На правах рукописи

Шенмайер Владимир Владимирович

АППРОКСИМИРУЕМОСТЬ ТРУДНОРЕШАЕМЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ КЛАСТЕРИЗАЦИИ И МАРШРУТИЗАЦИИ

01.01.09 — дискретная математика и математическая кибернетика

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук

Новосибирск — 2019

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук.

Официальные оппоненты: **Хачай Михаил Юрьевич**
доктор физико-математических наук,
профессор, Институт математики и
механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН,
зав. отделом

Хамисов Олег Валерьевич
доктор физико-математических наук,
профессор, Институт систем энергетики
им. Л.А. Мелентьева СО РАН, зав. отделом

Картак Вадим Михайлович
доктор физико-математических наук,
профессор, Уфимский государственный
авиационный технический университет,
зав. кафедрой

Ведущая организация: Федеральное государственное
бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
**“Омский государственный
университет им. Ф.М. Достоевского”**

Защита состоится 16 октября 2019 г. в 17 час. 00 мин. на заседании диссертационного совета Д 003.015.01 при Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук по адресу: 630090, г. Новосибирск, пр. Академика Коптюга, 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук и на сайте `math.nsc.ru`.

Автореферат разослан 15 июля 2019 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета
д.ф.-м.н. Ю.В. Шамардин

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Объектом исследования диссертационной работы являются труднорешаемые геометрические задачи дискретной оптимизации. Предмет исследования — комбинаторные задачи, заключающиеся в отыскании математических конструкций (множеств, геометрических фигур, маршрутов и т.д.), которые содержат заданные точки в конечномерном вещественном нормированном пространстве и обладают экстремальными свойствами, связанными с пространственной протяжённостью получаемых решений.

Большинство рассматриваемых задач можно отнести к задачам кластеризации. Среди них — задача о подмножестве векторов с минимальным суммарным квадратичным отклонением от среднего, квадратичная задача кластеризации с фиксированным центром одного из кластеров, задача о минимальном шаре, охватывающем заданное число точек, задача о подмножестве векторов с суммой максимальной длины, а также инкрементная и иерархическая задачи о медиане в евклидовом пространстве. Кроме того, в диссертации рассматриваются геометрические версии известных задач маршрутизации: задачи коммивояжёра на максимум, максимизационной задачи о нескольких бродячих торговцах и задачи о цикловом покрытии максимального веса с компонентными ограничениями. Цель диссертации — исследование вопросов алгоритмической аппроксимируемости указанных и сходных по постановке задач, развитие и обоснование результативных методов и техник, обеспечивающих их решение.

Геометрические задачи кластеризации и маршрутизации имеют широкий круг приложений в различных областях человеческой деятельности. Это можно объяснить тем, что многие обстоятельства и требования, возникающие в реальности, достаточно хорошо описываются в терминах многомерных векторов (точек векторного пространства), векторных норм, операций с векторами, подмножеств конечных множеств векторов, а также маршрутов, связывающих эти векторы. Поэтому изучение проблем и возможностей, возникающих в идеализированных геометрических моделях, даёт качественную оценку того, что следует ожидать на практике, а разработанные для этих моделей алгоритмы помогают находить разумные, математически аргументированные решения сложных жизненных задач.

Даже если постановка оптимизационной задачи не обязывает интерпретировать её входные данные как геометрические объекты, такая интерпретация может существенно упростить решение задачи, поскольку она позволяет опираться на дополнительную геометрическую информацию и геометрические факты. С учётом того, что большинство интересных комбинаторных задач, включая все рассматриваемые задачи, NP-трудны и многие из них плохо аппроксимируемы, выбор геометрических моделей для этих задач можно считать разумным компромиссом между общностью задачи и точностью её решения за приемлемое время. Неслучайно непременным элементом списка теоретических результатов для всех важнейших задач комбинаторной оптимизации являются анализ сложности и алгоритмы решения этих задач в геометрических частных случаях.

Многие оптимизационные задачи в геометрических пространствах сводятся к поиску наилучшего подмножества заданного конечного множества точек, исходя из некоторого критерия качества решений. По сути, речь идёт о разновидности задач кластеризации, в которых количество кластеров равно двум. В диссертации исследуются несколько задач подобного типа с критериями, описывающими геометрическую близость выбранных векторов. Исследованию алгоритмических свойств этих задач посвятили свои работы J. Matoušek, M. Sharir, P.K. Agarwal, S. Har-Peled, D. Eppstein, А.В. Кельманов, А.В. Пяткин, Э.Х. Гимади и др. Чаще всего основной целью исследователей является случай, когда заданные векторы принадлежат пространству малой фиксированной размерности, например, евклидовой плоскости. Приоритетом и особенностью диссертации является построение алгоритмов, не подверженных “проклятию размерности”, т.е. эффективных в случае, когда размерность пространства является неограниченной величиной, заданной на входе задачи. В этом случае векторы входного множества можно интерпретировать как наборы характеристик сложных объектов — измерения технических приборов, экономические показатели предприятий, фондовые индексы, результаты социального анкетирования и т.д. Мотивацией для данного направления исследований служит тот факт, что одной из насущных задач века информационных технологий является анализ и структурирование больших данных (big data), охватывающих не только большое количество описываемых объектов, но и значительное множество их свойств, доступных для учёта.

Не менее актуальной задачей кластеризации является рассматриваемая в диссертации задача о k-медиане, которую можно воспринимать как задачу о наилучшем разбиении множества клиентов на k кластеров с центрами из заданного множества точек (предприятий). В конце XX века R. Mettu и G. Plaxton предложили инкрементный подход к изучению этой задачи, описывающий модель растущей экономики. Он подразумевает, что открытие предприятий для обслуживания множества клиентов является не разовой акцией, а продолжительным процессом, на каждом шаге которого требуется, чтобы открытые к этому времени предприятия образовывали качественное решение задачи о медиане соответствующей мощности. Значимый вклад в исследование инкрементной задачи о медиане внесли M. Chrobak, D.P. Williamson, C. Kenyon, N.E. Young и др. В диссертации исследуется ранее не изученный геометрический случай этой задачи, в котором предприятия и клиенты расположены в точках евклидова пространства.

Если задачи кластеризации состоят в отыскании оптимального разбиения заданного множества точек на несколько кластеров, то в задачах маршрутизации преследуется в некотором смысле противоположная цель: связать заданные точки одним либо несколькими оптимальными маршрутами. Возможно, самой известной такой задачей является задача коммивояжёра, которая заключается в отыскании в полном рёберно взвешенном графе гамильтонова цикла минимальной длины. В 80-е годы XX века после работ отечественных математиков А.И. Сердюкова и А.В. Косточки началось интенсивное изучение максимизационной версии этой задачи (Max TSP). К разработке эффективных алгоритмов её решения подключились A. Barvinok, G.J. Woeginger, D.S. Johnson, S.P. Fekete, B. Manthey, M. Bläser, L. Kowalik, M. Mucha, М.И. Свириденко и др. В диссертации исследуется геометрическая постановка задачи, в которой вершины графа являются точками многомерного вещественного пространства, а веса рёбер индуцированы произвольной заданной нормой.

Естественными обобщениями задачи Max TSP являются максимизационные задачи о нескольких рёберно непересекающихся гамильтоновых циклах (“бродячих торговцах”) и цикловом покрытии графа с ограничениями на число и длину циклов. Весомые результаты об алгоритмических свойствах этих и других близких задач маршрутизации получены А.А. Агеевым, А.Е. Бабуриным, А.Н. Глебовым, Д.Ж. Замбалаевой, Э.Х. Гимади, М.Ю. Хачаем и др. В диссертации изучен ранее не исследованный геометрический случай, в котором веса рёбер графа индуцированы полиэдральной метрикой.

Общей привлекательной чертой перечисленных задач является простота и наглядность их формулировок. В то же время все они относятся к числу труднорешаемых и имеют ряд интригующих открытых вопросов, связанных с их теоретической сложностью и аппроксимируемостью. Так, до появления результатов диссертации открытым был вопрос о точности эффективной аппроксимации каждой из рассматриваемых задач выбора подмножества векторов в случае нефиксированной размерности пространства. Остаётся открытым вопрос о разрешимости некоторых из этих задач за линейное или почти линейное время в случае, когда заданные точки лежат на плоскости. Точность алгоритмов приближённого решения инкрементной задачи о медиане отличается от установленных для неё порогов неприближаемости в несколько раз даже в простейшем одномерном случае. До сих пор неизвестно, существует ли полиномиальный алгоритм решения двумерной евклидовой задачи Max TSP.

Таким образом, рассматриваемые в диссертации задачи представляют интерес не только с практической, но и теоретической точки зрения. Изучение их алгоритмических свойств является востребованным и перспективным направлением исследований, способствующим заполнению белых пятен в знаниях об этих задачах, а также появлению новых идей, полезных для решения и анализа других геометрических оптимизационных задач.

Цель работы — развитие математического аппарата, направленного на решение рассматриваемых задач, включая:

а) разработку полиномиальных приближённых алгоритмов с гарантированными оценками точности;

б) установление либо уточнение сложностного статуса исследуемых задач, получение теоретических порогов точности их аппроксимации в классе полиномиальных алгоритмов;

в) выявление частных случаев, в которых эти задачи могут быть решены либо аппроксимированы эффективно;

г) построение алгоритмов их точного либо приближённого решения, менее трудоёмких по сравнению с существующими алгоритмами.

