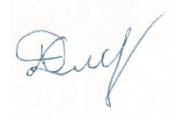


На правах рукописи



КОЛЕСОВ Даниил Александрович

**ВОЛНЫ В ОДНОМЕРНЫХ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ
МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ
С УПРУГО-ИНЕРЦИОННЫМИ И НЕОДНОРОДНЫМИ
ОСНОВАНИЯМИ**

01.02.06 – Динамика, прочность машин, приборов и аппаратуры

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Нижний Новгород – 2019

Работа выполнена в Институте проблем машиностроения Российской академии наук

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор **Ерофеев Владимир Иванович**

Официальные оппоненты:

Попов Виктор Сергеевич, доктор технических наук, профессор, Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., профессор кафедры «Прикладная математика и системный анализ».

Федотенков Григорий Валерьевич, кандидат физико-математических наук, доцент, Московский авиационный институт, доцент кафедры «Сопротивление материалов, динамика и прочность машин».

Ведущая организация:

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Кубанский государственный университет».

Защита состоится «26» декабря 2019 г. в 15:00 на заседании диссертационного совета Д 212.166.09 при Национальном исследовательском Нижегородском государственном университете им. Н.И. Лобачевского по адресу: 603950, Н. Новгород, пр. Гагарина, 23, корпус 6.

С диссертацией можно ознакомиться в фундаментальной библиотеке Национального исследовательского Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского и на сайте **diss.unn.ru/987**

Автореферат разослан «20» ноября 2019 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета



Горохов Василий Андреевич

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы диссертации. В современных машинах и механизмах широко применяются элементы и узлы, движущиеся относительно закреплений или размеры которых могут изменяться в процессе работы. Такие элементы имеются, например, в шахтных подъемниках, силовых передачах с гибкими связями, транспортерах, ленточных пилах, машинах по перемотке нитей, ткани, бумаги и т.п. Изучение динамического поведения подобных устройств приводит к необходимости анализа задачи о взаимодействии распределенной механической системы (струны, стержня, мембраны, пластины) с движущимися по ней нагрузками или закреплениями. К этому же классу относятся проблемы, возникающие при изучении динамики мостов, движения по насыпи, железнодорожному полотну, ледяному покрову водоемов.

Растущий пассажиро- и товаропоток порождает необходимость в увеличении скорости движения транспорта. В настоящее время скорость поездов приблизилась, а в некоторых случаях и превысила скорость распространения волн в железнодорожном пути и контактной подвеске. В этой ситуации излучение волн играет существенную роль в динамическом поведении системы, поскольку реакция упругих волн может привести к неустойчивости движущегося высокоскоростного объекта.

Степень разработанности темы. Путевая структура или контактный провод рассматриваются, как правило, в виде одномерной системы (струна, балка), взаимодействующей с деформируемым основанием. Для расчета конструкций, лежащих на грунте, в основном, используются три модели основания: винклерова модель; модель упругого полупространства; комбинированная модель упругого основания.

Многими исследователями отмечается, что наиболее приемлемой для практических целей моделью является винклерово основание, поскольку результаты расчета конструкций с использованием этой модели близко соответствуют опытным данным.

При изучении движения нагрузок вдоль одномерных упругих систем основание задается линейно-упругим (основание Винклера) или вязкоупругим, что позволяет учитывать возможность его сопротивления силовому воздействию. При этом основание как динамическая система, как правило, не рассматривается.

А.И. Весницкий предложил математическую модель, обобщающую модель Винклера путем учета инерционности упругого основания, с которым взаимодействует струна, совершающая малые поперечные колебания.

Проведенные ранее исследования волновых процессов в одномерных системах, лежащих на упругом основании, выявили наличие зон непропускания, где действительным частотам не соответствуют действительные волновые числа. Если частота колебаний нагрузки меньше, так называемой, частоты отсечки, то при малых скоростях движения нагрузки вдоль таких систем волны не излучаются. При движении нагрузки со скоростью, превышающей критическую, происходит процесс волнообразования.

Несмотря на актуальность этих задач, ряд вопросов динамики систем с движущимися контактами остается неизученным, в частности, не исследовано влияние инерционности упругого основания, неоднородности и нестационарности его параметров на генерацию волн.

Цель работы состоит в развитии волновой динамики распределенных механических систем, взаимодействующих с упруго-инерционными и неоднородными основаниями, несущих, в частности, движущиеся нагрузки.

