Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Санкт-Петербургское отделение Математического института
имени В. А. Стеклова Российской академии наук

На правах рукописи

МИНАБУТДИНОВ Алексей Рафаилович

Предельные кривые для класса самоподобных адических автоморфизмов

01.01.01 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург – 2017

Работа выполнена на кафедре математического анализа математико-механического факультета ФГБОУ ВПО «Санкт-Петербургский государственный университет»

Научный руководитель: ЛОДКИН Андрей Александрович
кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа ФГБОУ ВПО «Санкт-Петербургский государственный университет»

Официальные оппоненты:

ОСЕЛЕДЕЦ Валерий Иустинович
доктор физико-математических наук, профессор кафедры теории вероятностей ФГБОУ ВПО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова»

НИКИТИН Павел Павлович
кандидат физико-математических наук, ПОМИ РАН, старший научный сотрудник.

Ведущая организация: ФГБОУ ВПО «Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина)»

Защита состоится «15» мая 2017 г. в 15.00 на заседании диссертационного совета Д002.202.01 в ФГБУН ПОМИ РАН по адресу: 191023, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, 27, к. 311.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ФГБУН ПОМИ РАН, http://www.pdmi.ras.ru/

Автореферат разослан «28» марта 2017 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета, д. ф.-м. н. А. Ю. Зайцев

Общая характеристика работы

Актуальность работы.

Основная цель данной работы — исследование уточнений к индивидуальной эргодической теореме Биркгофа для специального класса адических автоморфизмов.

Индивидуальная эргодическая теорема является центральным результатом в эргодической теории. Рассмотрим автоморфизм T, заданный на пространстве X с инвариантной мерой μ. Пусть g – суммируемая функция, $x \in X$, $(f_i)_{i=0}^{\infty}$ – числовая последовательность, элементы которой определены значениями функции g вдоль траектории точки x, $f_i = g(T^i x)$. Тогда для μ-п.в. x существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f_i.$$

Естественной задачей является задача об уточнении к эргодической теореме. Существуют различные подходы к этой задаче. Обычно последовательность (f_i) рассматривают как стационарную (в узком смысле) последовательность случайных величин и для последовательности частичных сумм $S(n) = S_x^g(n) : S(n) = \sum_{i=0}^{n} f_i(x), 1 \le n < +\infty$, исследуют вопрос о существовании нормирующей последовательности коэффициентов r_n, такой, чтобы распределения величин $\frac{S(n)}{r_n}$ слабо сходились бы к некоторому распределению. Частным случаем этого подхода является изучение с точки зрения центральной предельной теоремы регулярных процессов, таких как автоморфизм Бернулли. В общем случае предельное распределение может и не существовать. Тогда иногда рассматривают вопрос о существовании последовательности натуральных чисел n_j и нормирующих коэффициентов r_j, таких, чтобы существовал предел распределений $\frac{S(n_j)}{r_j}$. В настоящей диссертации применяется другой подход.

Анализируя автоморфизм Паскаля, введенный в эргодическую теорию А. М. Вершиком в работе [7] и активно изучавшийся впоследствии многими авторами (см. [8–11] и др.), К. Мела, Т. де ла Рю, Э. Жанврес и И. Веленик нашли замечательную новую сторону этой проблемы. Она заключается в возможности стабилизации поведения специальным образом нормированных конечных последовательностей растущей длины частичных сумм ограниченных функций вдоль индивидуальных (односторонних) траекторий автоморфизма. Такой взгляд на эту проблему позволил на примере автоморфизма Паскаля проиллюстрировать новый подход, который отличается от рассматриваемых ранее тем, что возникающий предельный объект, получивший название *предельной функции*, имеет не стохастическую, а детерминистическую природу.

Предложенный Т. де ла Рю, Э. Жанврес и И. Веленик в работе [12] объект может быть определен, вообще говоря, для произвольной числовой последовательности $(f_i)_{i=0}^{\infty}$. Для этого рассмотрим последовательность ее частичных сумм $S(n)$ и, считая $S(0) = 0$, доопределим ее с помощью линейной интерполяции на нецелые неотрицательные значения аргумента. Доопределенную таким образом непрерывную функцию обозначим через F. Рассмотрим последовательность непрерывных функций $\varphi_n : [0,1] \to [-1,1]$, получаемых следующей перенормировкой функции F:

$$\varphi_n(t) = \frac{F(t \cdot n) - t \cdot F(n)}{R_n},$$

где нормирующие коэффициенты R_n канонически выбраны равными $\max\limits_{t\in[0,1]} |F(t \cdot n) - t \cdot F(n)|$. Поскольку $\varphi_n(0) = \varphi_n(1) = 0$, функцию φ_n естественно назвать *мостом*. Нас интересует множество предельных точек последовательности φ_n в равномерной метрике на $[0,1]$.