Методы исследования. Обоснование всех представленных алгоритмов проводится путём доказательства гарантированных (априорных) оценок их точности и трудоёмкости. Для этого используются базовые факты из аналитической и вычислительной геометрии, математического анализа, линейной алгебры, теории вероятностей, теории графов, а также известные результаты для выпуклого и полуопределённого программирования. Результаты о сложности рассматриваемых задач получены с использованием стандартных приёмов теории сложности, таких как полиномиальная сводимость и сводимость, сохраняющая аппроксимации.

Основные результаты. (Для каждого результата приведены ссылки на журнальные статьи автора.)

1. Разработан метод приближённого решения задач отыскания подмножеств векторов в пространстве нефиксированной размерности, основанный на аппроксимации центров искомых подмножеств точками аффинных оболочек наборов входных векторов. В результате получены полиномиальные приближённые схемы (PTAS) для задачи о подмножестве векторов с минимальным суммарным квадратичным отклонением от среднего [A6] и квадратичной задачи кластеризации с фиксированным центром одного из кластеров [A1].

2. Установлена сложность задачи о минимальном шаре, охватывающем заданное число точек, в пространствах нефиксированной размерности: показано, что в случае евклидова пространства эта задача NP-трудна в сильном смысле и при условии P$\neq$NP не аппроксимируема с помощью полностью полиномиальных приближённых схем (FPTAS) [A7, A8]; доказано, что если P$\neq$NP, то наилучшие возможные полиномиальные алгоритмы для задачи с нормой ℓ_∞ и общей метрической задачи имеют точность 2 [A15].

3. Решён вопрос о сложности аппроксимации задачи о подмножестве векторов с суммой максимальной длины в пространствах нефиксированной размерности: установлено, что в случае евклидова пространства эта задача может быть аппроксимирована за полиномиальное время с точностью $\sqrt{2/\pi}$ и при условии P$\neq$NP не существует полиномиальных алгоритмов с лучшей точностью; показано, что если P$\neq$NP, то задача с нормой ℓ_p, $p \in [1, \infty)$, полиномиально аппроксимируема с константной точностью тогда и только тогда, когда $p \leq 2$; для каждой из норм ℓ_p получены нижние и верхние оценки точности аппроксимации исследуемой задачи в классе полиномиальных алгоритмов [A13, A17].

4. Разработаны точные алгоритмы с меньшей в сравнении с известными алгоритмами трудоёмкостью, полиномиальной при фиксированной размерности пространства, для задачи о подмножестве векторов с суммой максимальной длины в произвольном нормированном пространстве, модификации этой задачи с ограничением на мощность искомого подмножества и квадратичной задачи кластеризации с фиксированным центром одного из кластеров [A17, A10, A9].

5. Предложены приближённые алгоритмы с лучшими в сравнении с известными алгоритмами оценками точности для инкрементной и иерархической задач о медиане в евклидовом пространстве [A16, A4]. Отдельно исследован случай, в котором предприятия и клиенты расположены в точках вещественной прямой [A3, A4].

6. Построен полиномиальный алгоритм приближённого решения геометрической задачи коммивояжёра на максимум в произвольном нормированном пространстве, асимптотически точный при любой фиксированной размерности пространства [A5, A14].

Научная новизна. Оригинальность и научная новизна перечисленных результатов состоит в следующем (по каждому результату).

1. Построенные алгоритмы приближённого решения рассматриваемых квадратичных задач кластеризации являются первыми приближёнными схемами PTAS для этих задач при нефиксированной размерности пространства. Полученные результаты дополняют известные факты о том, что при условии P≠NP эти задачи не аппроксимируемы с помощью приближённых схем FPTAS.

2. До появления результатов диссертации сложность задачи о минимальном шаре, охватывающем заданное число точек, в пространствах нефиксированной размерности с нормами ℓ_2 и ℓ_∞ была неизвестна. Полученные результаты дополняют известный факт о том, что в случае евклидовой нормы эта задача аппроксимируема с помощью приближённой схемы PTAS.

3. До появления результатов диссертации вопрос об эффективной аппроксимируемости задачи о подмножестве векторов с суммой максимальной длины в пространствах нефиксированной размерности был открыт. Исследован не только случай евклидовых пространств, но и малоизученный случай пространств с произвольной нормой ℓ_p.

4. Построенные алгоритмы решения рассматриваемых задач о суммировании векторов превосходят известные точные алгоритмы в быстродействии. Для сокращения времени решения задачи с ограничением на мощность искомого подмножества предложена оригинальная идея сведéния этой задачи к задаче построения евклидовых диаграмм Вороного высших порядков.

5. Алгоритмические свойства инкрементной и иерархической задач о медиане в геометрических постановках исследованы впервые. Для обоснования точности предложенных алгоритмов разработана оригинальная техника последовательного упрощения геометрических входных данных задачи для получения аналитически разрешимых наихудших случаев.

6. Предложенный алгоритм для геометрической задачи коммивояжёра на максимум является первым эффективным алгоритмом, который позволяет получать приближённые решения этой задачи с любой выбранной точностью в случае произвольной нормы, заданной на вхо-

де задачи. Данный алгоритм обобщает и развивает идеи известного асимптотически точного алгоритма для евклидовой задачи Max TSP.

На защиту выносится совокупность результатов по исследованию вопросов аппроксимируемости труднорешаемых геометрических задач кластеризации и маршрутизации, включая оригинальные эффективные алгоритмы с теоретическими гарантиями качества и установленные пределы точности аппроксимации этих задач.

Теоретическая и практическая ценность. Полученные результаты дают ответ на ряд открытых вопросов об алгоритмических свойствах рассматриваемых задач. Вместе с тем большинство этих задач имеют убедительные содержательные интерпретации, позволяющие говорить о практической значимости построенных алгоритмов.

Апробация работы. Все разделы диссертации прошли апробацию на следующих всероссийских и международных конференциях: «Проблемы оптимизации и экономические приложения», Омск, 2006, 2012, 2015; «Дискретная оптимизация и исследование операций», Владивосток, 2007, Алтай, 2010, Новосибирск, 2013; Optimal Discrete Structures and Algorithms (ODSA), Росток, Германия, 2010; «Математическое программирование и приложения», Екатеринбург, 2011; «Методы оптимизации и их приложения», Байкал, 2011, 2017; «Математические методы распознавания образов», Петрозаводск, 2011; «Интеллектуализация обработки информации», Будва, Черногория, 2012; European Chapter on Combinatorial Optimization (ECCO), Париж, 2013; «Дискретные модели и методы принятия решений», Новосибирск, 2013; European Conference on Combinatorics, Graph Theory and Applications (EuroComb), Пиза, Италия, 2013; «Вычислительная и прикладная математика», Новосибирск, 2017; «Analysis of Images, Social Networks, and Texts» (AIST), Москва, 2017; Computing and Combinatorics Conference (COCOON), Гонконг, Китай, 2017; Workshop on Approximation and Online Algorithms (WAOA), Вена, 2017.

Результаты диссертации докладывались на семинарах «Дискретные экстремальные задачи», «Математические модели принятия решений», «Дискретный анализ» и общеинститутском математическом семинаре Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН.

Публикации. По теме диссертации автором опубликовано 39 работ, среди которых 21 статья в изданиях, входящих в список ВАК либо включённых в базы данных Scopus и Web of Science, в том числе 17 журнальных статей.

Личный вклад автора. Диссертация представляет собой единый цикл многолетних исследований автора, объединённых не только предметом, но и методами исследований. В немногочисленных совместных работах соискателю принадлежат либо основные идеи новых алгоритмов, либо способы усовершенствования алгоритмов, разработанных соавторами. Конфликт интересов с соавторами отсутствует.

Структура и объём диссертации. Работа состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы (131 наименование, включая 21 статью автора по теме диссертации). Текст диссертации изложен на 264 страницах и содержит 19 рисунков.

Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность темы диссертации, перечисляются основные результаты и раскрывается их новизна.

В **первой главе** изложены базовые све́дения по основам вычислений, на которые опираются представленные результаты.

В разделе 1.1 приводится описание основной модели вычислений, используемой в диссертации. Такой моделью является *вещественнозначная машина с произвольным доступом к памяти* (real RAM-машина) — стандартная модель вычислений для задач вычислительной геометрии [33]. Real RAM-машина представляет из себя абстрактное вычислительное устройство с бесконечной памятью, ячейки которой могут содержать любые вещественные числа. Элементарными операциями в этой модели являются арифметические операции над вещественными числами, сравнение чисел, обращение к ячейке с любым целочисленным адресом и, при необходимости, основные аналитические функции над вещественными числами.

Предложенные в диссертации алгоритмы состоят из инструкций, использующих операции указанного вида. Точность произвольного алгоритма определяется как наихудшее отношение значений целевой функции на решениях, возвращаемых алгоритмом, к её значениям на оптимальных решениях задачи. Трудоёмкостью алгоритма называется верхняя оценка числа элементарных операций, выполняемых им в процессе работы, выраженная через длину входа задачи. В свою очередь, длина входа задачи зависит от выбранной кодировки и равна количеству ячеек памяти, необходимых для записи входных данных в используемой вычислительной модели. В случае модели real RAM длина входа равна количеству содержащихся в нём вещественных чисел. Например, длина входа, состоящего из n точек в d-мерном пространстве, равна величине dn.