В соответствии с изложенной целью в работе поставлены и решены следующие **задачи**:

- Построение самосогласованной математической модели, включающей в себя одномерную гибкую направляющую, упруго-инерционное основание и движущуюся осциллирующую нагрузку.
- Изучение генерации волн источником, движущимся по деформируемой направляющей, лежащей на упруго-инерционном основании.
- Изучение процессов модуляции и демодуляции волн в системах, содержащих упругое основание, параметры которого изменяются.

Научную новизну работы составляют следующие результаты:

- Разработана новая самосогласованная математическая модель, включающая в себя одномерную гибкую направляющую, упруго-инерционное основание и движущуюся осциллирующую нагрузку.
- Впервые показано, что наличие инерционности основания приводит к появлению в спектре упругой направляющей двух критических частот (частот отсечки), а движущаяся вдоль направляющей нагрузка генерирует в ней бегущие волны при любых скоростях движения и частотах колебаний источника.
- Впервые исследованы эффекты модуляции и демодуляции волн в системах, содержащих упругое основание, параметры которого изменяются.

Теоретическая значимость работы

Разработанные математические модели имеют существенное теоретическое значение для развития механики одномерных распределенных систем, взаимодействующих с деформируемыми основаниями. Результаты проведенных исследований могут быть использованы при решении задач о генерации волн в элементах конструкций высокоскоростными движущимися источниками.

Практическая значимость работы

Выполненные исследования волновых процессов в упругих направляющих, взаимодействующих с движущимися объектами, позволяют на этапе конструирования наземных транспортных средств проводить оценку энергозатрат на преодоление сил волнового сопротивления движению и вносить допустимые изменения в конструкции с целью их уменьшения.

Методология и методы диссертационного исследования

Для вывода уравнений согласованного динамического поведения направляющей и движущейся нагрузки применяется вариационный принцип Гамильтона-Остроградского. Анализ дисперсионных зависимостей, излучения волн движущимся источником, определение критических скоростей движения, определение силы волнового давления проводится методом бегущих волн с использованием кинематического инварианта (условия равенства фаз излучаемых волн в движущейся системе отсчета фазе колебаний нагрузки) и учетом условия излучения Мандельштама. Для вывода эволюционных уравнений нелинейной волновой динамики используется метод многих масштабов. Анализ нелинейных стационарных волн проводится методом фазовой плоскости. Для определения условий модуляционной неустойчивости квазигармонических волн применяется критерий Лайтхилла.

Основные положения, представляемые к защите:

- Самосогласованная математическая модель, включающая в себя одномерную гибкую направляющую, упруго-инерционное основание и движущуюся осциллирующую нагрузку.
- Результаты исследования генерации волн источником, движущимся по одномерной гибкой направляющей, лежащей на упруго-инерционном основании.
- Результаты исследования модуляции и демодуляции волн в системах, содержащих упругое основание, параметры которого изменяются.

Достоверность результатов работы обеспечивается:

- строгостью использованного математического аппарата,
- соответствием выявленных эффектов явлениям, наблюдаемым на практике,
- совпадением полученных результатов в частных случаях с результатами, ранее полученными другими авторами.

Апробация результатов

Материалы диссертации докладывались на: III Международной Школе-конференции молодых ученых «Нелинейная динамика машин» (Москва, ИМАШ РАН, 2016); Международной научно-технической конференции «Современные направления и перспективы развития технологий обработки и оборудования в машиностроении» (Севастополь, 2018); IX Всероссийской научной конференции им. Ю.И. Неймарка «Нелинейные колебания механических систем» (Нижний Новгород, ННГУ, 2012); Всероссийской научной конференции "Проблемы прочности, динамики и ресурса" (Н.Новгород, ННГУ, 2015); XII Всероссийском семинаре-совещании "Инженерно-физические проблемы новой техники" (Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2016); XXIII и Юбилейной XXV Международных инновационно-ориентированных конференциях молодых ученых и студентов (Москва, ИМАШ РАН, 2011, 2013); 19 и 20 Нижегородских сессиях молодых ученых «Технические науки» (Н.Новгород, 2014, 2015). В полном объеме диссертация обсуждалась на научном семинаре Института проблем машиностроения РАН (2018, 2019) и научном семинаре Института механики Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского (2019).

Публикации

По теме диссертации опубликовано 16 работ [1-16], в том числе, 5 научных статей в журналах из «Перечня ведущих рецензируемых научных журналов и изданий», утвержденного ВАК РФ, 1 монография.

