МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Пепа Руслан Юрьевич

Обобщенные комбинаторные потоки Риччи

Специальность 01.01.04 —
геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2019

Работа выполнена на кафедре дифференциальной геометрии и приложений Механико-математического факультета ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова».

Научный руководитель: **Попеленский Фёдор Юрьевич**
кандидат физико-математических наук,
доцент.

Официальные оппоненты: **Лексин Владимир Павлович,**
доктор физико-математических наук, профессор,
ГОУВО МО «Государственный социально-гуманитарный университет», кафедра математики и методики преподавания математических дисциплин, профессор.

Рябов Павел Евгеньевич,
доктор физико-математических наук, доцент,
ФГОБУ ВО «Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации», Департамент анализа данных, принятия решений и финансовых технологий, профессор.

Соколов Сергей Викторович,
доктор физико-математических наук, ФГАОУ ВО «Московский физико-технический институт (национально-исследовательский университет)», заведующий кафедрой теоретической механики.

Защита диссертации состоится 25 октября 2019 года в 16^{45} на заседании диссертационного совета МГУ.01.17 при ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова» по адресу: Российская Федерация, 119234, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, МГУ имени М. В. Ломоносова, Механико-математический факультет, аудитория 14-08.

E-mail: msu.01.17@mail.ru

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке ФГБОУ ВО МГУ имени М. В. Ломоносова, по адресу: Москва, Ломоносовский проспект, д. 27 и на сайте ИАС "ИСТИНА": https://istina.msu.ru/dissertations/237182270/
Автореферат разослан 25 сентября 2019 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
МГУ.01.17 ФГБОУ МГУ
доктор физико-математических
наук, член-корреспондент РАН **Шафаревич Андрей Игоревич**

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Потоки метрик, то есть дифференциальные уравнения на семейства метрик, зависящих от времени, уже довольно давно активно используются в геометрии. Наиболее известным на сегодняшний день является применение Перельманом потоков Риччи с перестройками для доказательств гипотез Пуанкаре и Тёрстона. Потоки нетривиальны даже в двумерном случае. Потоком Риччи на двумерной поверхности X называется семейство метрик $g(t) = (g_{ij}(t))$, удовлетворяющее дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial g}{\partial t} = -2K(g(t))g(t),$$

где $K(g(t))$ — гауссова кривизна метрики $g(t)$.

Теорема (Hamilton[1]). *Для любой начальной метрики $g(0)$ на замкнутой ориентированной поверхности X решение потока Риччи существует для всех $t \geqslant 0$. Если поверхность X не диффеоморфна S^2, то поток Риччи сходится к метрике постоянной кривизны. Если $X = S^2$, то поток Риччи сходится к метрике постоянной кривизны, если гауссова кривизна $K(g(0))$ положительна во всех точках X.*

Случаи, не подходящие под условия этой теоремы Гамильтона, были рассмотрены Чоу.

Теорема (Chow[2]). *Пусть g_0 — произвольная начальная метрика на сфере, и пусть $g(t)$ — решение потока Риччи с этим начальным условием $g(0) = g_0$. Тогда найдется такое $T > 0$, что кривизна $K(g(T))$ положительна во всех точках.*

Наиболее удачный дискретный аналог потоков Риччи был введен в совместной работе Чоу и Луо[3]. Под метрикой они понимали так называемую метрику упаковки кругов. Соответсвующие определения приведены в главе 1, здесь же достаточно отметить следующее. Для замкнутой поверхности X фиксируются триангуляция T и весовая функция w на рёбрах триангуляции, принимающая значение в $(-1, 1]$. Метрика кодируется положительными радиусами окружностей r_i, заданными для каждой вершины триангуляции. Комбинаторный поток

[1] R. S. Hamilton, *Three manifold with positive Ricci curvature*, J. Differential Geometry 17, (1982), 255-306.

[2] B. Chow, *The Ricci flow on the 2-sphere*, J. Differential Geometry 33(1991) 325-334.

[3] B.Chow, F. Luo, *Combinatorial Ricci flows on surfaces*, J. of differential geometry 63 (2003) 97–129.

Риччи в евклидовом случае (точное определение см. в гл. 1) — это система дифференциальных уравнений

$$\frac{dr_i}{dt} = -K_i r_i, \tag{1}$$

аналогичным образом определяется комбинаторный поток Риччи для гиперболического случая. Для евклидова и гиперболического случаев Чоу и Луо доказали, что при выполнении определенных условий на веса и на комбинаторику триангуляции T, поток Риччи сходится к единственной метрике постоянной кривизны. Один из ключевых моментов в доказательствах Чоу и Луо — это возможность представить поток Риччи как отрицательный градиентный поток некоторой функции F. Существование такой функции F выводится из того, что пространство метрик диффеоморфно $\mathbb{R}^N_+$, где N — число вершин триангуляции. Затем доказывается, что функция F выпуклая. Сходимость траекторий отрицательного градиентного потока к положению равновесия выводится из выпуклости функции F. В доказательствах этих фактов важную роль играет условие $w \geqslant 0$. В данной работе мы показываем, как условие $w \geqslant 0$ можно ослабить так, чтобы пространство метрик осталось диффеоморфно $\mathbb{R}^N_+$, а функция F осталась выпуклой. Любопытно, что эти обобщенные условия для обоих фактов оказываются одинаковыми. Кроме того, мы строим контрпримеры, которые показывают, что дальнейшее ослабление невозможно. Этому посвящены главы 1 и 2.

Если весовая функция и триангуляция не удовлетворяют условиям теоремы Чоу и Луо, то численное моделирование показывает, что в ряде случаев под действием потока Риччи метрика в пределе вырождается (а именно, некоторые радиусы стремятся к нулю), но при этом наблюдаются определенные закономерности в поведении кривизн. В главе 3 мы определяем вырожденные метрики упаковок кругов в евклидовом и гиперболическом случаях, определяем комбинаторный поток Риччи для таких метрик, и доказываем теоремы сходимости потока Риччи к положению равновесия для любой начальной метрики при определенных условиях на триангуляцию T и веса w. При этом на веса w накладываются более общие условия из главы 2, а не условие $w \geqslant 0$.

Кроме потока Риччи интересен поток средней кривизны

$$\frac{\partial f(\bar{x}, t)}{\partial t} = -H(\bar{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\bar{x}, t), \tag{2}$$

где $f(\bar{x}, t)$ — семейство вложений поверхности M^n в $\mathbb{R}^{n+1}$, $H(\bar{x}, t)$, $\mathbf{n}(\bar{x}, t)$ — средняя кривизна и нормаль в точке $\bar{x}$ в момент времени t соответственно, и его нормализованная версия $\tilde{f}(\tilde{t})$, сохраняющая объём (площадь) поверхности.