Отметим, что real RAM-машины являются существенно более мощными вычислительными устройствами, чем машины Тьюринга. В частности, они позволяют проводить точные вычисления над любыми вещественными числами, включая операции с иррациональными числами, часто возникающими при геометрических построениях. В то же время все полученные в диссертации отрицательные алгоритмические результаты, устанавливающие несуществование алгоритмов с теми или иными свойствами, относятся не к real RAM-машинам, а к машинам Тьюринга. Возникает вопрос: следует ли из существования алгоритмов для модели real RAM существование машин Тьюринга с близкими оценками точности и трудоёмкости?

Ответ на этот вопрос даётся в разделе 1.2. Как показали в 1973 году S.A. Cook и R.A. Reckhow, машины Тьюринга полиномиально эквивалентны обычным целочисленным RAM-машинам [22]. С другой стороны, все представленные в диссертации алгоритмы могут быть легко транслированы в целочисленные RAM-машины путём замены точных вещественнозначных операций округлёнными операциями над рациональными числами. Время работы получаемых RAM-машин и, следовательно, эквивалентных им машин Тьюринга ограничено полиномом от трудоёмкости исходных алгоритмов в модели real RAM и длины записи L используемых рациональных чисел. При этом для каждого из предложенных приближённых алгоритмов можно показать, что при достаточно большом значении L потери точности, связанные с округлением, незначительны по сравнению с доказанными оценками и полиномиально уменьшаются с ростом L. Тем самым полученные алгоритмические результаты для модели real RAM можно интерпретировать как аналогичные результаты для машин Тьюринга с выбираемой, сколь угодно малой потерей точности.

Следует отметить, что при округлении вычислений многие алгоритмы точного решения геометрических оптимизационных задач перестают быть точными алгоритмами. Однако все представленные в диссертации точные алгоритмы либо могут быть транслированы в машины Тьюринга без потери их точности, либо доказывают возможность решения рассматриваемых задач за меньшее время по сравнению с известными алгоритмами в модели real RAM.

Завершает первую главу обсуждение понятия “фиксированная/нефиксированная размерность пространства”, встречающегося при описании вычислительной сложности геометрических оптимизационных задач. Фиксированность размерности пространства означает, что речь идёт о частном случае исходной задачи, в котором размерность d векторов входного множества равна некоторой константе. Данное условие имеет важное значение для анализа сложности геометрических задач, поскольку алгоритмы, трудоёмкость которых равна $O(\ell^{m(d)})$, где ℓ — длина входа задачи и $m(.)$ — любая функция, в случае фиксированного d считаются полиномиальными. При этом те же самые алгоритмы при нефиксированной размерности пространства имеют статус экспоненциальных.

Во **второй главе** рассматриваются задачи отыскания подмножеств векторов заданной мощности, на которых достигается минимум функций, описывающих расстояния от элементов этих подмножеств до их центров (пп. 1–2 основных результатов).

Одной из таких задач является задача о подмножестве с минимальным суммарным квадратичным отклонением от среднего.

Задача k-Variance. *Дано*: n-элементное множество[1] X в пространстве $\mathbb{R}^d$ и целое число $k \geq 1$. *Найти*: k-элементное подмножество $S \subseteq X$, на котором достигается минимум функции

$$\sum_{x \in S} \|x - c(S)\|_2^2,$$

где $c(S) = \frac{1}{k} \sum_{x \in S} x$ — центроид множества S и $\|.\|_2$ — евклидова норма.

Известно, что решение задачи k-Variance может быть найдено за время $O(dn^{d+1})$ с использованием диаграмм Вороного высших порядков [16]. Тем самым эта задача полиномиально разрешима при фиксированном d. Если размерность пространства не является константой, исследуемая задача NP-трудна в сильном смысле [8]. Отсюда легко следует, что при условии P≠NP она не аппроксимируема с помощью приближённых схем FPTAS. Однако, по крайней мере, 2-приближённое решение задачи может быть получено за полиномиальное время в случае произвольной размерности пространства [9].

В разделе 2.1 предложен алгоритм, реализующий первую приближённую схему PTAS для задачи k-Variance в пространстве нефиксированной размерности.

---

[1] В постановках всех исследуемых в диссертации задач множество входных векторов можно считать мультимножеством: полученные результаты легко распространяются на случай, когда среди входных векторов имеются повторяющиеся.

Теорема 2.1. *Существует алгоритм, позволяющий получать приближённые решения задачи k-Variance с любой относительной погрешностью $\varepsilon \in (0,1]$ за время $O(n^{\lceil 2/\varepsilon \rceil+1}(9/\varepsilon)^{3/\varepsilon}d)$.*

Геометрической основой алгоритма является установленный в диссертации факт о существовании в аффинной оболочке одного из t-элементных наборов входных векторов, $t = 1, 2, \ldots$, такой точки y_t, что при замене центроида оптимального решения S^* на точку y_t значение целевой функции возрастёт не более чем в $1 + 1/t$ раз. При этом k ближайших к этой точке векторов входного множества образуют подмножество, хорошо аппроксимирующее само множество S^*. Суть алгоритма заключается в аппроксимации точки y_t узлами сеток в аффинных оболочках всех t-элементных наборов входных векторов.

Метод “аффинных оболочек”, лежащий в основе предложенного алгоритма, представляется универсальным подходом для приближённого решения задач отыскания подмножеств векторов, подобных задаче k-Variance. Одной из таких задач является квадратичная задача кластеризации с фиксированным центром одного из кластеров.

Задача FC2-Means (Fixed Center 2-Means). *Дано*: n-элементное множество X в пространстве $\mathbb{R}^d$ и целое число $k \geq 1$. *Найти*: k-элементное подмножество $S \subseteq X$, на котором достигается минимум функции

$$\sum_{x \in S} \|x - c(S)\|_2^2 + \sum_{x \in X \setminus S} \|x\|_2^2.$$

Впервые данная задача была исследована в работах А.В. Кельманова, А.В. Пяткина и А.В. Долгушева [7, 6], в которых установлены её базовые алгоритмические свойства, по сути, идентичные свойствам задачи k-Variance. А.А. Агеев предложил идею свед́ения задачи k-Means с фиксированным центром одного из кластеров к обычной задаче k-Means [15], что позволяет получать приближённые решения задачи FC2-Means, используя приближённые алгоритмы для версии задачи 2-Means с заданной мощностью искомых подмножеств.

В разделе 2.2 представлен алгоритм, реализующий первую приближённую схему PTAS для задачи FC2-Means в пространстве нефиксированной размерности. Алгоритм основан на методе аффинных оболочек и имеет такие же оценки точности и трудоёмкости, что и полученный выше приближённый алгоритм для задачи k-Variance.

Отметим, что в третьей главе диссертации предложены алгоритмы точного решения задачи FC2-Means с меньшей в сравнении с известными алгоритмами трудоёмкостью, полиномиальной в случае фиксированного d (теорема 3.7).

Обобщением обеих задач k-Variance и FC2-Means является задача минимизации взвешенной суммы

$$w_1 \sum_{x \in S} \|x - c(S)\|_2^2 + w_2 \sum_{x \in X \setminus S} \|x\|_2^2,$$

где w_1, w_2 — заданные неотрицательные вещественные числа, по всем k-элементным подмножествам $S \subseteq X$. Одним из возможных подходов к её решению является метод аффинных оболочек, реализующий приближённую схему PTAS. В диссертации предложен другой подход, более эффективный при относительно небольшой размерности пространства. Он основан на аппроксимации центроида искомого множества узлами d-мерных сеток с центрами в точках множества X. Полученный алгоритм позволяет находить $(1+\varepsilon)$-приближённое решение задачи за время $O(\sqrt{d}(\pi e)^{d/2}(1/\sqrt{\varepsilon}+\sqrt{2})^d n^2)$. В частности, если размерность пространства ограничена медленно растущей величиной $\alpha \log n$, где α — положительная константа, то алгоритм реализует приближённую схему PTAS с трудоёмкостью $O(n^{\alpha(1.55+\log(1/\sqrt{\varepsilon}+\sqrt{2}))+2} \log n)$.

В следующем разделе рассматривается задача отыскания k-элементного подмножества векторов с минимальным радиусом охватывающего шара (чебышевским радиусом). Поскольку интерес представляет не только подмножество, охватываемое минимальным шаром, но и сам этот шар, данную задачу удобно формулировать в виде задачи отыскания минимального шара, охватывающего подмножество заданной мощности.

Определение. Пусть $\mathcal{M}$ — произвольное метрическое пространство с функцией расстояния $dist$. *Шаром* радиуса r с центром в точке x в пространстве $\mathcal{M}$ называется множество точек $y \in \mathcal{M}$ таких, что $dist(x, y) \leq r$.

Задача Sk-EB (Smallest k-Enclosing Ball). *Дано*: n-элементное множество X в метрическом пространстве $\mathcal{M}$ и целое число $k \geq 1$. *Найти*: шар минимального радиуса в этом пространстве, содержащий не менее k точек из X.

В наиболее изученных случаях заданным метрическим пространством является пространство $\mathbb{R}^d$ с функцией расстояния, индуцированной евклидовой нормой ℓ_2 либо нормой ℓ_∞. При этом евклидова задача Sk-EB нетривиальна даже в случае, когда требуется охватить все заданные точки. Соответствующая задача изучается с середины XIX века и называется задачей Smallest Enclosing Ball. Наилучший известный алгоритм её решения основан на методе LP-Type Programming и имеет трудоёмкость $O(d^2n + e^{O(\sqrt{d\ln d})})$ [30].

