l) \times (F^1)^*$ соответствующее ей время быстродействия $T_*(f)$ определяется условиями*

$$T_*(f) = \min T: \quad V(t,x) \equiv 0, \quad (t,x) \in \omega_T.$$

В §3.2 предложена модификация алгоритма поиска времени быстродействия из главы 2. Данная модификация основана на лемме 14, в которой задача Коши (21) решается численно с шагом τ аналогично задаче Коши (19), а образ Рисса $\mathcal{J}_{F^1} f^1(x)$ находится приближённо с шагом h. Для обоснованного применения данной модификации необходима оценка $\widetilde{V}_h^\tau$, аналогичная оценке (20):

$$\|\widetilde{V}_h^\tau\|_{\omega_T} \leqslant \varepsilon_T, \tag{22}$$

в которой параметр ε_T играет роль порога распознавания достижимости.

Лемма 16 [37]. *При выполнении условия* (18) *справедлива оценка* (22) *с явным выражением ε_T через уровень погрешности δ и шаги сеток τ, h, таким, что*

$$\varepsilon_T \to 0 \quad \text{при} \quad \delta,\, \tau,\, h \to 0.$$

Результат о сходимости приближённых времён быстродействия содержит

Теорема 9 [37]. *Пусть $f \in F = L^2(0,l) \times (F^1)^*$ – произвольный целевой элемент в исходной задаче управления* (1)–(4) *и $T_* = T_*(f)$ – соответствующее ему точное время быстродействия. Пусть приближения $\widetilde{f} \in F$ подчиняются требованию* (18), *уровень погрешности $\varepsilon_T = \varepsilon_T(\widetilde{f}, \delta, \tau, h)$ из условия* (22) *известен и $\varepsilon_T \to 0$ при τ, δ, $h \to 0$, а приближённые моменты быстродействия определяются по описанным в алгоритме правилам. Тогда значения $\widetilde{T}_*$ оказываются незавышенными и обладают сходимостью:*

$$\widetilde{T}_* \leqslant T_* \quad \forall \delta, \tau, h > 0; \quad \widetilde{T}_* \to T_* \quad \text{при} \quad \delta, \tau, h \to 0.$$

В §3.3 предложен способ построения приближений к оптимальным по быстродействию управлениям в классах слабых обобщённых решений. Обратим внимание на то, что их конструкция заметно отличается от предложенной для случая сильных обобщённых решений. Сходимость оптимальных по быстродействию управлений установлена в следующей теореме.

Теорема 10 [37]. *Пусть выполнены все условия теоремы 9 и зафиксировано некоторое достаточно малое $\tau_0 > 0$, задающее величину отступа от критического момента $T_* = l$, и $T_{*0} = T_* - \tau_0$. Тогда для целей*

$f \in F = L^2(0,l) \times (F^1)^*$ с околокритическим значением времени быстродействия $T_\star(f) > T_{\star 0}$ при всех достаточно малых δ, τ, $h > 0$ вырабатываемые алгоритмом приближённые управления $\widetilde{u}_\star$ сильно сходятся при $\delta, \tau, h \to 0$ к нормальному решению $u_\star$ задачи управления (1) – (4) на критическом промежутке $T = T_\star$. Для целей $f \in F$, время быстродействия которых отделено от критического: $T_\star(f) \leqslant T_{\star 0}$, приближённые управления $\widetilde{u}_\star$ сильно сходятся при $\delta, \tau, h \to 0$ к точному оптимальному управлению $u_\star$.

В § 3.4 приведены вычислительные иллюстрации, подтверждающие работоспособность предложенных в данной главе методов.

Результаты третьей главы опубликованы в [37, 41, 42].

Заключение

Основные результаты диссертационной работы заключаются в следующем:

1. Для задач двустороннего граничного управления волновым уравнением на докритических временных промежутках впервые получены конструктивные неравенства ограниченной обратимости оператора управления. Показано, как при наличии полученных оценок с помощью вариационного метода М. М. Потапова находятся устойчивые численные приближения к управлениям, решающим задачу о наилучшем приближении к заданному терминальному состоянию.

2. Для заданного целевого состояния получены новые конструктивные оценки порога распознавания достижимости в классах сильных и слабых обобщённых решений, позволяющие находить устойчивые и не завышенные приближения к моменту быстродействия.

3. Предложены алгоритмы решения задач быстродействия для волнового уравнения с двусторонними граничными управлениями в классах сильных и слабых обобщённых решений. Доказана сходимость вырабатываемых приближений как по времени быстродействия, так и по управлению, при асимптотическом уточнении параметров конечномерной аппроксимации и уменьшении уровня погрешности в задании целевых функций.

Выполненные в диссертации исследования можно развивать в направлении разработки методов решения задач быстродействия для волнового уравнения с управляющими воздействиями других типов, управлениями, подчиняющимися заданным ограничениям, а также для пространственно-многомерных уравнений колебаний.