Личный вклад автора заключается в разработке самосогласованной математической модели, включающей в себя гибкую нерастяжимую струну, упруго-инерционное основание и движущуюся осциллирующую нагрузку. Анализе качественно-различных случаев генерации волн нагрузкой, движущейся по струне, лежащей на упруго-инерционном основании, в зависимости от скорости движения и частоты колебаний нагрузки. Выводе уравнения динамики нелинейной струны, его аналитическом решении и качественном исследовании. Получении нелинейного уравнения Шредингера для амплитуды квазигармонической поперечной волны, распространяющейся в струне, лежащей на упруго-инерционном основании и для квазигармонической плоской сдвиговой волны, распространяющейся в пластине, лежащей на упругом основании, параметры которого изменяются по закону бегущей волны. Анализе модуляции и демодуляции квазигармонических упругих волн.

В совместных работах Ерофееву В.И. принадлежит постановка задачи, общее руководство исследованиями и участие в анализе результатов; Лисенковой Е.Е. – проведение анализа волнового сопротивления движению нагрузок; Леонтьевой А.В., Мальханову А.О., Сандалову В.М. – проведение анализа нелинейных стационарных волн на фазовой плоскости. Соавторами монографии Плеховым А.С. и Хазовым написана глава 3, материалы которой не вошли в диссертацию.

Структура и объём диссертации

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы. Работа содержит 133 листа машинописного текста, 33 рисунка, 2 таблицы; список литературы включает 223 наименования.

Диссертационная работа выполнена при поддержке:

Диссертационная работа проводилась по программе ФНИ Государственных академий наук на 2013-2020гг. (Раздел 3 «Технические науки». Подраздел 30 «Методы анализа и синтеза многофункциональных механизмов и машин для перспективных технологий и новых человеко-машинных комплексов. Динамические и виброакустические процессы в технике»). По теме 0055-2014-0002, № госрегистрации 01201458047. Развитие теории нелинейной волновой динамики и виброакустики машин и ее приложение к анализу устойчивости распределенных механических систем с высокоскоростными движущимися нагрузками, созданию методов и средств диагностики конструкций на ранних стадиях повреждения и разработке высокоэффективных адаптивных систем виброзащиты машин (Научный руководитель: профессор Ерофеев В.И.)

И при поддержке:

- гранта Российского научного фонда «Динамика и устойчивость систем «грунт-рельсовая направляющая – высокоскоростной движущийся объект» с учетом эффектов излучения волн и накопления повреждений в материалах конструкций» (РНФ №14-19-01637, руководитель: профессор Ерофеев В.И.);
- гранта Российского фонда фундаментальных исследований «Развитие нелинейной волновой динамики для решения проблем прочности, остаточного ресурса, неразрушающего контроля, виброзащиты машин и конструкций» (РФФИ №15-08-01836 А, руководитель: профессор Ерофеев В.И.);
- гранта Российского фонда фундаментальных исследований «Динамика и устойчивость высокоскоростных объектов, движущихся по рельсовым направляющим» (РФФИ №17-08-01096 А, руководитель: старший научный сотрудник Герасимов С.И.)

Четвертая глава выполнена при поддержке Федеральной целевой программы «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2014-2020 годы» в рамках соглашения № 14.578.21.0246 (уникальный идентификатор RFMEFI57817X0246).

Благодарности

Автор выражает благодарность сотрудникам ИПМ РАН Ерофееву В.И., Леонтьевой А.В., Лисенковой Е.Е., Мальханову А.О., сотруднику ННГУ Сандалову В.М., в соавторстве с которыми были опубликованы основные труды автора диссертации.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обосновывается актуальность темы диссертационной работы и приводится ее общая характеристика.