В случае произвольного $k \leq n$ решение задачи Sk-EB осложняется наличием экспоненциального числа вариантов охватываемого подмножества. Тем не менее в пространствах фиксированной размерности с нормами ℓ_2 и ℓ_∞ эта задача разрешима за полиномиальное время $O(k^{d-1}n\log^2 k + kn\log n)$ и $O(k^{d/2-1}n\log^2 k + kn\log n)$ соответственно [24]. Кроме того, для евклидовой задачи существует приближённая схема PTAS с трудоёмкостью $O(dn^{\lceil 1/\varepsilon\rceil})$, эффективная в случае нефиксированного d [14]. Однако сложностной статус задачи Sk-EB в случае обеих норм ℓ_2 и ℓ_∞, а также существование приближённых схем PTAS для задачи с метрикой ℓ_∞ ранее были открытыми вопросами.

В диссертации доказаны следующие теоремы.

Теорема 2.4. *Задача Sk-EB в евклидовом пространстве NP-трудна в сильном смысле и при условии P≠NP не может быть аппроксимирована с помощью приближённых схем FPTAS.*

Теорема 2.5. *Если P≠NP, то при любом $\varepsilon > 0$ задача Sk-EB в пространстве с нормой ℓ_∞ не может быть решена за полиномиальное время с точностью $2 - \varepsilon$.*

Теорема 2.6. *Существует алгоритм приближённого решения задачи Sk-EB в произвольном метрическом пространстве с точностью 2 и трудоёмкостью $O(n^2)$.*

Таким образом, дан ответ на вопрос о сложности задачи Sk-EB в рассматриваемых пространствах. В частности, найдена предельная точность аппроксимации задачи в пространстве с нормой ℓ_∞ и в метрическом случае. Утверждения теоремы 2.4 справедливы, даже если векторы входного множества имеют булевы координаты. Утверждение теоремы 2.5 справедливо, даже если $X \subseteq \{0,1,2\}^d$. Обе эти теоремы доказываются путём свед́ения к задаче Sk-EB задачи о клике. Теорема 2.6 верна в случае любой функции расстояния, удовлетворяющей аксиоме симметрии и неравенству треугольника. Предложенный 2-приближённый алгоритм основан на аппроксимации центра искомого шара точками входного множества.

Также в разделе 2.3 показано, что если размерность пространства ограничена медленно растущей величиной $\alpha\log n$, где α — положительная константа, то задача Sk-EB с метрикой ℓ_∞ полиномиально аппроксимируема с любой выбранной точностью. Для этого случая предложена приближённая схема PTAS с трудоёмкостью $O(n^{\alpha \log(\lceil 2/\varepsilon \rceil+1)+2} \log n)$, основанная на аппроксимации центра минимального охватывающего шара (чебышевского центра искомого подмножества) узлами d-мерных сеток с центрами в точках множества X. Аналогичный результат может быть получен для евклидовой задачи с использованием свойств сеточной аппроксимации многомерного евклидова шара, установленных в разделе 2.2.

В **третьей главе** изложены результаты исследования задачи отыскания подмножества векторов с суммой максимальной длины (пп. 3–4 основных результатов).

Задача LVS (Longest Vector Sum). *Дано*: n-элементное множество X в нормированном пространстве $(\mathbb{R}^d, \|.\|)$. *Найти*: подмножество $S \subseteq X$, на котором достигается максимум функции

$$\|\sum_{x \in S} x\|.$$

Модификацией этой задачи является задача **Lk-VS** (Longest k-Vector Sum), в которой для заданного целого числа $k \geq 1$ требуется найти k-элементное подмножество $S \subseteq X$ с суммой максимальной длины.

Задачи LVS и Lk-VS являются частными случаями задачи Shaped Partition, которая заключается в отыскании разбиения входного множества векторов на q подмножеств с максимальным значением произвольной заданной выпуклой функции от суммарных векторов этих подмножеств. Из известных результатов для этой задачи [26, 32] следует, что задачи LVS и Lk-VS в произвольном нормированном пространстве фиксированной размерности разрешимы за полиномиальное время $O(n^d)$ и $O(n^{4d})$ соответственно.

Как показал А.В. Пяткин [10, 3], в случае евклидовой нормы обе исследуемые задачи NP-трудны в сильном смысле, если размерность пространства не является константой. В [25] предложен рандомизированный алгоритм, позволяющий находить $(1-\varepsilon)$-приближённое решение евклидовых задач LVS и Lk-VS за время $O(d^{3/2}(2\varepsilon - \varepsilon^2)^{-(d-1)/2}\, n)$ для любого $\varepsilon \in (0, 1)$. В случае пространства с нормой ℓ_∞ обе задачи решаются за время $O(dn)$ с помощью подхода, описанного в [4].

Отметим, что трудоёмкость всех известных алгоритмов для задач LVS и Lk-VS в пространствах с произвольной либо евклидовой нормой экспоненциально зависит от размерности пространства. В связи с этим актуален вопрос об аппроксимируемости рассматриваемых задач за полиномиальное время. Свет на этот вопрос проливают результаты раздела 3.1, которые получены для задачи LVS и могут быть сформулированы в виде следующих двух теорем.

Теорема 3.1. *Если P≠NP, то справедливы утверждения:*
(*a*) *для любых* $p \in [1,2]$ *и* $\varepsilon > 0$ *задача LVS с нормой* ℓ_p *не может быть решена за полиномиальное время с точностью* $\alpha_p + \varepsilon$, *где*

$$\alpha_p = \begin{cases} \sqrt{2/\pi} \approx 0.798, & \text{если } p = 2, \\ 2/\pi \approx 0.637, & \text{если } p = 1, \\ (16/17)^{1/p}, & \text{если } p \in (1,2); \end{cases}$$

(*b*) *для любого* $p \in (2,\infty)$ *задача LVS с нормой* ℓ_p *не аппроксимируема за полиномиальное время с какой-либо константной точностью.*

Теорема 3.2. *Для любого* $p \in [1,\infty)$ *задача LVS с нормой* ℓ_p *может быть решена за полиномиальное время с точностью*

$$\beta_p = \begin{cases} \sqrt{2/\pi} \approx 0.798, & \text{если } p = 2, \\ 2\ln(1+\sqrt{2})/\pi \approx 0.561, & \text{если } p = 1, \\ 2\sqrt{3}/\pi - 2/3 \approx 0.436, & \text{если } p \in (1,2), \\ \max\{\sqrt{2/\pi}\, d^{1/p-1/2},\, d^{-1/p}\}, & \text{если } p \in (2,\infty). \end{cases}$$

Тем самым показано, что при нефиксированной размерности пространства задача LVS с нормой ℓ_p, $p \in [1,\infty)$, аппроксимируема с константной точностью тогда и только тогда, когда $p \le 2$. Для евклидовой задачи найден точный предел аппроксимации, равный $\sqrt{2/\pi}$.

Большинство утверждений теорем 3.1 и 3.2 доказаны путём построения полиномиальных сведéний, сохраняющих точность приближённых решений, между задачей LVS и задачей вычисления матричной нормы, индуцированной заданной векторной нормой $\|.\|$ и нормой ℓ_∞. Пороги неприближаемости для случаев $p \in \{1,2\}$ получены с использованием известных результатов о сложности двух частных случаев задачи о матричной норме, которые называются задачей Гротендика и малой задачей Гротендика. Порог неприближаемости $(16/17)^{1/p} + \varepsilon$ получен путём сведéния к задаче LVS задачи о максимальном разрезе графа. Этот результат справедлив для любого $p \in [1,\infty)$, даже если $X \subseteq \{0,1,-1\}^d$. Отсюда и из теоремы 3.2 следует APX-полнота целочисленной задачи LVS в пространстве с нормой ℓ_p при $p \in [1,2]$.

Трудоёмкость приближённых алгоритмов для задачи LVS, о существовании которых говорится в теореме 3.2, определяется временем решения задачи полуопределённого программирования, поскольку на нём основаны известные методы аппроксимации задачи вычисления матричной нормы [31, 17, 34]. При этом время приближённого решения задачи LVS может быть существенно сокращено, если вместо точных алгоритмов для задачи полуопределённого программирования использовать известные быстрые $(1-\varepsilon)$-приближённые алгоритмы.

Также в разделе 3.1 доказано, что при выполнении более сильных гипотез, чем P$\neq$NP, задача LVS с нормой ℓ_p не может быть решена за полиномиальное время с точностью $\sqrt{2/\pi}+\varepsilon$, если $p \in (1,2)$, и точностью $2^{-\log^{1-\varepsilon} n}$, если $p \in (2,\infty)$. Утверждение для первого из этих случаев основано на полученном результате о сложности евклидовой задачи LVS и одной из версий теоремы Дворецкого для норм ℓ_p. Второй результат является следствием известных фактов о задаче вычисления матричной нормы и её сводимости к задаче LVS. Таким образом, при $p \in (2,\infty)$ задача LVS с нормой ℓ_p, вероятно, не может быть решена не только с константной, но и логарифмической точностью.