Теорема (Huisken[4]). *Пусть* f_0 *— вложение гладкого замкнутого многообразия* M^n *в* $\mathbb{R}^{n+1}$*. Пусть известно, что собственные значения второй квадратичной формы подмногообразия* M_0^n *строго больше нуля для всех* $\bar{x} \in M_0^n$*. Тогда уравнение* (2) *с начальным условием* $f(\bar{x}, 0) = f_0(\bar{x})$ *имеет гладкое решение на конечном интервале времени* $0 \leqslant t < T$ *такое, что поверхность* M_t^n *стягивается в некоторую точку* O *при* $t \to T$*; нормализованное условием постоянства объема многообразия, уравнение* (2) *с начальным условием* $\tilde{f}(\bar{x}, 0) = \tilde{f}_0(\bar{x})$ *имеет гладкое решение при* $\tilde{t} \to \infty$*. В то же время* $\tilde{M}_{\tilde{t}}$ *стремится принять форму сферы площади* $|M_0|$*. Подмногообразие* $\tilde{M}_{\tilde{t}}$ *получается из* M_t *гомотетией с центром в точке* O*.*

В главе 4 представлен метод численного моделирования дискретного потока средней кривизны на поверхностях вращения с различными начальными профильными функциями. Результаты численного моделирования на поверхности вращения совпадают с теоретическими в случае, если поверхность вращения удовлетворяет условиям теоремы Хьюскена. Наиболее интересные результаты главы 4 касаются моделирования потока средней кривизны для поверхностей вращения, не удовлетворяющих условиям теоремы Хьюскена, в частности, смоделировано формирование особенности.

Цель диссертации

1. Исследовать количество метрик упаковок кругов, имеющих постоянную кривизну, для весовой функции, принимающей значения в $(-1, 1]$, для тетраэдра.

2. Исследовать условия на весовую функцию, гарантирующие выпуклость функции F. Исследовать условия на весовую функцию, при которых пространство метрик стягиваемо.

3. Определить метрику упаковки кругов с вырождениями, определить комбинаторный поток Риччи для таких метрик, доказать теоремы сходимости для евклидова и гиперболического случаев.

4. Смоделировать дискретный поток средней кривизны для визуализации формирования особенности на поверхности вращения, профильная функция которой не является выпуклой.

[4] G. Huisken, *Flow by mean curvature of convex surfaces into spheres*, J. Differential Geometry 20, (1984) 237-266.

Положения, выносимые на защиту

Основные результаты диссертации заключаются в следующем:

1. Нахождение и классификация метрик упаковок кругов с постоянной кривизной на тетраэдре для двух типов симметричных весовых функций $w \in (-1, 1]$.

2. Нахождение новых, более слабых условий на весовую функцию со значениями в $(-1, 1]$, при которых комбинаторный поток Риччи является градиентным потоком выпуклой функции, определённой в пространстве $\mathbb{R}^N_+$.

3. Определение нового класса метрик упаковок кругов с вырождениями и комбинаторного потока Риччи для них; доказательство теорем сходимости комбинаторного потока Риччи к единственной метрике постоянной кривизны с вырождениями при определенных условиях для евклидова и гиперболического случаев.

4. Построение устойчивого алгоритма вычисления решения дискретного потока средней кривизны на поверхности вращения; моделирование и визуализация формирования особенности в случае, когда начальная профильная функция поверхности вращения не является выпуклой.

Научная новизна

Все основные результаты диссертации являются оригинальными, получены автором самостоятельно и её новизна заключаются в следующем:

1. Исследовано количество метрик постоянной кривизны на тетраэдре с весовой функцией, обладающей одним из двух типов симметрии.

2. Найдены новые ослабленные условия, при которых пространство метрик диффеоморфно $\mathbb{R}^N_+$, а поток Риччи эквивалентен отрицательному градиентному потоку некоторой выпуклой функции.

3. Доказана сходимость комбинаторного потока Риччи для вырожденных метрик упаковок кругов для любой начальной метрики в евклидовом и гиперболическом случаях при определенных условиях на триангуляцию и весовую функцию.

4. Предложен новый алгоритм моделирования потока средней кривизны на поверхности вращения.

Методы исследования

В диссертации применяются методы дифференциальной геометрии, дифференциальных уравнений и алгебры. Использовались системы численного моделирования.

Теоретическая и практическая ценность работы

Диссертация имеет теоретический характер. Результаты, полученные в диссертации, представляют интерес для специалистов в области дифференциальной геометрии, дифференциальных уравнений и численного моделирования.

Апробация работы

Результаты опубликованы в четырёх статьях [1-4] (см. стр. 22), из которых четыре опубликованы в журналах, удовлетворяющих Положению о диссертационном совете Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова (утв. Ректором МГУ имени М.В.Ломоносова 27 октября 2017 года). Результаты диссертации были представлены на следующих семинарах и конференциях:

- семинар «Дифференциальная геометрия и приложения» под руководством академика А. Т. Фоменко;

- семинар «Некоммутативная геометрия и топология» под руководством профессора
  А. С. Мищенко, профессора В. М. Мануйлова, профессора И. К. Бабенко, доцента
  А. А. Ирматова;

- семинар «Дифференциальные операторы на сингулярных пространствах, алгебраически интегрируемые системы и квантование» под руководством член-корреспондента РАН
  А. И. Шафаревича;

- «Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна ВЗМШ — 2016», Воронеж, 25 — 31 января 2016 г.;

- «Ломоносов 2016», МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, 11 — 15 апреля 2016 г.;

- «Ломоносов 2017», МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, 10 — 14 апреля 2017 г.;
- «Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна ВЗМШ — 2018», Воронеж, 26 — 31 января 2018 г.;
- «XX Geometrical Seminar», Faculty of Mathematics University of Belgrade Serbia, May 20 — 23, 2018 г.;
- «International Conference on Topology and its Application», Nafpaktos, Greece, July 7—11, 2018 г.;
- «Современные проблемы математики и механики», МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, 13 — 15 мая 2019 г.

Структура и объём работы

Диссертационная работа состоит из введения и четырёх глав. Список литературы содержит 29 наименований. Текст диссертации изложен на 81 страницах.

Содержание работы

Во введении формулируется цель работы, кратко излагаются её результаты и содержание.

Содержание главы 1

Рассмотрим замкнутую поверхность X с триангуляцией T. Следуя Тёрстону[5], определим для X аналог плоской метрики с коническими особенностями. Пусть $V = \{A_1, ..., A_N\}$ — множество вершин триангуляции T. Обозначим через E и F соответственно множества рёбер и граней триангуляции T.

Определение. *Весовой функцией называется функция* $w : E \to (-1, 1]$, $w(A_iA_j) = w_{ij} = w_{ji}$, *а число* w_{ij} *называется весом ребра* A_iA_j.

Определение. *Под метрикой (в евклидовом случае) на поверхности мы понимаем способ вычисления длины любой ломаной или «хорошей» кривой на этой поверхности. Для фиксированной тройки* (X, T, w)*, состоящей из поверхности*

[5] W. Thurston, *Geometry and topology of 3-manifolds*, Princeton lecture notes, 1976, http://www.msri.org/publications/books/gt3m/ , гл. 13.

X, её триангуляции T и весовой функции w, определим метрику на X следующим образом:

1. *на каждой грани триангуляции будем считать метрику плоской;*
2. *метрика зависит от параметров $r = \{r_i > 0 \mid i = 1, ..., N\} \in \mathbb{R}_+^N$;*
3. *длина l_{ij} ребра $A_iA_j \in E$ задается формулой*

$$l_{ij} = \sqrt{r_i^2 + r_j^2 + 2r_ir_jw_{ij}}. \tag{3}$$

Эти условия определяют метрику на X, причем единственным образом, тогда и только тогда, когда длины рёбер l_{ij}, l_{jk}, l_{ki} каждой грани триангуляции удовлетворяют трем неравенствам треугольника. Для простоты метрикой называется набор $r = \{r_i > 0,\ i = 1, \dots, N\}$.