Первая глава посвящена обзору работ по динамике деформируемых систем, несущих движущиеся нагрузки, по основным направлениям разработки и совершенствования методов расчета конструкций на действие подвижных нагрузок. Отмечен вклад в формирование и развитие указанного научного направления следующих исследователей: О. Мора, Э. Винклера, Ф. Виллиса, Дж. Стокса, А.Н. Крылова, С.П. Тимошенко, А.Г. Барченкова, В.В. Болотина, А.П. Филиппова, С.С. Кохманюка, В.Л. Бидермана, А.И. Весницкого, С.В. Крысова, Г.А. Уткина, В.П. Болдина, С.А. Сьянова, В.А. Быченкова, В.В. Холуёва, Л.В. Филатова, Е.Е. Лисенковой, А.В. Метрикина, А.В. Кононова, С.А. Веричева, А.В. Вострухова, Г.Г. Денисова, В.В. Новикова, С.И. Герасимова, В.И. Ерофеева, В.Г. Камчатного, С.В. Бутовой, И.И. Иванченко, Г.Б. Муравского, Ю.Д. Каплунова, Т.В. Суворовой, С.Н. Гаврилова, А.Д. Сергеева, Л.А. Игумнова, Д.В. Тарлаковского, Г.В. Федотенкова, Л. Фрибы, Р. Богача, К. Кнота, К. Попа, Г. Дитермана, А. Сяукера, Р. Вулферта, С. Бруни, М. Гао, И. Пэна, Я. Янга, Я. Ву, Я. Гарга, А. Матсура, С. Миязаки, М. Канамори и других.

Проведен также обзор диссертационных исследований по волновой динамике упругих систем, взаимодействующих с движущимися нагрузками, включающий в себя анализ докторских диссертаций Г.А. Уткина, С.В. Крысова, А.В. Метрикина, Т.В. Суворовой, С.Н. Веричева, С.Н. Гаврилова, А.Д. Сергеева, кандидатских диссертаций В.П. Болдина, С.А. Сьянова, Е.Е. Лисенковой, В.А. Быченкова, С.Б. Маланова, В.В. Кажеева, М.Л. Сазоновой (Смирновой), А.В. Вострухова, Л.В. Филатова, А.В. Кононова, С.А. Усошина, С.В. Бутовой, М.В. Точилина, Ю.В. Богданова, А.С. Оконечникова.

В заключительной части главы формулируется цель и задачи исследования.

Во второй главе изучается динамика струны (ее объемная плотность ρ_0 ; площадь поперечного сечения S), лежащей на упруго-инерционном основании (жесткость которого γ , погонная масса ρ_g) и взаимодействующей с движущимся источником.

Уравнения динамики записываются в виде (задача А.И. Весницкого):

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\gamma}{\rho_0 S} (u_1 - u_2) = 0 \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \frac{2\gamma}{\rho_g} u_2 = \frac{\gamma}{\rho_g} u_1 \end{cases} \quad (2.1)$$

Через u_1 и u_2 обозначены поперечные отклонения струны и средней линии «постели» от невозмущенного положения (рис. 1). В начальный момент времени струна была натянута с силой N и ее положение совпадает с осью x .

Первое из уравнений системы (2.1) описывает волны, распространяющиеся вдоль струны, а второе – вибрации массива осцилляторов, взаимодействующих с колебаниями

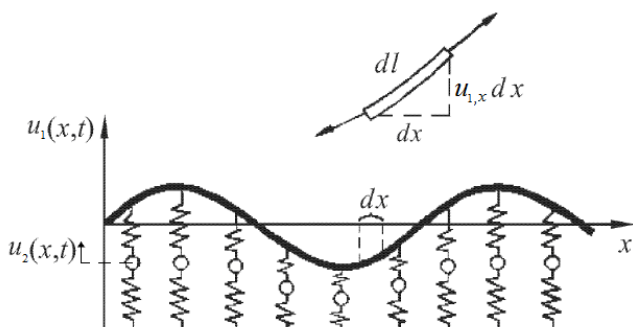


Рис. 1

струны; $c = \sqrt{N/(\rho_0 S)}$ - скорость, с которой распространялась бы поперечная волна, если бы струна не взаимодействовала с упруго-инерционным основанием.

Предполагается, что движущаяся по неизвестному закону $x = l(t)$ нагрузка представляет собой массу m , на которую действует поперечная гармоническая сила частоты Ω (рис. 2).

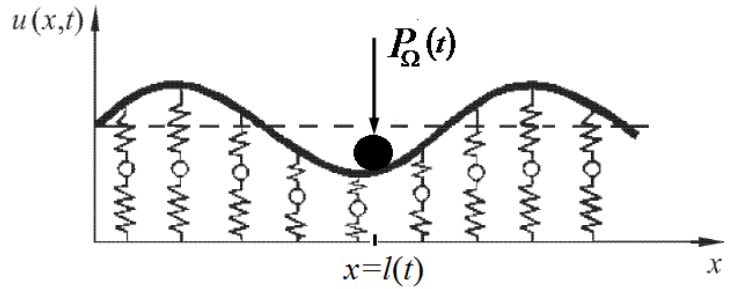


Рис. 2

Динамическое поведение одномерной упругой системы и движущейся по ней нагрузки взаимообусловлены, а именно: характер колебаний струны зависит от закона движения нагрузки, а движение последней происходит как под