Очевидно, что все отрицательные результаты о сложности задачи LVS распространяются также на задачу Lk-VS. Более того, в разделе 3.2 доказано, что при условии P$\neq$NP задача Lk-VS с любой из норм ℓ_p, $p \in [1,\infty)$, не может быть решена за время $F(k)Poly(dn)$, где F — произвольная функция, а $Poly$ — полином фиксированной степени. Данный результат получен путём сведе́ния к задаче Lk-VS параметризованной версии задачи о максимальном разрезе графа с заданной мощностью частей. Также в этом разделе показано, что задача Lk-VS содержит в себе задачу о максимальном k-покрытии множествами. Тем самым результаты о параметрической сложности задачи о максимальном k-покрытии распространяются на параметризованную версию задачи Lk-VS с параметром k.

В разделе 3.3 предложен рандомизированный алгоритм приближённого решения задач LVS и Lk-VS с произвольной векторной нормой, эффективный при относительно небольшой размерности пространства. Он позволяет для любого $\varepsilon \in (0,1)$ с вероятностью, превышающей $1-1/e$, находить $(1-\varepsilon)$-приближённые решения исследуемых задач за время $O((\frac{2}{\varepsilon}+1)^d\,(d^{O(1)}+dn))$. В частности, если размерность пространства ограничена медленно растущей величиной $\alpha\log n$, где α — положительная константа, то предложенный алгоритм реализует полиномиальную рандомизированную приближённую схему (PRAS) с трудоёмкостью $O(n^{\alpha\log(\frac{2}{\varepsilon}+1)+1}\log^{O(1)} n)$. Алгоритм основан на аппроксимации единичного шара заданной нормы $\|.\|$ политопом, построенным по значениям и градиентам этой нормы в случайных точках, равномерно распределённых внутри её единичного шара.

В разделах 3.4 и 3.5 представлены алгоритмы точного решения задач LVS и Lk-VS в произвольном нормированном пространстве с меньшей в сравнении с известными алгоритмами трудоёмкостью. В частности, если векторы входного множества лежат на плоскости, предложенные алгоритмы позволяют получать решения рассматриваемых задач за почти линейное и почти квадратичное время соответственно.

Теорема 3.4. *Если $d \geq 2$ и векторная норма $\|.\|$ вычислима за время $O(d)$, то решение задачи LVS может быть найдено за время $O(n^{d-1}(d + \log n))$.*

Теорема 3.5. *Если векторная норма $\|.\|$ вычислима за время $O(d)$, то решения задачи Lk-VS для всех $k = 1, \ldots, n$ могут быть найдены за общее время $O(dn^{d+1})$.*

Теорема 3.6. *Решение задачи Lk-VS в двумерном пространстве может быть найдено за время $O(n^2 \log n)$.*

Результат для задачи LVS основан на доказанном в диссертации факте о том, что оптимальное решение этой задачи в пространстве $\mathbb{R}^d$ с любой векторной нормой можно найти среди множеств, состоящих из всех входных векторов, имеющих положительное скалярное произведение с некоторым вектором пространства. Перечисление множеств указанного вида опирается на известную ранее идею рекурсивного построения регионов пространства, расположенных между гиперплоскостями, ортогональными векторам входного множества. Однако предлагаемая реализация этой идеи имеет ряд отличительных особенностей, направленных на сокращение вычислений.

В основе алгоритма для задачи Lk-VS лежит доказанный в диссертации факт о том, что оптимальное решение этой задачи в пространстве $\mathbb{R}^d$ с любой векторной нормой можно найти среди множеств, состоящих из k входных векторов с минимальными евклидовыми расстояниями до некоторой точки пространства. Отсюда следует, что решение задачи сводится к построению диаграмм Вороного высших порядков с помощью известных алгоритмов вычислительной геометрии.

Алгоритм для двумерной задачи Lk-VS основан на доказанном в диссертации факте о том, что оптимальное решение этой задачи в пространстве $\mathbb{R}^2$ с любой векторной нормой достигается на подмножествах специального вида, перечислимых в порядке, при котором соседние подмножества имеют значительное пересечение друг с другом.

Отметим, что утверждения теорем 3.4–3.6 справедливы не только для задач LVS и Lk-VS, но и для более общих задач отыскания подмножеств векторов, на которых достигается максимальное значение произвольной выпуклой функции от суммы подмножества. Одним из следствий полученных результатов являются алгоритмы с рекордной трудоёмкостью для задачи FC2-Means, рассмотренной во второй главе.

Теорема 3.7. (*a*) *Решения задачи FC2-Means для всех $k = 1, \ldots, n$ могут быть найдены за общее время $O(dn^{d+1})$.*
(*b*) *Решение задачи FC2-Means в двумерном пространстве может быть найдено за время $O(n^2 \log n)$.*

В **четвёртой главе** представлены результаты исследования инкрементной и иерархической задач о медиане (п. 5 основных результатов).

На входе этих задач имеется n-элементное множество предприятий F, m-элементное множество клиентов C, неотрицательные веса клиентов $w(.)$ и расстояния между предприятиями и клиентами $dist(.,.)$. *Стоимостью* произвольного множества предприятий S называется взвешенная сумма расстояний от клиентов до ближайших предприятий из S:

$$cost(S) = \sum_{c \in C} w(c) \min_{f \in S} dist(f, c).$$

Обычная задача о k-медиане заключается в отыскании k-элементного подмножества $S \subseteq F$ минимальной стоимости. В инкрементной постановке речь идёт о решениях задачи о k-медиане для всех k от 1 до n. Допустимым решением инкрементной задачи о медиане является последовательность множеств предприятий $F_1, \ldots, F_n$, в которой каждое множество F_k, $k = 1, \ldots, n$, содержит не более k элементов и при $k < n$ является подмножеством множества F_{k+1}. Допустимое решение $F_1, \ldots, F_n$ называется *δ-приближённым*, если для каждого k и любого k-элементного множества предприятий S справедливо неравенство $cost(F_k) \leq \delta\, cost(S)$.

Легко построить примеры, в которых инкрементная задача о медиане не имеет решений с какой-либо константной точностью, а в метрическом случае — решений с точностью $2 - \varepsilon$. Возникает вопрос: при каком минимальном значении δ гарантированно существуют δ-приближённые решения метрической задачи и при каких δ они могут быть найдены за полиномиальное время?

Наилучшими известными алгоритмами для метрической инкрементной задачи о медиане являются детерминированный алгоритм из [21, 29] и рандомизированный алгоритм из [20]. Точность этих алгоритмов составляет 8α и 7.657α соответственно, где α — точность используемых решений обычной задачи о k-медиане. Наилучший полиномиальный алгоритм имеет точность 16 [29]. M. Chrobak и M. Hurand построили пример метрической инкрементной задачи, в котором не существует решений с точностью 2.01 [20].

В диссертации исследован геометрический случай, в котором предприятия и клиенты расположены в точках пространства $\mathbb{R}^d$, а расстояния между ними индуцированы евклидовой нормой. В разделах 4.1 и 4.2 доказаны следующие теоремы.

Теорема 4.1. *Существует алгоритм приближённого решения инкрементной задачи о медиане в одномерном пространстве с точностью* $(1+\sqrt{2})^2 \approx 5.828$ *и трудоёмкостью* $O((n+m)^2)$.

Теорема 4.2. *Пусть имеется алгоритм* α*-приближённого решения задачи о* k*-медиане в пространстве* $(\mathbb{R}^d, \ell_2)$*. Тогда существует алгоритм приближённого решения инкрементной задачи о медиане в этом пространстве с точностью* $\delta\alpha$*, где* $\delta < 7.076$*, и трудоёмкостью* $O(dn^2m + T)$*, где* T *— время поиска* α*-приближённых решений евклидовой задачи о* k*-медиане для всех* $k = 1, \ldots, n$.

Оба предложенных алгоритма основаны на модификации точных либо α-приближённых решений $F_1^*, \ldots, F_n^*$ задачи о k-медиане для всех k. Вначале определяются индексы $i_1, \ldots, i_t$ такие, что стоимости решений $F_{i_k}^*$, $k = 1, \ldots, t$, убывают в геометрической прогрессии. Затем находится частичное решение $F_{i_1}, \ldots, F_{i_t}$ инкрементной задачи о медиане, в котором для каждого $k = t-1, \ldots, 1$ множество F_{i_k} является самое большее i_k-элементным подмножеством множества $F_{i_{k+1}}$ и удовлетворяет некоторому рекуррентному соотношению, связывающему стоимости множеств F_{i_k}, $F_{i_k}^*$ и $F_{i_{k+1}}$. Доказательство существования такого множества опирается на оригинальную технику последовательного упрощения входных данных задачи для получения аналитически разрешимых наихудших случаев.

Заметим, что в случае фиксированной размерности пространства евклидова задача о k-медиане может быть аппроксимирована с помощью приближённой схемы PTAS. Отсюда и из теоремы 4.2 следует, что в этом случае инкрементная задача о медиане полиномиально аппроксимируема с точностью 7.076.

В разделе 4.3 представлены алгоритмические результаты для иерархической задачи о медиане[2]. Речь в этой задаче идёт о последовательности назначений клиентов на обслуживающие их предприятия. *Стоимость* произвольного назначения A множества клиентов в множество

---

[2] В работе автора [A4] эта задача называется иерархической задачей о назначениях, но более распространённым является название hierarchical median problem.