Определение. *Пространством метрик $\mathcal{R}_w \subseteq \mathbb{R}_+^N$, соответствующим весовой функции w, будем называть множество всех наборов $r = \{r_i > 0,\ i = 1, \dots, N\}$, для которых $\{l_{ij} | A_iA_j \in E\}$ удовлетворяют неравенствам треугольника на каждой грани триангуляции T.*

Описанные комбинаторные данные имеют очень простую геометрическую интерпретацию. А именно, рассмотрим на евклидовой плоскости окружности C_i, C_j радиусами r_i, r_j соответсвенно. Предположим, что эти окружности пересекаются. Обозначим через θ_{ij} угол пересечения, который выбирается так, что $\theta_{ij} = 0$ для окружностей, касающихся внешним образом. Тогда расстояние между вершинами A_i и A_j задается формулой (3), в которой $w_{ij} = \cos\theta_{ij}$.

Кривизна такой метрики сконцентрирована в вершинах триангуляции. Поскольку каждый набор $r = \{r_i > 0,\ i = 1, \dots, N\}$ определяет длины рёбер $\{l_{ij}\}$, то определены плоские углы в вершинах каждой грани.

Определение. *Кривизной K_j в вершине A_j называется величина*

$$K_j = 2\pi - \sum_{A_iA_jA_k \in F} \angle A_iA_jA_k,\ i = 1, \dots, N. \tag{4}$$

Определение. *Говорят, что набор $r = (r_1, \dots, r_N)$ задает метрику постоянной кривизны (или метрика $r = (r_1, \dots, r_N)$ имеет постоянную кривизну), если $K_1(r) = \ldots = K_N(r) = 2\pi\chi(M)/N$.*

Определение. *Комбинаторный поток Риччи — это система дифференциальных уравнений*

$$\frac{dr_i}{dt} = -K_ir_i,\ i = 1, \dots, N, \tag{5}$$

которая определяет зависимость метрики от времени в терминах эволюции набора параметров $r = \{r_i > 0 \mid i = 1, ..., N\}$.

Определение. *Решение (5) называется сходящимся, если*

1. $\lim\limits_{t\to\infty} K_i(t) = K_i(\infty) \in (-\infty, 2\pi)$ *существует для всех i,*
2. $\lim\limits_{t\to\infty} r_i(t) = r_i(\infty) \in \mathbb{R}_+$ *существует для всех i.*

В работе Чоу и Луо[3] доказано, что при определенных условиях (среди которых имеются условия $w \geqslant 0$), комбинаторный поток Риччи сходится к метрике постоянной кривизны; пространство метрик при этом совпадает с $\mathbb{R}_+^N$.

В первой главе исследовано пространство метрик на тетраэдре, при условии, что весовая функция обладает одним из двух типов симметрии. Выяснено, когда пространство метрик совпадает с $\mathbb{R}_+^4$. Выяснено, сколько имеется неэквивалетных между собой метрик постоянной кривизны. В данном случае мы считаем, что метрики r и λr, где $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda > 0$, эквивалентны, так как у них одинаковые кривизны.

Интересен также гиперболический случай.

Определение. *Пусть T — триангуляция замкнутой ориентированной поверхности X рода $g \geq 2$ с заданной весовой функцией w на её рёбрах. Метрику в гиперболическом случае будем задавать следующим образом:*

1. *метрика на каждой грани триангуляции T имеет постоянную отрицательную кривизну -1;*
2. *метрика зависит от параметров $r = \{r_i > 0 \mid i = 1, \dots, N\} \in \mathbb{R}_+$;*
3. *длина l_{ij} ребра $A_iA_j \in E$ определяется формулой $\operatorname{ch} l_{ij} = \operatorname{ch} r_i \operatorname{ch} r_j + {}$ $+ w_{ij} \operatorname{sh} r_i \operatorname{sh} r_j$.*

В этом (гиперболическом) случае приведенные условия имеют тот же геометрический смысл, что и в евклидовом случае. Пространство метрик обозначается так же: $\mathcal{R}_w \subseteq \mathbb{R}_+^N$.

Определение. *Гиперболический комбинаторный поток Риччи — это система дифференциальных уравнений*

$$\frac{dr_i}{dt} = -K_i \operatorname{sh} r_i,\ i = 1, \dots, N. \tag{6}$$

Тёрстон[5] доказал, что при определенных комбинаторных условиях на триангуляцию и веса существует единственная метрика постоянной кривизны. Иными словами, в гиперболическом случае метрика постоянной кривизны в вершинах не имеет конических особенностей. Ясно, что для гиперболического случая метрики постоянной кривизны — в точности то же самое, что положения равновесия потока Риччи (6). Чтобы связать метрики постоянной кривизны с особенностями потока Риччи в евклидовом случае, нам понадобится *нормализованный поток Риччи*, который определяется как система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dr_i}{dt} = -(K_i - K^{av})r_i,\ i = 1, \dots, N, \tag{7}$$

где $K^{av} = \frac{2\pi\chi(X)}{N}$. В евклидовом случае метрики постоянной кривизны в точности являются положениями равновесия потока (7).

Чоу и Луо[8] показали, что при условиях, найденных Тёрстоном, поток Риччи (в обоих случаях (6) и (7)), сходится к единственной метрике постоянной кривизны. В евклидовом случае здесь не возникает противоречия, так как произведение $\prod_{i=1}^{N} r_i$ — первый интеграл нормализованного потока Риччи (7) .

Определим *линк* $Lk(I)$ подмножества $I \subset V$ вершин триангуляции T как множество пар (e, v), состоящих из ребра e и вершины v таких, что

(1) концы ребра e не содержатся в I;

(2) $v \in I$;

(3) e и v образуют грань.

Обозначим также через F_I подмножество в X, состоящее из симплексов, все вершины которых принадлежат I. В случае, когда на гранях триангуляции метрика евклидова, кривизны метрик $r = (r_1, \dots, r_N)$ и $\lambda r = (\lambda r_1, \dots, \lambda r_N), \lambda > 0$ совпадают. Поэтому при подсчете числа метрик постоянной кривизны метрики r и λr различать не будем.

Теорема (Chow, Luo[3]). *Пусть* (X, T, w) — *триангуляция* T *поверхности* X *с набором весов* $w \geqslant 0$. *Тогда для потоков Риччи (6) или (7) верны следующие условия:*

(1) *существует решение* $r(t)$*, определенное для* $t \in [0, \infty)$*, для любой начальной метрики* $r(0)$*;*

(2) *решение* $r(t)$ *сходится к метрике постоянной кривизны тогда и только тогда, когда для любого собственного подмножества* $I \subset V$ *выполнено неравен-*

ство

$$0 > -\sum_{(e,v)\in Lk(I)} (\pi - \arccos w(e)) + 2\pi\chi(F_I) \qquad \textit{для потока (6)},$$

$$2\pi|I|\chi(X)/|N| > -\sum_{(e,v)\in Lk(I)} (\pi - \arccos w(e)) + 2\pi\chi(F_I) \qquad \textit{для потока (7)};$$

(3) *при выполнении условий* (2) *решение* $r(t)$ *сходится к метрике постоянной кривизны экспоненциально быстро.*

Вернёмся к результатам главы 1. Рассмотрим тетраэдр $A_0A_1A_2A_3$, он даёт простейшую триангуляцию сферы S^2. В главе 1 пространство $\mathcal{R}_w$ описано в случаях, когда весовая функция на тетраэдре обладает одним из двух видов симметрии:

1. $w_{01} = w_{23} = \alpha, w_{02} = w_{03} = \omega_{13} = \gamma$;

2. $w_{01} = w_{02} = w_{03} = \gamma, w_{12} = \omega_{23} = w_{13} = \alpha$.