Вернемся к последовательности f_i, заданной равенством $f_i = g(T^i x)$ при фиксированной точке x. Соответствующую последовательность мостов будем обозначать через $\varphi^g_{x,n}$.

Определение 1. Если для выбранных функции g и точки $x \in X$ существует такая последовательность $l^g_n(x) \in \mathbb{N}$, что последовательность непрерывных функций $\varphi^g_{x,l^g_n(x)}$ сходится к (непрерывной) функции φ^g_x в равномерной метрике на $[0,1]$, то функцию $\varphi = \varphi^g_x$ называют *предельной функцией*, ее график *предельной кривой*, последовательность «моментов времени»

$l_n = l_n^g(x)$ — *стабилизирующей последовательностью*, а последовательность $R_n = R^g_{x,l_n^g(x)}$ — нормирующей последовательностью. *Непрерывным предельным мостом* автоморфизма (X,T) для функции g в точке x называется четверка $\left(x, (l_n)_{n=1}^{\infty}, (R_n)_{n=1}^{\infty}, \varphi\right)$.

Отметим, что сходимость по Чезаро последовательности $(f_n)_n$ влечет для нормирующего коэффициента R_n соотношение $R_n = o(l_n)$.

Определение 2. Непрерывный предельный мост $\left(x, (l_n)_{n=1}^{\infty}, (R_n)_{n=1}^{\infty}, \varphi\right)$ для функции g в точке x назовем *существенным*, если для любого $\varepsilon > 0$ выполнено соотношение $(l_n)^{1-\varepsilon} = o(R_n)$.

Для некоторых функций g и точек x авторы работы [12] наблюдали сходимость мостов к предельной функции типа знаменитой функции Такаги. Функция Такаги, определенная в [13], является одним из ранних примеров нигде не дифференцируемых функций и строится на основе последовательности аппроксимаций. В работе [12] авторы выдвинули гипотезу, что их результат справедлив для более широкого класса функций, и предложили проверить ряд предположений, основанных на компьютерных экспериментах, для других динамических систем.

В этой работе мы будем предполагать, что динамика задана некоторым *адическим автоморфизмом*. Адические автоморфизмы (см. определение ниже) введены в эргодическую теорию А. М. Вершиком в работе [14], их рассмотрение не является ограничивающим предположением в силу следующей важной теоремы:

Теорема. (А. М. Вершик [7]). *Всякий эргодический автоморфизм, заданный на пространстве Лебега-Рохлина, изоморфен некоторому адическому автоморфизму. Более того, изоморфизм может быть построен таким образом, что всякая счетная плотная инвариантная подалгебра измеримых множеств перейдет в алгебру цилиндрических множеств.*

Пространством, на котором задано адическое преобразование, является (под)множество путей (последовательностей ребер) бесконечного градуированного графа – диаграммы Браттели. На классах кофинитных путей (т.е. путей, лежащих в одном классе хвостового разбиения) можно задать естественный (ко)лексикографический порядок, который определяет адический автоморфизм. Понятие адического преобразования (и связанное с ним символическое представление) является одним из наиболее удобных способов задания динамики (в иностранной литературе адическое преобразование часто называют преобразованием Вершика).

В работах [7, 15–18] началось исследование комбинаторики марковских компактов (множеств путей на диаграммах Браттели). В этой работе мы изучим комбинаторную динамику конечных путей и определяемых ими цилиндров.