предприятий определяется как взвешенная сумма расстояний от клиентов до предприятий, на которые они назначены:

$$cost(A) = \sum_{c \in C} w(c)\, dist(A(c), c).$$

Допустимым решением иерархической задачи о медиане является последовательность множеств предприятий $F_1, \ldots, F_n$ и последовательность назначений $A_1, \ldots, A_n$ со следующими свойствами:

(H1) каждое множество F_k, $k = 1, \ldots, n$, состоит из k элементов и при $k < n$ является подмножеством множества F_{k+1};

(H2) при назначении A_1 все клиенты назначены на предприятие из множества F_1, и назначение A_{k+1}, $k < n$, получается из назначения A_k переназначением части клиентов, назначенных на некоторое предприятие из множества F_k, на предприятие из множества $F_{k+1} \setminus F_k$.

Допустимое решение $F_1, \ldots, F_n; A_1, \ldots, A_n$ называется *δ-приближённым*, если для каждого k и любого k-элементного множества предприятий S справедливо неравенство $cost(A_k) \leq \delta\, cost(S)$.

Возникает вопрос: при каком минимальном значении δ гарантированно существуют δ-приближённые решения иерархической задачи о медиане в метрическом пространстве и при каких δ они могут быть найдены за полиномиальное время? Наилучший известный алгоритм для метрической задачи имеет точность 20.71α, где α — точность используемых решений обычной задачи о k-медиане [29]. Наилучший полиномиальный алгоритм имеет точность 41.42 [29].

В диссертации исследован геометрический случай, в котором предприятия и клиенты расположены в точках пространства с евклидовой метрикой. Доказана следующая теорема.

Теорема 4.3. *Пусть имеется алгоритм α-приближённого решения задачи о k-медиане*[3] *в пространстве $(\mathbb{R}^d, \ell_2)$. Тогда существует алгоритм приближённого решения иерархической задачи о медиане в этом пространстве с точностью $\delta\alpha$, где*

$$\delta = \begin{cases} 8, & \text{если } d = 1, \\ 8 + 4\sqrt{2} \approx 13.66, & \text{если } d > 1, \end{cases}$$

и трудоёмкостью $O(dn^2m + T)$, где T — время поиска α-приближённых решений евклидовой задачи о k-медиане для всех $k = 1, \ldots, n$.

---

[3] В работе автора [A4] рассмотрен случай, когда $\alpha = 1$, однако доказательство теоремы легко обобщается на случай произвольного $\alpha \geq 1$.

Алгоритм основан на идее, близкой к идее предложенных выше алгоритмов для инкрементной задачи о медиане. Вначале находится частичное решение иерархической задачи о медиане, соответствующее индексам $i_1, \ldots, i_t$ таким, что стоимости найденных α-приближённых решений задачи об i_k-медиане, $k = 1, \ldots, t$, убывают в геометрической прогрессии. Для каждого $k = t-1, \ldots, 1$ назначение с индексом i_k определяется с помощью некоторой аппроксимации решения задачи об i_k-медиане на множестве клиентов, получаемых “стягиванием” исходных клиентов в точки расположения обслуживающих их предприятий при назначении с индексом i_{k+1}.

В **пятой главе** изложены результаты исследования геометрической версии задачи коммивояжёра на максимум и двух её модификаций (п. 6 основных результатов).

Задача Max TSP (Maximum Traveling Salesman Problem). *Дано*: полный n-вершинный ориентированный граф G с неотрицательными весами дуг. *Найти*: гамильтонов цикл с максимальным суммарным весом дуг в графе G.

В геометрической версии этой задачи вершины графа G являются точками в пространстве $\mathbb{R}^d$, а веса дуг равны расстояниям между их концевыми вершинами, индуцированным заданной векторной нормой.

Известно, что в общем случае задача Max TSP аппроксимируема за полиномиальное время с константной точностью [11, 27], но APX-трудна даже в случае симметричных весов, принадлежащих множеству $\{1, 2\}$ (см. [23]). Отсюда легко следует APX-трудность геометрической задачи Max TSP в пространстве нефиксированной размерности с нормой ℓ_∞. Задача с евклидовой нормой NP-трудна уже в трёхмерном пространстве [18]. Из доказательства этого факта следует, что при условии P$\neq$NP евклидова задача Max TSP не аппроксимируема с помощью приближённых схем FPTAS.

Тем не менее А.И. Сердюков в 1987 году предложил полиномиальный асимптотически точный алгоритм для задачи Max TSP в евклидовом пространстве любой фиксированной размерности. Относительная погрешность этого алгоритма не превосходит величины $c_d n^{-2/(d+1)}$, где c_d — константа, зависящая от размерности пространства [12].

Другим хорошо изученным геометрическим случаем рассматриваемой задачи является случай полиэдральных пространств. Под этим понимается пространство $\mathbb{R}^d$ с заданной на нём несимметричной полунормой, единичным шаром которой является произвольный выпуклый политоп, содержащий начало координат. A. Barvinok, D.S. Johnson, G.J. Woeginger и R. Woodroofe построили точный полиномиальный алгоритм решения задачи Max TSP в полиэдральном пространстве, определяемом политопом с фиксированным числом фасет [18]. А.И. Сердюков предложил асимптотически точный алгоритм для случая полиэдральной нормы, единичный шар которой содержит $o(n)$ фасет [13].

В разделе 5.1 представлен асимптотически точный алгоритм решения геометрической задачи Max TSP в произвольном нормированном пространстве фиксированной размерности.

Теорема 5.1. *Существует алгоритм приближённого решения задачи Max TSP в произвольном нормированном пространстве* $(\mathbb{R}^d, \|.\|)$ *с относительной погрешностью* $(d+1)/\lfloor n^{1/(d+1)} \rfloor$ *и трудоёмкостью* $O(n^3)$.

Алгоритм основан на обобщении геометрических свойств, используемых в алгоритме А.И. Сердюкова для евклидовой задачи Max TSP, на случай произвольной нормы. Почти все эти свойства связаны с понятием угла в евклидовом пространстве, которое заменяется на более общее понятие, отражающее меру “непараллельности” векторов. Наиболее важное из доказанных свойств заключается в том, что среди любых N векторов в пространстве $\mathbb{R}^d$ с произвольной нормой найдутся два, мера непараллельности которых близка к нулю при больших N. Отметим, что вывод этого свойства опирается на следующий результат, возможно, представляющий самостоятельный интерес.

Утверждение 5.1. *В любом конечном множестве векторов* V *найдётся такое подмножество* B*, образующее базис линейной оболочки* V*, что координаты всех векторов из* V *в базисе* B *лежат в интервале* $[-1, 1]$.

Следуя идее А.И. Сердюкова, предложенный алгоритм для задачи Max TSP в начале своей работы находит паросочетание максимального веса в графе G. Рёбра этого паросочетания упорядочиваются таким образом, что почти все соседние рёбра в полученном порядке “почти параллельны”. Далее вершины каждого ребра связываются с вершинами соседнего ребра таким образом, что суммарный вес добавленных рёбер близок к суммарному весу исходных соседних рёбер. В результате получается гамильтонов цикл с суммарным весом, близким к удвоенному весу найденного паросочетания, что является верхней оценкой веса оптимального решения задачи Max TSP.

Построенный алгоритм асимптотически точен при любом фиксированном d. Как и всякий асимптотически точный алгоритм, он может быть трансформирован в приближённую схему PTAS. В данном случае такая схема является первой приближённой схемой для геометрической задачи Max TSP с произвольной нормой, заданной на входе задачи (например, в виде матрицы расстояний между вершинами графа либо в виде оракула, возвращающего значения нормы).

В разделе 5.2 рассматривается геометрическая максимизационная задача о нескольких бродячих торговцах.

Задача Max k-PSP (Maximum k-Peripatetic Salesman Problem). *Дано*: полный n-вершинный неориентированный граф G с неотрицательными весами рёбер и целое число $k \geq 1$. *Найти*: k рёберно непересекающихся гамильтоновых циклов с максимальным суммарным весом рёбер в графе G.

Из сложности задачи о существовании двух рёберно непересекающихся гамильтоновых циклов в неориентированном графе [28] следует NP-трудность в сильном смысле всех содержательных примеров задачи Max k-PSP, включая геометрические частные случаи в пространствах нефиксированной размерности. С другой стороны, в случае произвольных весов задача отыскания, по крайней мере, двух рёберно непересекающихся гамильтоновых циклов максимального веса эффективно аппроксимируема с константной точностью [1, 5]. Геометрическая задача Max k-PSP в евклидовом пространстве фиксированной размерности может быть решена асимптотически точно с помощью полиномиального алгоритма из [2], построенного на базе алгоритма А.И. Сердюкова для евклидовой задачи Max TSP.

В диссертации представлен алгоритм приближённого решения геометрической задачи Max k-PSP в полиэдральном пространстве.

Теорема 5.2. *Существует алгоритм приближённого решения задачи Max k-PSP в пространстве с полиэдральной нормой с относительной погрешностью*[4] $\lfloor f/2 - 1 + (k-1)(2f+8) \rfloor / n$ *и трудоёмкостью* $O(n^3k + dfn^2)$, *где* f *— число фасет единичного шара нормы.*

Предложенный алгоритм асимптотически точен, если $f = o(n/k)$. В начале своей работы он находит остовный $2k$-регулярный подграф максимального веса в графе G, используя известные эффективные алгоритмы. Найденный подграф разбивается на k подграфов степени 2, трансформируемых с небольшой потерей веса в гамильтоновы циклы.