Условие, выделяющее $\mathcal{R}_w$ в $\mathbb{R}^4_+$, можно записать в виде

$$\frac{1-w_{12}}{r_3^2}+\frac{1-w_{23}}{r_1^2}+\frac{1-w_{31}}{r_2^2}+2\frac{w_{23}+w_{13}w_{12}}{r_2r_3}+2\frac{w_{31}+w_{23}w_{12}}{r_1r_3}+2\frac{w_{12}+w_{23}w_{31}}{r_2r_1} > 0, \tag{8}$$

где $w_{ij}, i \neq j, i, j = \{0, 1, 2, 3\}$ — вес на ребре l_{ij}. Выписав такие неравенства для каждой грани триангуляции, получим набор ограничений, выделяющих пространство $\mathcal{R}_w$ в $\mathbb{R}^4_+$.

Лемма. *Пусть* $w_{01} = w_{23} = \alpha, w_{02} = w_{03} = w_{12} = w_{13} = \gamma$. *Если* $\gamma > -\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}$, *то пространство* $\mathcal{R}_w$ *совпадает с* $\mathbb{R}^4_+$. *В противном случае, когда* $\gamma \leqslant -\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}$, *пространство* $\mathcal{R}_w \subsetneqq \mathbb{R}^4_+$.

Теорема. *Пусть* $w_{01} = w_{23} = \alpha, w_{02} = w_{03} = w_{12} = w_{13} = \gamma$, *где* $\alpha, \gamma \in (-1, 1]$. *Тогда количество метрик постоянной кривизны описывается диаграммой, показанной на рис. 1. А именно:*

1. *для* (α, γ) *из области* $ACBHGD$ *существует единственная метрика постоянной кривизны,* $r_0 = r_1 = r_2 = r_3 = 1$;

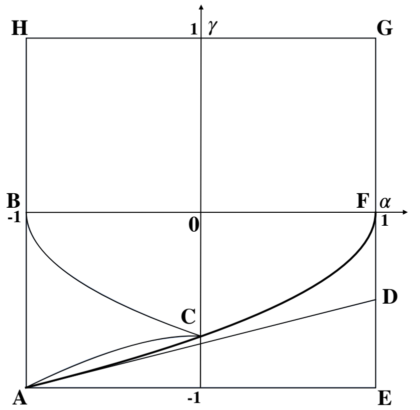

Рис. 1: Области с различными количествами метрик постоянной кривизны. Кривая ACF определяет границу области, для которой $\mathcal{R} = \mathcal{R}_{\alpha,\gamma} = \mathbb{R}^4_+$

2. *для (α, γ) из области ABC имеется пять различных метрик постоянной кривизны: $r_0 = r_1 = r_2 = r_3 = 1$ и еще четыре, для которых выполняется один из наборов соотношений $r_0 = r_1, r_0 \neq r_2 \neq r_3 \neq r_1$ или $r_2 \neq r_0 \neq r_1 \neq r_3, r_2 = r_3$; кроме того, эти четыре метрики получаются друг из друга соответствующими перестановками индексов у параметров r_i;*

3. *для (α, γ) из области ADE метрик постоянной кривизны нет.*

Более того, отрезок AD лежит на прямой $\alpha = 3 + 4\gamma$, кривая BD — дуга параболы $2\gamma^2 - \alpha - 1 = 0$, а кривая AD — дуга гиперболы $2\gamma^2 - \alpha^2 - 1 = 0$. На отрезке AD пропадает решение $r_0 = r_1 = r_2 = r_3$, на дугах BC и AD пропадают 4 решения, описанные в пункте 2.

Замечание. *На рис. 1 изображены границы областей с различным количеством положений равновесия вместе с кривой ACF, заданной уравнением $\gamma = -\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}$, отделяющей область изменения весов α, γ, для которой $\mathcal{R}_w = \mathbb{R}^4_+$.*

Теперь приведём утверждения касательно весовой функции со вторым типом симметрии.

Лемма. *Пусть $w_{01} = w_{02} = w_{03} = \gamma, w_{12} = w_{13} = w_{23} = \alpha$, где $\alpha, \gamma \in (-1, 1]$. Если $\gamma > -\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}$, тогда пространство $\mathcal{R}_w$ совпадает с $\mathbb{R}^4_+$. И наоборот, при $\gamma \leqslant -\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}$ имеем $\mathcal{R}_w \subsetneqq \mathbb{R}^4_+$.*

Теорема. *Пусть $w_{01} = w_{02} = w_{03} = \gamma, w_{12} = w_{13} = w_{23} = \alpha$, где $\alpha, \gamma \in (-1, 1]$. Тогда количество метрик постоянной кривизны описывается диаграммой, изображенной на рис. 2. А именно,*

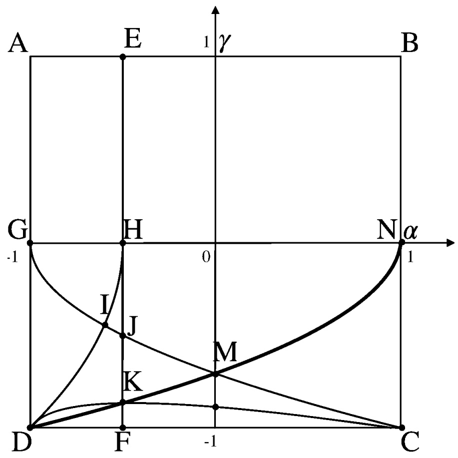

Рис. 2: Области с различными количествами метрик постоянной кривизны. Кривая $DKMN$ определяет границу области, для которой $\mathcal{R} = \mathcal{R}_{\alpha,\gamma} = \mathbb{R}^4_+$

1. *если (α, γ) принадлежит области $AEHIG$, то метрик постоянной кривизны не существует;*
2. *если (α, γ) принадлежит области $EBCJH$, то существует единственная метрика постоянной кривизны, причем $r_1 = r_2 = r_3$;*
3. *если (α, γ) принадлежит области DGI, то существуют три различные метрики постоянной кривизны (r_1, r_2, r_3) таких, что (t, t, s),(t, s, t) или (s, t, t), где $t \neq s$;*
4. *если (α, γ) принадлежит области IJH, то существуют две метрики постоянной кривизны, причем для каждой из них $r_1 = r_2 = r_3$;*
5. *если (α, γ) принадлежит одной из областей $DKJI$ и DKF, то существуют пять метрик постоянной кривизны, описанных в пунктах* 3 *и* 4;
6. *если (α, γ) принадлежит одной из областей FKC и JKC, то существуют четыре метрики постоянной кривизны, описанных в пунктах* 2 *и* 3.

Более того, $EHJKF$ — отрезок прямой $\alpha = -1/2$, $GIJC$ — дуга параболы $2\gamma^2 - 1 - \alpha = 0$, DIH — дуга параболы $\gamma^2 + 2\alpha + 1 = 0$, а исключительная кривая DKC задается уравнением $\gamma^2(5 + 4\alpha) - \alpha^2 - 4\alpha - 4 = 0$.