Чтобы получить интересные результаты, необходимо ограничиться некоторым классом адических автоморфизмов. Мы опишем диаграммы Браттели специального вида и зададим адический порядок на путях. Рассматриваемые нами диаграммы могут быть заданы производящим полиномом $p(x) = a_0 + a_1x \cdots + a_dx^d$ степени $d \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ с натуральными коэффициентами $a_i, 0 \leq i \leq d$, которые задают число ребер, соединяющих произвольную вершину (n, k) с $(n+1, k+i)$-ой вершиной следующего уровня. Данные диаграммы являются самоподобными, т.е. изоморфны (как упорядоченные градуированные графы, определение дано ниже) диаграммам, получаемым при сдвиге корневой вершины в любую из нижележащих. Множество путей в графе Браттели B обозначим через X_p. На классах кофинитных путей можно задать естественный (ко)лексикографический порядок $\preceq$, который определяет адический автоморфизм T_p. При $p(x) = a_0, a_0 > 1$, получаемый таким образом автоморфизм T_p является реализацией стационарного одометра. При $d = \deg p \geq 1$ получаемые автоморфизмы являются нестационарными, они получили название *полиномиальных адических автоморфизмов* и изучались в работах К. Мела [19] и С. Бейли [20]. Наш подход к определению полиномиальных адических автоморфизмов является менее ограничительным: мы не ограничиваемся рассмотрением единственного «канонического» порядка, рассматривавшегося в работах [19] и [20]. Класс полиномиальных адических автоморфизмов включает в себя (при $p(x) = 1+x$) знаменитый автоморфизм Паскаля $(I, P), I = \{0,1\}^\infty$. Согласно теореме де Финетти, множеством инвариантных эргодических мер автоморфизма является семейство мер Бернулли $\mu_q = \prod\limits_1^\infty (q, 1-q)$. Важно отметить, что попытки исследовать и обобщить свойства автоморфизма Паскаля являлись мотивацией для определения понятия полиномиальных систем. Класс тех самоподобных адических систем, которые рассматриваются в данной работе, включает в себя класс полиномиальных адических автоморфизмов и стационарных одометров.

Сформулируем основные результаты из работы [12].

Теорема. ([12], *теорема* 2.4.) *Пусть* $(I, P, \mu_q), q \in (0,1)$, – *автоморфизм Паскаля, а* g – *цилиндрическая функция. Тогда для* μ_q*-п.в.* x *предельная функция* $\varphi_x^g \in C[0,1]$ *существует тогда и только тогда, когда функция* g *не когомологична константе.*

Также для функций, коррелирующих с простейшими цилиндрическими функциями $r_i(x) = \mathbb{1}_{\{x_i=0\}}$, где $x = (x_j)_{j=1}^\infty \in I$, авторы [12] показали, что почти всюду предельной кривой является обобщенная кривая Такаги $\mathcal{T}_q^1$. (Определенная в работе [13] функция Такаги совпадает с функцией $\frac{1}{2}\mathcal{T}_{1/2}^1$.)

Теорема. ([12], *теорема* 2.5.) *Для цилиндрических функций* g, *удовлетворяющих условию* $\sum_{i=1}^\infty \mathrm{cov}_{\mu_q}(g, r_i) > 0$, *среди предельных функций содержится функция* $\mathcal{T}_q^1$.

Для автоморфизма Паскаля авторы работы [12] поставили задачу изучить предельные кривые для произвольных цилиндрических функций, а также обобщить полученные результаты на более широкий класс автоморфизмов.

Изучение предельных кривых является нетривиальной задачей и представляет интерес в том числе из-за возникновения так называемых *транзитных режимов* – наборов катастроф, которые происходят с (до)предельной функцией при вариации пути x. Некоторые примеры цилиндрических функций g и точек $x \in I$, приводящих к таким режимам, были описаны в работе [12].

Задача расширения класса адических автоморфизмов, для которых микрофлуктуации частичных сумм цилиндрических функций приводят к предельным кривым, является первым шагом на пути создания общей теории данного типа флуктуаций.

Цель диссертационной работы. Основная цель данной диссертации — изучить индивидуальные непрерывные мосты для цилиндрических функций в полиномиальных адических системах.

Научная новизна. Все основные результаты диссертации являются новыми. Теорема 6 обобщает основной результат работы [12].

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Результаты диссертации могут быть применены в эргодической теории, теории булевых функций, комбинаторике и теории чисел.

Методы исследований.

При изучении непрерывных предельных мостов применялись комбинаторные методы, методы гармонического анализа, теория классических ортогональных полиномов, теоретико-вероятностные методы (уточненная локальная предельная теорема В. В. Петрова для исследования асимптотик полиномов Кравчука, теорема Одлыжко и Ричмонда об унимодальности сверток достаточно высокого порядка дискретных распределений) и метод производящих функций для исследования полиномов Кравчука.

Основные положения и результаты, выносимые на защиту:

1. Найдено необходимое условие существования непрерывных предельных мостов.

2. Доказано, что для полиномиальных адических систем данное условие является необходимым и достаточным.

3. Построены примеры предельных кривых для полиномиальных адических автоморфизмов и изучены свойства их самоподобия.