---

[4] В работе автора [A14] приводится упрощённая формула оценки погрешности, но фактически описан способ обоснования оценки, указанной в теореме.

В основе указанной трансформации лежат известные ранее свойства отрезков и циклов в полиэдральном пространстве.

Построенный алгоритм является обобщением известного алгоритма для полиэдральной задачи Max TSP [13]. Обобщение другого выдающегося результата для этой задачи представлено в разделе 5.3. Оно связано с задачей о цикловом покрытии максимального веса с ограничениями на количество и длину циклов.

Определение. *Цикловым покрытием* графа называется остовный подграф этого графа, каждая компонента связности которого является простым циклом.

Задача Max-(c,k)-DCC (Maximum Directed (c,k)-Cycle Cover). *Дано*: полный n-вершинный ориентированный граф G с неотрицательными весами дуг и целые числа $c \geq 1$ и $k \geq 2$. *Найти*: цикловое покрытие C графа G с максимальным суммарным весом дуг, удовлетворяющее ограничениям:

(P1) количество циклов в C не превосходит c;

(P2) количество дуг в каждом цикле из C не меньше k.

Данная задача APX-трудна при любом фиксированном $k \geq 3$, даже если $c = n$ и веса дуг принадлежат множеству $\{1, 2\}$. Аналогичное утверждение для случая симметричных весов верно при $k \geq 7$ (см. [19]). Отсюда среди прочего следует APX-трудность геометрической задачи Max-(c,k)-DCC в случае полиэдральной нормы с числом фасет $O(n)$.

В диссертации доказана следующая теорема.

Теорема 5.3. *Пусть веса дуг графа G индуцированы полиэдральной несимметричной полунормой, определяемой политопом с фиксированным числом фасет f. Тогда задача Max-(c,k)-DCC разрешима за время $O(n^{2f-2}\log n)$. В случае симметричных весов время решения задачи составляет $O(n^{f-2}\log n)$.*

Полученный результат основан на развитии идей известного алгоритма для полиэдральной задачи Max TSP [18]. Вначале показывается, что рассматриваемая задача сводится к аналогичной задаче с так называемой “тоннельной метрикой”. В свою очередь, задача с тоннельной метрикой сводится к полиномиальному множеству полиномиально разрешимых задач о нахождении подграфа максимального веса с заданными степенями вершин в двудольном мультиграфе.

В **заключении** сформулированы основные результаты работы и обозначены перспективы дальнейших исследований.

Список литературы

[1] Агеев А.А., Бабурин А.Е., Гимади Э.Х. Полиномиальный алгоритм с оценкой точности 3/4 для отыскания двух непересекающихся гамильтоновых циклов максимального веса // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. — 2006. — Т. 13, № 2. — С. 11–20.

[2] Бабурин А.Е., Гимади Э.Х. Об асимптотической точности эффективного алгоритма решения задачи m-PSP на максимум в многомерном евклидовом пространстве // Тр. ИММ УрО РАН. — 2010. — Т. 16, № 3. — С. 12–24.

[3] Бабурин А.Е., Гимади Э.Х., Глебов Н.И., Пяткин А.В. Задача отыскания подмножества векторов с максимальным суммарным весом // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. — 2007. — Т. 14, № 1. — С. 32–42.

[4] Бабурин А.Е., Пяткин А.В. О полиномиальных алгоритмах решения одной задачи суммирования векторов // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. — 2006. — Т. 13, № 2. — С. 3–10.

[5] Глебов А.Н., Замбалаева Д.Ж. Полиномиальный алгоритм с оценкой точности 7/9 для задачи о двух коммивояжёрах на максимум // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2011. — Т. 18, № 4. — С. 17–48.

[6] Долгушев А.В., Кельманов А.В. Приближённый алгоритм решения одной задачи кластерного анализа // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2011. — Т. 18, № 2. — С. 29–40.

[7] Кельманов А.В., Пяткин А.В. О сложности некоторых задач поиска подмножеств векторов и кластерного анализа // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2009. — Т. 49, № 11. — С. 2059—2065.

[8] Кельманов А.В., Пяткин А.В. NP-полнота некоторых задач выбора подмножества векторов // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2010. — Т. 17, № 5. — С. 37—45.

[9] Кельманов А.В., Романченко С.М. Приближённый алгоритм решения одной задачи поиска подмножества векторов // Дискретн. анализ и исслед. операций. — 2011. — Т. 18, № 1. — С. 61–69.

[10] Пяткин А.В. О сложности задачи выбора подмножества векторов максимальной суммарной длины // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2009. — Т. 16, № 6. — С. 68–73.

[11] Сердюков А.И. Алгоритм с оценкой для задачи коммивояжера на максимум // Управляемые системы: Сб. науч. тр. Вып. 25. — Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1984. — С. 80–86.

[12] Сердюков А.И. Асимптотически точный алгоритм для задачи коммивояжера на максимум в евклидовом пространстве // Управляемые системы: Сб. науч. тр. Вып. 27. — Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1987. — С. 79–87.

[13] Сердюков А.И. Задача коммивояжера на максимум в конечномерных вещественных пространствах // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 1995. — Т. 2, № 1. — С. 50–56.

[14] Agarwal P.K., Har-Peled S., Varadarajan K.R. Geometric approximation via coresets // Combinatorial and Computational Geometry. MSRI, Vol. 52. — Cambridge: Cambridge University Press, 2005. — P. 1–30.

[15] Ageev A. Approximation-preserving reduction of k-means clustering with a given center to k-means clustering // Proc. 17th School-Seminar “Methods of Optimization and Their Applications” (BAIKAL 2017). — Irkutsk: Melentiev Energy Systems Institute SB RAS, 2017. — P. 80.

[16] Aggarwal A., Imai H., Katoh N., Suri S. Finding k points with minimum diameter and related problems // J. Algorithms. — 1991. — Vol. 12, No. 1. — P. 38–56.

[17] Alon N., Naor A. Approximating the cut-norm via Grothendieck’s inequality // SIAM J. Comput. — 2006. — Vol. 35, No. 4. — P. 787–803.

[18] Barvinok A., Fekete S.P., Johnson D.S., Tamir A., Woeginger G.J., Woodroofe R. The geometric maximum traveling salesman problem // J. ACM. — 2003. — Vol. 50, No. 5. — P. 641–664.

[19] Bläser M., Manthey B. Approximating maximum weight cycle covers in directed graphs with weights zero and one // Algorithmica. — 2005. — Vol. 42, No. 2. — P. 121–139.

[20] Chrobak M., Hurand M. Better bounds for incremental medians // Theor. Comp. Sci. — 2011. — Vol. 412, No. 7. — P. 594–601.

[21] Chrobak M., Kenyon C., Noga J., Young N.E. Incremental medians via online bidding // Algorithmica. — 2008. — Vol. 50, No. 4. — P. 455–478.

[22] Cook S.A., Reckhow R.A. Time bounded random access machines // J. Comp. Sys. Sci. — 1973. — Vol. 7, No. 4. — P. 354–375.

[23] Engebretsen L., Karpinski M. TSP with bounded metrics // J. Comp. Sys. Sci. — 2006. — Vol. 72, No. 4. — P. 509–546.

[24] Eppstein D., Erickson J. Iterated nearest neighbors and finding minimal polytopes // Disc. Comp. Geom. — 1994. — Vol. 11, No. 3. — P. 321–350.

[25] Gimadi E.Kh., Rykov I.A. Efficient randomized algorithms for a vector subset problem // Proc. 9th Conf. "Discrete Optimization and Operations Research" (DOOR 2016). Lecture Notes in Computer Science, Vol. 9869. — Cham: Springer, 2016. — P. 148–158.

[26] Hwang F.K., Onn S., Rothblum U.G. A polynomial time algorithm for shaped partition problems // SIAM J. Optim. — 1999. — Vol. 10, No. 1. — P. 70–81.

[27] Kaplan H., Lewenstein M., Shafrir N., Sviridenko M. Approximation algorithms for asymmetric TSP by decomposing directed regular multigraphs // J. ACM. — 2005. — Vol. 52, No. 4. — P. 602–626.

[28] De Kort J.B.J.M. A branch and bound algorithm for symmetric 2-peripatetic salesman problems // European J. Oper. Res. — 1993. — Vol. 70, No. 2. — P. 229–243.

[29] Lin G., Nagarajan C., Rajamaran R., Williamson D.P. A general approach for incremental approximation and hierarchical clustering // SIAM J. Comput. — 2010. — Vol. 39, No. 8. — P. 3633–3669.

[30] Matoušek J., Sharir M., Welzl E. A subexponential bound for linear programming // Algorithmica. — 1996. — Vol. 16, No. 4–5. — P. 498–516.

[31] Nesterov Yu. Semidefinite relaxation and nonconvex quadratic optimization // Optim. Methods Softw. — 1998. — Vol. 9, No. 1–3. — P. 141–160.

[32] Onn S., Schulman L.J. The vector partition problem for convex objective functions // Math. Oper. Res. — 2001. — Vol. 26, No. 3. — P. 583–590.

[33] Preparata F.P., Shamos M.I. Computational geometry: an introduction. New York: Springer-Verlag, 1985. — 398 p.
Препарата Ф., Шеймос М. Вычислительная геометрия: введение. М.: Мир, 1989. — 478 с.