На кривой $GIJC$ исчезают метрики из пункта 3, *на кривых DIH и $FKJH$ две метрики из пункта* 4 *вырождаются в одну, на прямой EH метрик постоянной кривизны нет, а на исключительной кривой DKC три метрики из пункта* 3 *вырождаются в одну метрику, для которой $t = s$.*

Замечание. *На рис. 2 изображены границы областей с различным количеством положений равновесия вместе с кривой $DKMN$, заданной уравнением $\gamma = -\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}$, отделяющей область изменения весов α, γ, для которой $\mathcal{R}_w = \mathbb{R}^4_+$.*

Содержание главы 2

Евклидов комбинаторный поток Риччи заменой $u_i = \ln r_i$ приводится к виду $\frac{du}{dt} = -K_i(u)$; гиперболический поток приводится к такому же виду заменой $u_i = \ln \operatorname{th}(r_i/2)$. Более того, оказывается, что в обоих случаях $\frac{\partial K_i}{\partial u_j} = \frac{\partial K_j}{\partial u_i}$, то есть 1-форма $\Omega = \sum K_i du_i$ замкнута.

Для неотрицательной весовой функции w пространство метрик $\mathcal{R}_w$ совпадает с $\mathbb{R}^N_+$. Поэтому существует функция F, для которой $dF = \Omega$. Более того, в гиперболическом случае F строго выпукла на $\mathbb{R}^N_+$, а в евклидовом F строго выпукла на гиперплоскости $\sum u_i = 0$. Из результатов первой главы следует, что если условия $w \geqslant 0$ не выполнены, то существуют весовые функции w, для которых $\mathcal{R}_w \subsetneqq \mathbb{R}^N_+$, поэтому односвязность $\mathcal{R}_w$ нужно устанавливать какими-то дополнительными рассуждениями. Кроме того, выпуклость функции F опирается на интересное утверждение из элементарной геометрии, для которого существуют контрпримеры, если не выполнены условия $w \geqslant 0$. В главе 2 найдены условия на весовую функцию, уже не удовлетворяющие условию $w \geqslant 0$, при которых $\mathcal{R}_w = \mathbb{R}^N_+$ (а следовательно, существует F такая, что $dF = \sum K_i du_i$). Показано, что при тех же условиях F выпукла.

Лемма. *Пусть на грани $\triangle A_1A_2A_3$ задана весовая функция $w_{12} = \alpha, w_{23} = \beta, w_{31} = \gamma$ такая, что $\beta = \gamma \geq 0 > \alpha$. Кроме того, потребуем, чтобы $\beta\gamma + \alpha \geq 0$. Тогда для любых $r_1, r_2, r_3 > 0$ из отрезков l_1, l_2, l_3 можно сложить треугольник на евклидовой плоскости.*

Лемма. *Пусть на грани $\triangle A_1A_2A_3$ задана весовая функция $w_{12} = \alpha, w_{23} = \beta, w_{31} = \gamma$ такая, что $\beta, \gamma \geq 0 > \alpha$ и γ, β или $|\alpha| \neq 1$ Кроме того, потребуем, чтобы $\beta\gamma + \alpha \geq 0$. Тогда для любых $r_1, r_2, r_3 > 0$ из отрезков l_1, l_2, l_3 можно сложить треугольник на евклидовой плоскости.*

Замечание. *Нетрудно убедится в том, что вышеуказанная теорема не может быть доказана для любого набора положительных чисел r_1, r_2, r_3 при положительных β, γ и отрицательном значении α без дополнительного ограничения.*

Воспользуемся обозначениями теоремы, сформулированной выше и обозначим через $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ внутренние углы при соответствующих вершинах треугольника. Внутренние углы $\theta_i, i = \{1, 2, 3\}$ являются функциями переменных $r_j, j = \{1, 2, 3\}$, для которых верно следующее:

Теорема. *Пусть веса α,β,γ удовлетворяют одному из следующих условий: (i) все три веса неотрицательны; (ii) $\beta\gamma + \alpha > 0$, причем веса β и γ неотрицательны, а вес α отрицателен. Тогда:*

1. $\partial\theta_i/\partial r_i < 0$;

2. $\partial\theta_j/\partial r_i > 0$ *для любых* $j \neq i$;

3. $\partial(\theta_i + \theta_j + \theta_k)/\partial r_k = 0$.

Замечание. *Невозможно доказать утверждение последней теоремы при* $\gamma = \beta \geq 0 > \alpha$ *без ограничения* $\gamma^2 + \alpha > 0$.

Обратимся к гиперболическому случаю, когда грани триангуляции имеют постоянную отрицательную кривизну -1. Аналогично предыдущему пункту рассмотрим грань $\triangle A_1A_2A_3$ и положим $w_{23} = \alpha, w_{13} = \beta$ и $w_{12} = \gamma$. Длины рёбер $l_{ij}, i, j = \{1, 2, 3\}, i \neq j$ грани $\triangle A_1A_2A_3$ определяются формулами

$$\operatorname{ch} l_{ij} = \operatorname{ch} r_i \operatorname{ch} r_j + \gamma \operatorname{sh} r_i \operatorname{sh} r_j. \tag{9}$$

Для гиперболического случая имеется утверждение не имеющее аналога в евклидовом случае.

Лемма. *Пусть* $\beta = \gamma \geq 0 \geq \alpha$. *Тогда существует треугольник с ребрами* l_{12}, l_{13}, l_{23} *при любых* $r_1, r_2, r_3 > 0$.

Следующие два утверждения аналогичны утверждениям в екввлидовом случае.

Лемма. *Пусть* $\beta, \gamma \geq 0 > \alpha$ *и* $\beta\gamma + \alpha > 0$ *(или* $\beta\gamma + \alpha = 0$, *но* $\beta \neq 1$ *и* $\gamma \neq 1$*). Тогда из отрезков* l_{12}, l_{13}, l_{23} *можно сложить треугольник на гиперболической плоскости при любых* $r_1, r_2, r_3 > 0$.

Теорема. *Пусть для весов* α, β *и* γ *выполняется одно из условий:*

(a) *все три веса неотрицательны;*

(b) *два веса* β *и* γ *неотрицательны, вес* α *отрицателен,* $\beta\gamma + \alpha > 0$;

Тогда:

1. $\partial\theta_i/\partial r_i < 0$ *при* $i = \{1, 2, 3\}$;

2. $\partial\theta_i/\partial r_j > 0$ *при* $i, j = \{1, 2, 3\}$ *и* $i \neq j$;

3. $\partial(\theta_i + \theta_j + \theta_k)/\partial r_i < 0$, *при* $i = \{1, 2, 3\}$.

Содержание главы 3

Численное моделирование решений комбинаторных потоков Риччи, не удовлетворяющих условиям теоремы Чоу и Луо, выявило, что в ряде случаев наблюдаются следующие закономерности: несколько параметров r_i стремятся к нулю при $t \to \infty$, но кривизны при этом имеют конечные пределы. Мы введем новое понятие: метрику упаковок кругов с вырождениями. Отметим, что вырождается только упаковка. Такие метрики должны служить пределами потоков Риччи при описанном выше вырождении. Для таких метрик мы определяем потоки Риччи в евклидовом и гиперболическом случаях и доказываем аналог теорем о сходимости решения к единственной метрике с одинаковыми кривизнами в невырожденных вершинах. При этом весовая функция удовлетворяет не условию $w \geqslant 0$, а более общему, связанному с условиями, полученными в главе 2. Изложим результаты более подробно.