4. Для автоморфизма Паскаля исследована комбинаторика цилиндрических функций и получено выражение частичных сумм через полиномы Кравчука.

5. Исследовано асимптотическое поведение полиномов Кравчука.

6. Доказана гипотеза Т. де ла Рю, Э. Жанврес и И. Веленик о появлении в качестве предельной кривой обобщенной кривой Такаги для цилиндрических функций.

Степень достоверности и апробация результатов. Все результаты, представленные в работе, являются достоверными, математически строго доказанными фактами. Основные результаты неоднократно докладывались на Санкт-Петербургском семинаре по теории представлений и динамическим системам, на международной конференции «Dynamics, Combinatorics, Representations» в Санкт-Петербурге в 2015 году и на конференции «New Advances in Symbolic Dynamics» в Марселе (Люмини) в 2017 году.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в шести печатных работах в рецензируемых журналах [1–6] из Перечня ведущих рецензируемых журналов и изданий ВАК.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, библиографии и приложения. Общий объем диссертации 86 страниц. Библиография включает 39 наименований на 4 страницах.

Содержание работы

Во введении обоснована актуальность диссертационной работы, дано определение основного объекта, изучаемого в диссертации – непрерывного предельного моста (предельной кривой), сформулирована цель исследований, приведено описание структуры работы.

Первая глава диссертации посвящена нахождению необходимых условий существования предельных кривых. В разделе 1.1 введены базовые понятия – диаграмма Браттели, цилиндрическая функция, адический автоморфизм и т. д., а также получено полезное для дальнейшего анализа выражение для частичных сумм, построенных по цилиндрической функции. В разделе 1.2 получено необходимое условие существования непрерывного предельного моста (предельной кривой) для суммируемой функции g, которым является неограниченность роста последовательности нормирующих коэффициентов R_n (теорема 1). Условие ограниченности роста R_n для п.в. x эквивалентно тому, что функция g когомологична константе (теорема 2). Для одометров цилиндрические функции являются когомологичными константе (теорема 3) и, следовательно, не приводят к предельным кривым.

Во второй главе исследуются непрерывные предельные мосты для полиномиальных автоморфизмов. В разделе 2.1 приводится конструкция таких автоморфизмов, структура инвариантных эргодических мер, а также основные свойства этих автоморфизмов.

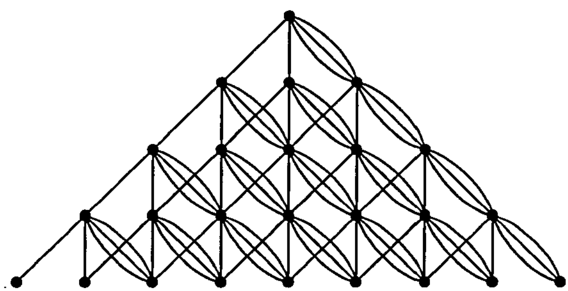

Рис. 1. Диаграмма Брателли, заданная производящим полиномом $1 + x + 3x^2$.

Семейство инвариантных эргодических мер, как и в случае автоморфизма Паскаля, представляет собой однопараметрическое семейство бернуллиевких мер $\mu_q, q \in (0, 1/a_d)$. Важную роль в комбинаторной динамике полиномиальных автоморфизмов играют обобщенные биномиальные коэффициенты – размерности вершин соответствующих диаграмм Браттели. В разделе 2.2 исследуются некоторые свойства обобщенных биномиальных коэффициентов, на основе которых в разделе 2.3 строится явная формула для номера конечного пути в лексикографическом порядке, определяющем данный автоморфизм. В разделе 2.4 вводится в рассмотрение обобщенная r-q-адическая система счисления на интервале $[0, 1]$, для которой мы полагаем $r = p(1)$, $q \in (0, 1/a_d)$. При $r = 2, q = 1/2$ она сводится к стандартному диадическому представлению числа. Самоподобная структура диаграммы Браттели полиномиального автоморфизма обеспечивает сходимость отношений размерностей пар вершин, разности соответствующих координат которых фиксированы, к точкам отрезка, имеющим стационарное (т.е. стабилизирующееся, начиная с некоторого номера) разложение в r-q-адической системе. В разделе 2.6 доказана следующая теорема (теорема 6) существования непрерывных предельных кривых – основной результат данной главы:

Теорема. *Пусть (X, T, μ) – полиномиальная адическая система, а g – цилиндрическая функция. Тогда для μ-п.в. x из последовательности индивидуальных мостов $(\varphi^g_{x,l})_{l\geqslant 1}$ можно выбрать сходящуюся в* sup*-метрике на $[0, 1]$ подпоследовательность функций $(\varphi^g_{x,l_j})_{j\geqslant 1}$, $l_j = l_j(x)$, тогда и только тогда, когда функция g некогомологична константе.*

(Функция g когомологична константе, если найдется такая функция $h \in L^\infty(X, \mu)$, что g представляется в виде $g = h \circ T - h + const.$)

Совместно с теоремой 3 она устанавливает, что условие некогомологичности цилиндрической функции константе является необходимым и достаточным условием существования непрерывного предельного моста в классе самоподобных адических автоморфизмов, задаваемых полиномом p.

В разделе 2.7 исследуются примеры предельных кривых полиномиальных автоморфизмов для «канонического» лексикографического порядка, определенного в работах [19] и [20]. Все построенные примеры предельных кривых можно рассматривать как обобщенные (r-q-адические) кривые Такаги. При этом соответствующие непрерывные предельные мосты оказываются существенными. Также в этой части исследованы свойства самоподобия и непрерывности данных кривых. Результаты этой части позволяют в разделе 2.8 получить аналитические доказательства некоторых предположений, сделанных авторами работы [12] на основе ряда проведенных ими компьютерных экспериментов.

Третья глава диссертации посвящена доказательству гипотезы Т. де ла Рю, Э. Жанврес и И. Веленик о том, что, в случае автоморфизма Паскаля, для всякой (некогомологичной константе) цилиндрической функции g можно построить такую стабилизирующую последовательность l_n, что предельной функцией (с точностью до знака) будет являться обобщенная (диадическая) функция Такаги $\mathcal{T}_q^1, q \in (0,1)$.

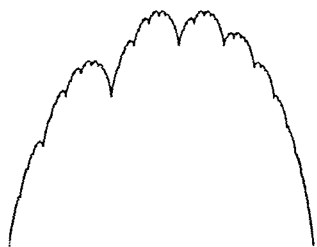

Рис. 2. Графики функции $\mathcal{T}_{1/3}^1$.

Эту задачу можно свести к описанию транзитных режимов (в которых могут возникнуть другие функции) и доказательству того, что множество путей, для которых они возникают, имеет меру ноль. Технически, изучение транзитных режимов требует глубокого анализа асимптотик частичных сумм цилиндрических функций. Частичные суммы могут быть выражены через полиномы Кравчука, а исследование предельных кривых в транзитных режимах можно свести к рассмотрению специальных асимптотик (разностей) полиномов Кравчука. Результатом этого анализа является следующая теорема (теорема 8):

Теорема. *Пусть P – автоморфизм Паскаля, заданный на пространстве с мерой $(I, \mathcal{B}, \mu_q), q \in (0,1)$, $N \in \mathbb{N}$ и $g \in \mathscr{F}_N$ – некогомологичная константе цилиндрическая функция. Тогда для μ_q-п.в. x стабилизирующая последовательность $l_n(x)$ может быть выбрана так, что предельной функцией оказывается обобщенная функция Такаги $\pm\mathcal{T}_q^1$.*

Доказательство теоремы проводится в несколько этапов. На первом этапе, в разделе 3.1, построен ортогональный базис $\{w_t^q\}_{t=0}^{\infty}$ пространства цилиндрических функций. В терминах ряда (суммы) Фурье по этой системе дано полное описание когомологичных константе цилиндрических функций для автоморфизма Паскаля. На втором этапе, в разделе 3.2, найдены формулы для частичных сумм базисных функций $w_t^q, t \geqslant 0$, представляющие собой (с точностью до нормировки) ортогональные полиномы Кравчука. На третьем этапе исследованы асимптотики полиномов Кравчука, на основе которых, в разделе 3.3, проведен анализ транзитных режимов. Показано, что каждому транзитному режиму соответствует корень некоторого полинома Эрмита, а также аналитически описаны предельные кривые, наблюдаемые в транзитный режимах.

Упорядоченные в лексикографическом порядке сечения $\pi_{n,k}$ единичного куба $\{0,1\}^n$ по вершинам с k единицами составляют башни, участвующие в аппроксимации автоморфизма Паскаля. Они являются замечательными комбинаторными объектами и связаны с теоремами Маколея и Крускала-Катоны, линиями уровня функции $\mathrm{s}_2(n)$ (число единиц в двоичном представлении целого неотрицательного числа n), а также теорией булевых функций. В разделе 3.5 устанавливается эта связь и приводятся приложения полученных результатов к некоторым задачам теории булевых функций, комбинаторики и теории чисел.