[34] Steinberg D. Computation of matrix norms with applications to robust optimization. Research thesis. — Haifa: Technion — Israel Institute of Technology, 2005. — 60 p.

Публикации автора по теме диссертации

Статьи в журналах из списка ВАК

[A1] Долгушев А.В., Кельманов А.В., Шенмайер В.В. Полиномиальная аппроксимационная схема для одной задачи разбиения конечного множества на два кластера // Тр. ИММ УрО РАН. — 2015. — Т. 21, № 3. — С. 100–109. РИНЦ (RSCI).
Dolgushev A.V., Kel'manov A.V., Shenmaier V.V. Polynomial-time approximation scheme for a problem of partitioning a finite set into two clusters // Proc. Steklov Inst. Math. — 2016. — Vol. 295, Suppl. 1. — P. 47–56. DOI: 10.1134/S0081543816090066. WoS, Scopus.

[A2] Кельманов А.В., Моткова А.В., Шенмайер В.В. Приближенная схема для задачи взвешенной 2-кластеризации с фиксированным центром одного кластера // Тр. ИММ УрО РАН. — 2017. — Т.23, № 3. — С. 159–170. DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-3-159-170. РИНЦ (RSCI).
Kel'manov A.V., Motkova A.V., Shenmaier V.V. Approximation scheme for the problem of weighted 2-clustering with a fixed center of one cluster // Proc. Steklov Inst. Math. — 2018. — Vol. 303, Suppl. 1. — P. 1–10. DOI: 10.1134/S0081543818090146. WoS, Scopus.

[A3] Шенмайер В.В. Приближенный алгоритм для одномерной задачи о последовательности медиан // Дискрет. анализ и исслед. операций. Серия 1. — 2007. — Т. 14, № 2. — С. 95–101. РИНЦ (RSCI).
Shenmaier V.V., An approximate solution algorithm for the one-dimensional online median problem // J. Appl.

Industr. Math. — 2008. — Vol. 2, No. 3. — P. 421–425. DOI: 10.1134/S1990478908030125. Scopus.

[A4] Шенмайер В.В. Приближенный алгоритм для иерархической задачи о назначениях // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2008. — Т.15, № 4. — С. 97–104. РИНЦ (RSCI).
Shenmaier V.V. An approximation algorithm for the hierarchical median problem // J. Appl. Industr. Math. — 2009. — Vol. 3, No. 1. — P. 128–132. DOI: 10.1134/S1990478909010141. Scopus.

[A5] Шенмайер В.В. Асимптотически точный алгоритм для задачи коммивояжёра на максимум в конечномерном нормированном пространстве // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2010. — Т. 17, № 4. — С. 84–91. РИНЦ (RSCI).
Shenmaier V.V. An asymptotically exact algorithm for the maximum traveling salesman problem in a finite-dimensional normed space // J. Appl. Industr. Math. — 2011. — Vol. 5, No. 2. — P. 296–300. DOI: 10.1134/S1990478911020177. Scopus.

[A6] Шенмайер В.В. Аппроксимационная схема для одной задачи поиска подмножества векторов // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2012. — Т. 19, № 2. — С. 92–100. РИНЦ (RSCI).
Shenmaier V.V. An approximation scheme for a problem of search for a vector subset // J. Appl. Industr. Math. — 2012. — Vol. 6, No. 3. — P. 381–386. DOI: 10.1134/S1990478912030131. Scopus.

[A7] Шенмайер В.В. Задача о минимальном шаре, охватывающем k точек // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2013. — Т. 20, № 1. — С. 93–99. РИНЦ (RSCI).
Shenmaier V.V. The problem of a minimal ball enclosing k points // J. Appl. Industr. Math. — 2013. — Vol. 7, No. 3. — P. 444–448. DOI: 10.1134/S1990478913030186. Scopus.

[A8] Шенмайер В.В. Вычислительная сложность и аппроксимируемость одного обобщения евклидовой задачи о чебышевском центре // Доклады Акад. Наук. Математика. — 2013. — Т. 450, № 5. — С. 522–524. DOI: 10.7868/S0869565213170052. РИНЦ (RSCI).
Shenmaier V.V. Computational complexity and approximation for a generalization of the Euclidean problem on the Chebyshev center // Doklady Mathematics. — 2013. — Vol. 87, No. 3. — P. 342–344. DOI: 10.1134/S1064562413030253. WoS, Scopus.

[A9] Шенмайер В.В. Решение некоторых задач поиска подмножества векторов с использованием диаграмм Вороного // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2016. — Т. 23, № 4. — С. 102–115. DOI: 10.17377/daio.2016.23.526. РИНЦ (RSCI).
Shenmaier V.V. Solving some vector subset problems by Voronoi diagrams // J. Appl. Industr. Math. — 2016. — Vol. 10, No. 4. — P. 560–566. DOI: 10.1134/S199047891604013X. Scopus.

[A10] Шенмайер В.В. Точный алгоритм для нахождения подмножества векторов с суммой максимальной длины // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2017. — Т. 24, № 4. — С. 111–129. DOI: 10.17377/daio.2017.24.541. РИНЦ (RSCI).
Shenmaier V.V. An exact algorithm for finding a vector subset with the longest sum // J. Appl. Industr. Math. — 2017. — Vol. 11, No. 4. — P. 584–593. DOI: 10.1134/S1990478917040160. Scopus.

[A11] Шенмайер В.В. Сложность и аппроксимация задачи о длиннейшем суммарном векторе // Ж. вычисл. мат. и мат. физ. — 2018. — Т. 58, № 6. — С. 883–889. DOI: 10.7868/S0044466918060030. РИНЦ (RSCI).
Shenmaier V.V. Complexity and approximation of finding the longest vector sum // Comp. Math. Math. Phys. — 2018. — Vol. 58, No. 6. — P. 850–857. DOI: 10.1134/S0965542518060131. WoS, Scopus.

[A12] Шенмайер В.В. Алгоритм для полиэдральной задачи о цикловом покрытии с ограничениями на количество и длину циклов // Тр. ИММ УрО РАН. — 2018. — Т. 24, № 3. — С.272–280. DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-3-272-280. РИНЦ (RSCI).

[A13] Шенмайер В.В. Аппроксимируемость задачи о подмножества векторов с суммой максимальной длины // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2018. — Т. 25, № 4. — С. 131–148. DOI: 10.17377/daio.2018.25.618. РИНЦ (RSCI).
Shenmaier V.V. Approximability of the problem of finding a vector subset with the longest sum // J. Appl. Industr. Math. — 2018. — Vol. 12, No. 4. — P. 749–758. DOI: 10.1134/S1990478918040154. Scopus.

[A14] Shenmaier V.V. Asymptotically optimal algorithms for geometric Max TSP and Max m-PSP // Discrete Appl. Math. — 2014. — Vol. 163, Part. 2. — P. 214–219. DOI: 10.1016/j.dam.2012.09.007. WoS, Scopus.

[A15] Shenmaier V.V. Complexity and approximation of the smallest k-enclosing ball problem // European J. Comb. — 2015. — Vol. 48. — P. 81–87. DOI: 10.1016/j.ejc.2015.02.011. WoS, Scopus.

[A16] Shenmaier V.V. An approximation algorithm for the Euclidean incremental median problem // Discrete Opt. — 2016. — Vol. 22, Part B. — P. 312–327. DOI: 10.1016/j.disopt.2016.08.005. WoS, Scopus.

[A17] Shenmaier V.V. Complexity and algorithms for finding a subset of vectors with the longest sum // Theor. Comp. Sci. — Accepted and available online, 2018. DOI: 10.1016/j.tcs.2018.04.018. WoS, Scopus.

Статьи в трудах международных конференций

[A18] Kel'manov A.V., Motkova A.V., Shenmaier V.V. An approximation scheme for a weighted two-cluster partition problem // Proc. 6th Conf. “Analysis of Images, Social networks and Texts” (AIST 2017). Lecture Notes in Computer Science, Vol. 10716. — Cham: Springer, 2018. — P. 323–333. DOI: 10.1007/978-3-319-73013-4_30. WoS, Scopus.

[A19] Shenmaier V.V. Complexity and approximation of the smallest k-enclosing ball problem // Proc. 7th European Conf. on Combinatorics, Graph Theory and Applications (EuroComb 2013). CRM Series, Vol. 16. — Pisa: Edizioni della Normale, 2013. — P. 583–588. DOI: 10.1007/978-88-7642-475-5_92. Scopus.

[A20] Shenmaier V.V. Complexity and algorithms for finding a subset of vectors with the longest sum // Proc. 23rd Computing and Combinatorics Conf. (COCOON 2017). Lecture Notes in Computer Science, Vol. 10392. — Cham: Springer, 2017. — P. 469–480. DOI: 10.1007/978-3-319-62389-4_39. WoS, Scopus.

[A21] Shenmaier V.V. Complexity and approximation of the longest vector sum problem // Proc. 15th Workshop on Approximation and Online Algorithms (WAOA 2017). Lecture Notes in Computer Science, Vol. 10787. — Cham: Springer, 2018. — P. 41–51. DOI: 10.1007/978-3-319-89441-6_4. WoS, Scopus.

Шенмайер Владимир Владимирович

Аппроксимируемость труднорешаемых геометрических задач кластеризации и маршрутизации

Автореферат диссертации на соискание
учёной степени доктора
физико-математических наук