Рассмотрим замкнутую поверхность X с триангуляцией T. Предполагается, что поднятие замкнутой грани или ребра в универсальное накрытие $\widetilde{X}$ является вложением. Обозначим множество вершин, ребер и граней триангуляции T через V, E, F соответственно. Множество вершин $V = \{A_1, A_2, \ldots, A_N\}$ триангуляции T представим в виде несвязного объединения двух подмножеств $V = V_n \bigsqcup V_d$ таких, что никакие две вершины из множества V_d не соединяются ребром. Подходящим образом перенумеровав вершины, можем считать, что $V_n = \{A_1, \ldots, A_M\}$, $V_d = \{A_{M+1}, \ldots, A_N\}$. Вершины из множества V_n будем называть *невырожденными*, а из множества V_d — *вырожденными*.

Определение. *Метрикой упаковки кругов с вырождениями называется набор $r = \{r_i \geqslant 0\}$ такой, что $r_i = 0$ только и тогда тогда, когда A_i — вырожденная вершина.*

Элемент триангуляции T (ребро или грань) назовём *невырожденным* тогда и только тогда, когда все его вершины *невырождены* и вырожденным в противном случае. Обозначим множество (не)вырожденных рёбер и граней через $E_d(E_n)$ и $F_d(F_n)$ соответственно. Очевидно, что $E = E_n \bigsqcup E_d$ и $F = F_n \bigsqcup F_d$. Иногда для удобства будем обозначать подмножество вершин и соответствующее подмножество индексов одним символом. Весовая функция определена только на невырожденных рёбрах, $w : E_n \to (-1, 1]$. Зафиксируем тройку (X, T, w). В евклидовом случае, когда все грани триангуляции T — плоские евклидовы треугольники, длина ребра определяется формулой (3). Для вырожденной вершины A_i кривизна K_i явно выражается через веса формулой

$$K_i = 2\pi - \sum_{\triangle A_i A_j A_K \in F} (\pi - \arccos(w_{jk}))\,.$$

Комбинаторный поток Риччи для метрики с вырождениями — это система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dr_i}{dt} = -K_i r_i,\ i = 1, \ldots, M. \tag{10}$$

Усредненной кривизной K^{av} для метрики упаковки кругов с вырождениями называется величина:

$$K^{av} = \frac{1}{M}\left(2\pi\chi(X) - \sum_{j=M+1}^{N} K_j\right). \tag{11}$$

Нормированный комбинаторный поток Риччи — это система дифференциальных уравнений

$$\frac{dr_i}{dt} = -(K_i - K^{av}) r_i,\ i = 1, \ldots, M. \tag{12}$$

Лемма. *Набор функций $r_i(t), i = 1, \ldots, M$ является решением уравнений (10) тогда и только тогда, когда $e^{K^{av}t} r_i(t)$ — решение уравнений (12).*

Лемма. $\prod_{j=1}^{M} r_i(t)$ *— первый интеграл системы уравнений (12).*

Пусть на гранях выбрана гиперболическая метрика постоянной кривизны -1, а длина ребра l_{ij}, соединяющего вершины A_i и A_j, определяется формулой (9). Если ребро является вырожденным, то последнее слагаемое в формуле (9) равно нулю, поэтому вес w_{ij} не определяется, а $l_{ij} = r_i$ при $r_i = 0$. Комбинаторным гиперболическим потоком Риччи называется система ОДУ вида

$$\frac{dr_i}{dt} = -K_i \operatorname{sh} r_i,\ i = 1, \ldots, M. \tag{13}$$

Тройка (X, T, w) задает пространство метрик $\mathcal{R}_w$, которое в свою очередь является подмножеством таких r из пространства $\mathbb{R}_+^M \times (0, \ldots, 0) \subset \mathbb{R}^N$, что на каждой грани триангуляции T выполняются три неравенства треугольника. *Будем говорить, что выполняются условия (W), если весовая функция w удовлетворяет условиям леммы, приведенной ниже.*

Лемма. *Пусть каждая грань триангуляции удовлетворяет одному из условий:*
(a) *грань невырождена и весовая функция на её ребрах принимает неотрицательные значения;*
(b) *грань невырождена, весовая функция на одном из ребер грани принимает*

значение $\alpha < 0$, на двух других ребрах $\beta, \gamma > 0$, при этом выполняется неравенство $\alpha + \beta\gamma \geqslant 0$;
(c) *грань вырождена, значение весовой функции на невырожденном ребре грани отлично от* 1*;*
Тогда и для евклидова, и для гиперболического случаев имеем $\mathcal{R}_w = \mathbb{R}^M_+$.

Лемма. *Пусть в грани $\triangle A_iA_jA_k$ вершины A_j, A_k невырождены. Тогда*

$$\frac{\partial\theta_k}{\partial r_j} r_j = \frac{\partial\theta_j}{\partial r_k} r_k \text{ для евклидова случая,} \tag{14}$$

$$\frac{\partial\theta_k}{\partial r_j} \operatorname{sh} r_j = \frac{\partial\theta_j}{\partial r_k} \operatorname{sh} r_k \text{ для гиперболического случая.} \tag{15}$$

Из этих двух лемм следует существование функции F на $\mathbb{R}^M_+$, для которой $dF = \sum K_i du_i$.

Лемма. *Пусть $\triangle A_iA_jA_k$ — грань триангуляции. Углы при вершинах A_i,A_j,A_k обозначим через θ_i, θ_j, θ_k соответственно. Предположим, что условие (W) выполняется.*
(a) *Пусть $\triangle A_iA_jA_k \in F_n$, тогда*
$(a1)$ $\frac{\partial\theta_p}{\partial r_p} < 0$, $p \in \{i, j, k\}$;
$(a2)$ $\frac{\partial\theta_p}{\partial r_q} > 0$, $p, q \in \{i, j, k\}$, $p \neq q$;
$(a3)$ $\frac{\partial(\theta_i+\theta_j+\theta_k)}{\partial r_p} = 0$ *для евклидовой метрики на гранях и* $\frac{\partial(\theta_i+\theta_j+\theta_k)}{\partial r_p} < 0$ *для гиперболической,* $p \in \{i, j, k\}$.
(b) *Пусть $A_i \in V_d$, тогда*
$(b1)$ $\frac{\partial\theta_j}{\partial r_j} < 0$ *и* $\frac{\partial\theta_k}{\partial r_k} < 0$;
$(b2)$ $\frac{\partial\theta_j}{\partial r_k} < 0$ *и* $\frac{\partial\theta_j}{\partial r_k} < 0$;
$(b3)$ $\frac{\partial(\theta_j+\theta_k)}{\partial r_p} = \frac{\partial(\theta_i+\theta_j+\theta_k)}{\partial r_p} = 0$ *для евклидовой метрики на гранях и* $\frac{\partial(\theta_i+\theta_k)}{\partial r_p} = \frac{\partial(\theta_j+\theta_j+\theta_k)}{\partial r_p} < 0$ *для гиперболической, здесь* $p \in \{j, k\}$.
Более того, частные производные $\frac{\partial\theta_n}{\partial r_m}$ являются элементарными функциями от r_i, r_j, r_k, где $n, m \in \{i, j, k\}$.

Эта лемма позволит нам доказать выпуклость функции F.