Автор глубоко благодарен своему научному руководителю профессору М. М. Потапову за постановку задач и внимание к работе. Автор благодарит профессора Ф. П. Васильева и профессора А. В. Разгулина за внимание, поддержку и полезные советы.

Список цитированной литературы

1. **Sobolev S. L.** Méthode nouvelle à résoudre le problème de Cauchy pour les équations linéaires hyperboliques normales // Матем. сб. 1936. Т. 43. № 1. С. 39 - 72.

2. **Russell D. L.** Controllability and stabilizability theory for linear partial differential equations: recent progress and open questions // SIAM Rev. 1978. Vol. 20. N 4. P. 639 - 739.

3. **Lions J.-L.** Exact controllability, stabilization and perturbations for distributed systems // SIAM Rev. 1988. Vol. 30. N 1. P. 1 - 68.

4. **Ильин В. А., Моисеев Е. И.** Оптимизация граничных управлений колебаниями струны // Успехи матем. наук. 2005. Т. 60. вып. 6. С. 89 - 114.

5. **Никитин А. А.** Оптимальное граничное управление колебаниями струны, производимое силой при упругом закреплении // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47. № 12. С. 1773 - 1782.

6. **Знаменская Л. Н.** Управление упругими колебаниями. — М.: Физматлит, 2004. — 176 с.

7. **Gugat M., Leugering G., Sklyar G.** L^p - optimal boundary control for the wave equation // SIAM J. Control Optim. 2005. Vol. 44. N 1. P. 49 - 74.

8. **Абдукаримов М. Ф., Крицков Л. В.** Задача граничного управления для одномерного уравнения Клейна-Гордона-Фока с переменным коэффициентом. Случай управления смещениями на двух концах // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49. № 8. С. 1036 - 1046.

9. **Glowinski R., Li C.-H., Lions J.-L.** A numerical approach to the exact boundary controllability of the wave equation (I) Dirichlet controls: Description of the numerical methods // Japan J. of Industr. a. Appl. Mathematics. 1990. Vol. 7. N 1. P. 1 - 76.

10. **Потапов М. М.** Устойчивый метод решения линейных уравнений с неравномерно возмущённым оператором // Докл. Акад. наук. 1999. Т. 365. № 5. С. 596 - 598.

11. **Negreanu M.** Convergence of a semidiscrete two-grid algorithm for the controllability of the $1-d$ wave equation // SIAM J. Numer. Anal. 2008. Vol. 46. N 6. P. 3233–3263.

12. **Ervedoza S., Zuazua E.** Numerical approximation of exact controls for waves. – New York, NY.: Springer, 2013. – 122 p.

13. **Потапов М. М.** О сильной сходимости разностных аппроксимаций для задач граничного управления и наблюдения для волнового уравнения // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1998. Т. 38. № 3. С. 387–397.

14. Приближённое решение двойственных задач управления и наблюдения / Ф. П. Васильев, М. А. Куржанский, М. М. Потапов, А. В. Разгулин. – М.: Издательский отдел факультета ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова; МАКС Пресс, 2010. – 384 с.

15. **Потапов М. М., Дряженков А. А.** Оптимизация порогового момента в неравенстве наблюдаемости для волнового уравнения с краевым условием упругого закрепления // Тр. Матем. ин-та РАН. 2012. Т. 277. С. 215–229.

16. **Ильин В. А.** Граничное управление процессом колебаний на двух концах в терминах обобщённого решения волнового уравнения с конечной энергией // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36. № 11. С. 1513–1528.

17. **Чабакаури Г. Д.** Оптимизация граничного управления процессом колебаний на одном конце при закреплённом втором конце // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37. № 12. С. 1655–1663.

18. **Ли Э. Б., Маркус Л.** Основы теории оптимального управления. – М.: Наука, 1972. – 576 с.

19. **Eaton J. H.** An iterative solution to time-optimal control // J. of Math. Anal. and Appl. 1962. Vol. 5. N 2. P. 329–344.

20. **Белолипецкий А. А.** Линейная задача оптимального быстродействия с малым параметром // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1974. Т. 14. № 5. С. 1131–1137.

21. **Киселёв Ю. Н., Орлов М. В.** Численные алгоритмы линейных быстродействий // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1991. Т. 31. № 12. С. 1763–1771.

22. **Ito K., Kunisch K.** Semismooth Newton methods for time-optimal control for a class of ODEs // SIAM J. Control Optim. 2010. Vol. 48. N 6. P. 3997–4013.

23. **Raymond J. P., Zidani H.** Pontryagin's principle for time-optimal problems // J. of Optim. Theory and Appl. 1999. Vol. 101. N 2. P. 375–402.

24. **Kunisch K., Wang L.** Time optimal control of the heat equation with pointwise control constraints // ESAIM: Control Optim. Calc. Var. 2013. Vol. 19. N 2. P. 460–485.