В заключении кратко изложены основные результаты диссертации.

В приложении приведен список основных обозначений.

Список публикаций

1. Лодкин А. А., Минабутдинов А. Р., Манаев И. Е. Реализация автоморфизма Паскаля в графе конкатенаций и функция $s_2(n)$ // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2012. Т. 403. С. 95–102.

2. Минабутдинов А. Р., Манаев И. Е. Функция Крускала–Катоны, последова-

тельность Конвея, кривая Такаги и автоморфизм Паскаля // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2013. Т. 411. С. 135–147.

3. Минабутдинов А. Р. Случайные отклонения эргодических сумм в автоморфизме Паскаля для меры Лебега // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2015. Т. 432. С. 224–260.

4. Минабутдинов А. Р. Асимптотическое разложение полиномов Кравчука // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2015. Т. 436. С. 174–189.

5. Лодкин А. А., Минабутдинов А. Р. Предельные кривые для автоморфизма Паскаля // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2015. Т. 437. С. 145–183.

6. Минабутдинов А. Р. Теорема существования предельных кривых для полиномиальных адических автоморфизмов // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2016. Т. 448. С. 177–200.

Цитированная литература

7. Вершик, А.М. Теорема о марковской периодической аппроксимации в эргодической теории // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1982. Т. 115. С. 72–82.

8. Mela X., Petersen K. Dynamical properties of the Pascal adic transformation // Ergodic Theory Dynam. Systems. 2003. Vol. 25. P. 227–256.

9. Janvresse É., de la Rue T. The Pascal adic transformation is loosely Bernoulli // Annales de l'Institut Henri Poincaré (B) Probability and Statistics. 2004. Vol. 40, no. 2. P. 133–139.

10. Вершик, А.М. Автоморфизм Паскаля имеет непрерывный спектр // Функц. анализ и его прил. 2011. Т. 45, № 3. С. 16–33.

11. Vershik, A.M. Several remarks on Pascal automorphism and infinite ergodic theory // Armenian Journal of Mathematics. 2015. Т. 7, № 2. С. 85–96.

12. Janvresse É., de la Rue T., Velenik Y. Self-similar corrections to the ergodic theorem for the Pascal-adic transformation // Stoch. Dyn. 2005. Vol. 5, no. 1. P. 1–25.

13. Takagi T. A simple example of the continuous function without derivative // Proc. Phys.-Math. Soc. 1903. Vol. 5–6. P. 176–177.

14. Вершик, А.М. Равномерная алгебраическая аппроксимация операторов сдвига и умножения // ДАН СССР. 1981. Т. 259, № 3. С. 526–529.

15. Lodkin A. A., Vershik A. M. Approximation for actions of amenable groups and transversal automorphisms // Operator Algebras and their Connections with Topology and Ergodic Theory: Proceedings of the OATE Conference held in Buşteni, Romania, Aug. 29 – Sept. 9, 1983. 1985. P. 331–346.

16. Vershik, A. M., Livshits, A. N. Adic models of ergodic transformations, spectral theory, and related topics // Adv. in Soviet Math. AMS Transl. 1992. Vol. 9. P. 185–204.

17. Вершик, А.М. Задача о центральных мерах на пространствах путей градуированных графов // Функц. анализ и его прил. 2014. Vol. 48, no. 4. P. 26–46.

18. Herman R., Putnam I., Skau C. Ordered Bratteli diagrams, dimension groups and topological dynamics // Internat. J. Math. 1992. Vol. 3, no. 6. P. 827–864.

19. Méla X. A class of nonstationary adic transformations // Ann. Inst. H. Poincaré Prob. and Stat. 2006. Vol. 42, no. 1. P. 103–123.

20. Bailey (Frick) S. Dynamical properties of some non-stationary, non-simple Bratteli-Vershik systems // Ph.D. thesis, University of North Carolina, Chapel Hill. 2006.

Подписано в печать 15.03.2017	Формат 60x84 $^{1}/_{16}$	Цифровая печать	Печ.л. 1.0
Тираж 100 экз.	Заказ № 25/03		

Типография «Фалкон Принт»
(197101, г. Санкт-Петербург, ул. Большая Пушкарская, д. 41, литер Б,
сайт: falconprint.ru)