Предложение. *Пусть (X, T, w) — замкнутая триангулированная поверхность с весами. Пусть функции $r_i(t), i = 1, \ldots, M$ удовлетворяют системе уравнений $\frac{dr_i}{dt} = -L_i(r_1, \ldots, r_M)r_i$. Тогда производную внутреннего угла θ_i^{jk} при невырожденной вершине A_i грани $\triangle A_iA_jA_k$ можно представить в виде:*

1. $\frac{d\theta_i^{jk}}{dt} = -B_{ij}(L_j - L_i) - B_{ik}(L_k - L_i) - B_i\lambda L_i$ *для грани* $\triangle A_iA_jA_k \in F_n$*;*

2. $\frac{d\theta_i^{jk}}{dt} = -B_{ij}(L_j - L_i) - B_i\lambda L_i$ *для грани* $\triangle A_iA_jA_k \in F_d$ *с вершиной* $A_k \in V_d$*.*

Здесь $\lambda = 0$ *для случая евклидовой метрики на гранях и* $\lambda = -1$ *для гиперболической.*

Предложение. *Пусть весовая функция* w*, заданная на рёбрах триангуляции, удовлетворяет условию* (W)*. Тогда при выполнении условий предыдущего предложения для* $1 \leqslant i \leqslant M$ *выполняется равенство*

$$\frac{dK_i}{dt} = \sum_{i\backsim j, j\leqslant M} C_{ij}(L_j - L_i) + \lambda C_i L_i,$$

где $C_{ij} = C_{ji}$ *и* C_{ij} *— положительные элементарные функции переменных* $r_1, \ldots, r_M$*, суммирование идёт по невырожденным вершинам* A_j*, смежным с вершиной* A_i*.*

Решение комбинаторного потока Риччи для метрик с вырождениям существует при $t \in [0, \infty)$. Введем обозначения $\overline{M}(t) = max(K_1(t), \ldots, K_M(t))$ и $\underline{M}(t) = min(K_1(t), \ldots, K_M(t))$.

Предложение. *Пусть* $r(t) = (r_1(t), \ldots, r_N(t))$ *— решение уравнений (12) или (13) на некотором интервале. Тогда*
(1) *для евклидова случая функция* $\overline{M}(t)$ *невозрастающая, а функция* $\underline{M}(t)$ *— неубывающая;*
(2) *для гиперболического случая функция* $\max(0, \overline{M}(t))$ *невозрастающая, а функция* $\min(0, \underline{M}(t))$ *— неубывающая.*

Предложение. *Пусть* $r(t) = (r_1(t), \ldots, r_N(t))$ *— решение нормализованного потока Риччи. Пусть* $r(t)$ *содержится в компактном подмножестве пространства* $\mathbb{R}_+^M$*. Тогда* $r(t)$ *экспоненциально быстро сходится к точке* $(r_1, \ldots, r_M) \in \mathbb{R}_+^M$*, для которой кривизна в каждой невырожденной вершине равна* $K^{av} = \frac{1}{M}\left(2\pi\chi(X) - \sum\limits_{j\geqslant M+1} K_j\right)$*.*

Предложение. *Пусть* $r(t) = (r_1(t), \ldots, r_M(t))$ *— решение потока (13). Если кривая* $r(t)$ *содержится в компактном подмножестве* $\mathbb{R}^M$*, то она сходится экспоненциально быстро в точку* $(r_1, \ldots, r_M) \in R_+^M$*, которая соответствует нулевому набору кривизн* $K_1, \ldots, K_M$*.*

Воспользуемся следующей заменой переменных: для евклидова случая положим $u_j = \ln r_j$, а для гиперболического случая $u_j = \ln \operatorname{th}(r_j/2)$. Такая замена позволяет привести оба потока Риччи (10) и (13) к виду

$$\frac{du_j}{dt} = -K_j,\ j = 1, \ldots, M, \tag{16}$$

где K_j — некоторые функции переменных $u_1, \ldots, u_M$. При выполнении условий (W) точка $u = (u_1, \ldots, u_M)$ может быть любой точкой пространства $\mathcal{U} = \mathbb{R}^M$ в евклидовом случае и пространства $\mathcal{U} = (-\infty, 0)^M \subset \mathbb{R}^M$ в гиперболическом случае. Утверждение последней леммы можно переписать в следующем виде:

$$\frac{\partial K_i}{\partial u_j} = \frac{\partial K_j}{\partial u_i}. \tag{17}$$

Следовательно, дифференциальная форма $\Omega = \sum\limits_{i=1}^{M} K_i du_i$ замкнута, то есть $d\Omega = 0$. Так как $\mathcal{U}$ — односвязное пространство, то из леммы Пуанкаре следует, что существует гладкая функция $F(u_1, u_2, .., u_n)$, заданная на $\mathcal{U}$, такая, что $dF = \Omega$.

Предложение. *Пусть весовая функция удовлетворяет условиям* (W). *Тогда*

(a) *в гиперболическом случае функция* $F(u_1, \ldots, u_M)$ *строго выпукла;*

(b) *в евклидовом случае функция* $F(u_1, \ldots, u_M)$ *строго выпукла на гиперплоскости* $\sum\limits_{i=1}^{N} u_i = 0$.

Предложение. *Пусть* X *— замкнутая поверхность с триангуляцией* T *и весовой функцией* w, *удовлетворяющая условиям* (W). *Пусть* $I \subsetneqq V_N$. *Обозначим через* D_I *множество всех вырожденных вершин, смежных с вершинами из* I. *Пусть существуют пределы последовательностей* $\lim\limits_{n\to\infty} r_i^{(n)} = 0$ *при* $i \in I$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty} r_i^{(n)} > 0$ *при* $i \in \{1, \ldots, M\} \backslash I$ *для гиперболического или евклидова случаев* $r^{(n)} = r_i^{(n)} : i = 1, \ldots, M$. *Тогда*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i\in I} K_i(r^{(n)}) + \sum_{j\in D_I} K_j = -\sum_{(e,v)\in Lk(I\cup D_I)} (\pi - \arccos w(e)) + 2\pi\chi(F_{I\cup D_I}). \tag{18}$$

Более того, как в гиперболическом, так и в евклидовом случаях для любого собственного подмножества $I \subsetneqq V_N$ *выполняется неравенство*

$$\sum_{i\in I} K_i(r) + \sum_{j\in D_I} K_j > -\sum_{(e,v)\in Lk(I\cup D_I)} (\pi - \arccos w(e)) + 2\pi\chi(F_{I\cup D_I}). \tag{19}$$

Главными результатами главы 3 являются следующие теоремы.

Теорема. *Пусть X — замкнутая поверхность с фиксированными триангуляцией T и весовой функцией w, удовлетворяющей условиям (W). Решение нормализованного потока Риччи (12) сходится, независимо от начальной метрики, тогда и только тогда, когда для любого собственного подмножества $I \subsetneqq V_N$ верно неравенство*

$$|I|K^{av} + \sum_{j \in D_I} K_I > - \sum_{(e,v) \in Lk(I \cup D_I)} (\pi - \arccos w(e) + 2\pi\chi(F_{I \cup D_I})). \qquad (20)$$

Кроме того, если решение сходится, то оно сходится экспоненциально быстро к единственной метрике с набором одинаковых кривизн $K_i = K^{av}, i = 1, \dots, M$ в невырожденных вершинах.