25. **Micu S., Roventa I., Tucsnak M.** Time optimal boundary controls for the heat equation // J. of Func. Anal. 2012. Vol. 263. N 1. P. 25–49.

26. **Васильев Ф. П.** Об итерационных методах решения задач быстродействия, связанных с параболическими уравнениями // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1970. Т. 10. №4. С. 942–957.

27. **Lohéac J., Tucsnak M.** Maximum principle and bang-bang property of time optimal controls for Schrodinger-type systems // SIAM J. Control Optim. 2013. Vol. 51. N5. P. 4016–4038.

28. **Fattorini H. O.** Infinite dimensional optimization and control theory // Encyclopedia Math. Appl. 1999. Vol. 62. Cambridge University Press, Cambridge.

29. **Gugat M., Leugering G.** L^∞ – norm minimal control of the wave equation: on the weakness of the bang-bang principle // ESAIM: Control Optim. Calc. Var. 2008. Vol. 14. N2. P. 254–283.

30. **Kunisch K., Wachsmuth D.** On time optimal control of the wave equation and its numerical realization as parametric optimization problem // SIAM J. Control Optim. 2013. Vol. 51. N2. P. 1232–1262.

31. **Lohéac J., Zuazua E.** Norm saturating property of time optimal controls for wave-type equations // IFAC-PapersOnLine. 2016. Vol. 49. N8. P. 37–42.

32. **Васильев Ф. П., Иванов Р. П.** О приближённом решении задачи быстродействия в банаховых пространствах при наличии ограничений на фазовые координаты // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1971. Т. 11. №2. С. 328–347.

Публикации автора по теме диссертации

33. **Потапов М. М., Иванов Д. А.** Задачи двустороннего граничного управления для волнового уравнения на докритических промежутках в классах сильных обобщённых решений // Тр. Ин-та матем. и мех. УрО РАН. 2013. Т. 19. №4. С. 192–202.

34. **Иванов Д. А., Потапов М. М.** Непрерывная обратимость оператора граничного управления для волнового уравнения на докритических промежутках в классах слабых обобщённых решений // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. 2014. №4. С. 5–12.

35. **Иванов Д. А., Потапов М. М.** Приближённое решение задачи быстродействия для волнового уравнения с граничными управлениями // Тр. Матем. ин-та РАН. 2015. Т. 291. С. 112–127.

36. **Иванов Д. А.** Повышение регулярности обобщённых решений волнового уравнения для вычисления оптимальных граничных управлений // Вычисл. методы и программирование 2016. Т. 17. №3 С. 299–308.

37. **Иванов Д. А., Потапов М. М.** Приближения к оптимальным по времени граничным управлениям для слабых обобщённых решений волнового уравнения // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2017. Т. 57. №4. С. 605–624.

38. **Потапов М. М., Иванов Д. А.** Задачи граничного управления для волнового уравнения на докритических промежутках // Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Общая топология. Проблемы математического образования: тез. докл. Четвёртой Международ. конф., посвящ. 90-летию со дня рождения Л. Д. Кудрявцева, Москва, 25–29 марта 2013 г. — М.: РУДН, 2013. С. 452–453.

39. **Иванов Д. А., Потапов М. М.** Неравенства обратимости для волнового уравнения на докритических промежутках в классах слабых обобщённых решений // Ломоносовские чтения: тез. докл. науч. конф., Москва, 14–23 апр. 2014 г. — М.: Макс Пресс, 2014. С. 22–23.

40. **Иванов Д. А., Потапов М. М.** Оптимальные по быстродействию граничные управления для волнового уравнения в классе сильных обобщённых решений // Тез. докл. Международн. научного семинара по обратным и некорректно поставленным задачам, Москва, 19–21 ноября 2015 г. — М.: РУДН, 2015. С. 79–80.

41. **Иванов Д. А., Потапов М. М.** Оптимальные по быстродействию граничные управления для волнового уравнения // Устойчивость и колебания нелинейных систем управления: тез. докл. XIII Международн. конф. (конф. Пятницкого), Москва, 1–3 июня 2016 г. — М.: ИПУ РАН, 2016. С. 166–168.

42. **Иванов Д. А.** Задача быстродействия для волнового уравнения с граничными управлениями // Динамические системы: обратные задачи, устойчивость и процессы управления: тез. докл. Международн. конф., посвящ. 80-летию со дня рождения Ю. С. Осипова, Москва, 22–23 сентября 2016 г. — М.: МИ РАН, 2016. С. 53–55.

Отпечатано с готового оригинал-макета

Подписано в печать 10.04.2017 г.
Формат 60x90 1/16. Усл.печ.л. 1,0. Тираж 100 экз. Заказ 083.
Издательство ООО "МАКС Пресс"
Лицензия ИД N 00510 от 01.12.99 г.
119992, ГСП-2, Москва, Ленинские горы, МГУ имени М.В. Ломоносова,
2-й учебный корпус, 527 к.
Тел. 8 495 939-3890/93. Тел./Факс 8 495 939-3891.