Теорема. *Пусть T — триангуляция замкнутой поверхности X с отрицательной эйлеровой характеристикой. Пусть w — весовая функция на ребрах, удовлетворяющая условиям (W). Решение гиперболического потока Риччи (13) сходится для любой начальной метрики тогда и только тогда, когда для любого подмножества $I \subsetneqq V_N$ верно неравенство*

$$\sum_{j \in D_I} K_j > - \sum_{(e,v) \in Lk(I \cup D_I)} (\pi - \arccos w(e)) + 2\pi\chi(F_{I \cup D_I}). \qquad (21)$$

Более того, если решение сходится, то оно сходится экспоненциально быстро к метрике с набором кривизн $K_i = 0, i = 1, \dots, M$.

Содержание главы 4

Глава посвященна потоку средней кривизны на поверхности, вложенной в $\mathbb{R}^3$. *Потоком средней кривизны* для замкнутого многообразия M^n называется семейство вложений $f_t : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$, $n \geqslant 1$, гладко зависящее от t, которое удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial f(\bar{x}, t)}{\partial t} = -H(\bar{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\bar{x}, t). \qquad (22)$$

В отличие от двумерного потока Риччи, под действием потока средней кривизны у поверхности могут формироваться особенности. Известна следующая теорема:

Теорема (Huisken[4])**.** *Пусть f_0 — вложение гладкого замкнутого многообразия M^n в $\mathbb{R}^{n+1}$. Пусть известно, что собственные значения второй квадратичной* *формы подмногообразия M_0^n строго больше нуля для всех $\bar{x} \in M_0^n$. Тогда уравнение (22) с начальным условием $f(\bar{x}, 0) = f_0(\bar{x})$ имеет гладкое решение на конечном интервале времени $0 \leqslant t < T$ такое, что поверхность M_t^n стягивается в некоторую точку O при $t \to T$; нормализованное условием постоянства объема многообразия, уравнение (22) с начальным условием $\tilde{f}(\bar{x}, 0) = \tilde{f}_0(\bar{x})$ имеет гладкое решение при $\tilde{t} \to \infty$. В то же время $\tilde{M}_{\tilde{t}}$ стремится принять форму сферы площади $|M_0|$. Подмногообразие $\tilde{M}_{\tilde{t}}$ получается из M_t гомотетией с центром в точке O.*

В этой теореме семейства $\tilde{f}_t(\bar{x})$ и $f_t(\bar{x})$ пропорциональны друг другу с точностью до некоторого коэффициента $\psi(t)$ таким, что объем многообразий, заданных семейством вложений $\tilde{f}_t(\bar{x})$, равны объему многообразия M_0^n для всех t, то есть $\tilde{f}_t(\bar{x}) = \psi(t) \cdot f_t(\bar{x})$, причем $\tilde{t}(t) = \int_0^t \psi^2(\tau) d\tau$.

В данной главе описан алгоритм интегрирования потока средней кривизны на двумерной поверхности вращения. Алгоритм основан на методе конечных элементов и показал свою устойчивость на большом интервале изменения времени. Алгоритм работает для любых поверхностей вращения, независимо от того, удовлетворяет исходное вложение условиям теоремы Хьюскена или нет. Наиболее интересны его применения к поверхностям вращения, не удовлетворяющим теоремы Хьюскена. Приведён ряд примеров таких поверхностей. Среди них есть примеры, для которых предельное многообразие — вложенная сфера. Также приведены примеры, для которых под действием потока средней кривизны развивается особенность вложения поверхности. Основная вычислительная часть программной реализации предложенного алгоритма была использована при моделировании комбинаторных потоков Риччи на триангулированных поверхностях и с различными весовыми функциями w.

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность Ф. Ю. Попеленскому за постановку задачи, поддержку и внимание к работе.

Автор благодарит академика РАН Анатолия Тимофеевича Фоменко за постоянное внимание и поддержку.

Автор благодарит профессора Андрея Александровича Ошемкова за полезные замечания и обсуждения.

Автор выражает благодарность всем сотрудникам кафедры дифференциальной геометрии и приложений за творческую и доброжелательную атмосферу.

Список публикаций автора по теме диссертации

Статьи в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ

1. R. Yu. Pepa, Th. Yu. Popelensky, *Equilibrium for a Combinatorial Ricci Flow with Generalized Weights on a Tetrahedron,* Regular and Chaotic Dynamics, 2017, Vol. 22, № 5, pp. 566-578 (лично Пепа Р.Ю. принадлежат следующие результаты: теорема 2, теорема 3, теорема 4 и их доказательства). Журнал индексируется в Scopus, РИНЦ, WoS, импакт фактор 1,383.

2. R. Yu. Pepa, Th. Yu. Popelensky, *On Convergence of Combinatorial Ricci Flow on Surfaces with Negative Weights*, Lobachevskii Journal of Mathematics, 2017, Vol. 38, № 6, pp. 1061-1068 (лично Пепа Р.Ю. принадлежат следующие результаты: лемма 1, лемма 2, теорема 1, лемма 5, теорема 2 и их доказательства). Журнал индексируется в Scopus, РИНЦ, RSCI WoS, импак тфактор 0,315.

3. Р. Ю. Пепа, *Моделирование потоков средней кривизны на поверхности вращения,* Журнал Вычислительной математики и математической физики, 2019, том 59, №2, сс. 122-133. (Перевод: R. Yu. Pepa, Simulation of Mean Curvature Flows on Surfaces of Revolution, Computational Mathematics and Mathematical Physics, 2019, Vol. 59, No. 2, pp. 290–300). Журнал индексируется в Scopus, РИНЦ, RSCI WoS, импакт фактор 0,475.

4. R. Yu. Pepa, Th. Yu. Popelensky, *Combinatorial Ricci Flow for degenerate circle packing metric,* Regular and Chaotic Dynamics, 2019, Vol. 24, № 3, pp. 198-311 (лично Пепа Р.Ю. принадлежат следующие результаты: лемма 4, предложение 2, предложение 4, теорема 3, теорема 4 и их доказательства). Журнал индексируется в Scopus, РИНЦ, WoS, импакт фактор 1,383.

Тезисы докладов

5. Р. Ю. Пепа, *Обобщенные комбинаторные потоки Риччи на некоторых многогранниках*, материалы Международной конференции «Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна — 2016», Научная книга Воронеж, тезисы.

6. Р. Ю. Пепа, *Обобщенный комбинаторный поток Риччи на тетраэдре*, материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2016» (2016), МАКС Пресс, Москва.

7. Р. Ю. Пепа, *Обобщенный комбинаторный поток Риччи с отрицательными весам*, материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2017» (2017), МАКС Пресс, Москва.

8. Р. Ю. Пепа, *Сходимость комбинаторного потока Риччи с обобщенными весами*, материалы Международной конференции «Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна — 2018», Научная книга Воронеж, тезисы.

9. R. Yu.Pepa, *Discrete geometric flows on two-dimensional compact oriented surfaces*, the international Conference «XX GEOMETRICAL SEMINAR» Faculty of Mathematics University of Belgrade, Vrnjačka Banja, Serbia May 20-23, 2018.

10. R. Yu.Pepa, Th. Yu. Popelensky, *Discrete geometric flows on two-dimensional compact oriented surfaces*, International Conference on Topology and its Application, the international Conference Nafpaktos, Greece, July 7—11, 2018.