действием внешних сил, так и сил реакции со стороны одномерной системы, включая силы давления волн. Уравнения согласованного динамического поведения направляющей и движущейся нагрузки, дополняющие систему (2.1), имеют вид:

$$u_1(l-0, t) = u_1(l+0, t) = u_0(t), \quad u_2(l-0, t) = u_2(l+0, t) \quad (2.2)$$

$$m\ddot{u}_0 = \rho_0 S (c^2 - \dot{l}^2) [u_{1x}] + P_\Omega(t) \quad (2.3)$$

$$[u_{2t}] = 0 \quad (2.4)$$

$$m\dot{l} = -[T - \dot{l}p] + R \quad (2.5)$$

Здесь

$$T = \frac{1}{2} \left\{ \rho_0 S \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} \right)^2 + \rho_g \left(\frac{\partial u_2}{\partial t} \right)^2 + N \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \right)^2 - \gamma [u_2^2 + (u_1 - u_2)^2] \right\}, \quad p = -\rho_0 S \frac{\partial u_1}{\partial t} \frac{\partial u_1}{\partial x} - \rho_g \frac{\partial u_2}{\partial t} \frac{\partial u_2}{\partial x},$$

p – плотность волнового импульса, T – плотность его потока, квадратные скобки означают разность предельных значений стоящих в них величин справа и слева от движущей нагрузки, $u_0(t)$ – поперечное смещение массы m .

Выражения (2.2) являются условиями непрерывности, а (2.3)-(2.5) выражают баланс обобщенных сил при $x = l(t)$. Первое слагаемое в (2.5) определяет продольную составляющую силы реакции со стороны направляющей (силу давления волн), а второе – внешнюю силу. При движении нагрузки с постоянной скоростью ($\dot{l}(t) = V = \text{const}$) под R понимается сила, необходимая для поддержания заданного закона движения контакта.

В п.2.2 проводится расчет дисперсионных характеристик струны, лежащей на упруго-инерционном основании.

Дисперсионное уравнение, связывающее частоту и волновое число поперечной волны, имеет вид:

$$\omega^4 - \omega^2 \left(\frac{\gamma}{\rho_0 S} + \frac{2\gamma}{\rho_g} + c^2 k^2 \right) + \frac{2\gamma c^2}{\rho_g} k^2 + \frac{\gamma^2}{\rho_g \rho_0 S} = 0 \quad (2.6)$$

Разрешая это уравнение относительно частоты в безразмерных переменных:

$$\tilde{k} = ck\sqrt{\rho_0 S/\gamma}, \quad \tilde{\omega} = \omega\sqrt{\rho_0 S/\gamma}, \quad \alpha = \sqrt{\rho_g/\rho_0 S}$$

получим

$$\tilde{\omega}_{1,2} = \frac{1}{\alpha\sqrt{2}} \sqrt{\alpha^2 \tilde{k}^2 + \alpha^2 + 2 \pm \sqrt{(\alpha^2 \tilde{k}^2 + \alpha^2 + 2)^2 - 4\alpha^2(2\tilde{k}^2 + 1)}} \quad (2.7)$$

Из (2.7) следует, что учет инерционности основания приводит к наличию двух критических частот

$$\tilde{\omega}_{1,2}^* = \frac{1}{\alpha\sqrt{2}} \sqrt{\alpha^2 + 2 \pm \sqrt{\alpha^4 + 4}} \quad (2.8)$$

Сравнивая эти частоты с критической частотой $\omega_* = \sqrt{\gamma/(2\rho_0 S)}$, характерной для безинерционного основания, определим, что их значения связаны между собой двойным неравенством $\omega_2^* < \omega_* < \omega_1^*$. В плоскости $\tilde{\omega}, \tilde{k}$ при этом имеется уже не одна, а две дисперсионные ветви (рис. 3), одна из которых исходит из точки $(0, \tilde{\omega}_1^*)$, а другая – из точки $(0, \tilde{\omega}_2^*)$. Знак «+» в (2.7) соответствует верхней, а «–» – нижней ветвям дисперсионной кривой. При больших волновых числах кривые (2.7) стремятся к асимптотам $\omega = ck$ и $\omega = \sqrt{2\gamma/\rho_g}$, соответственно.

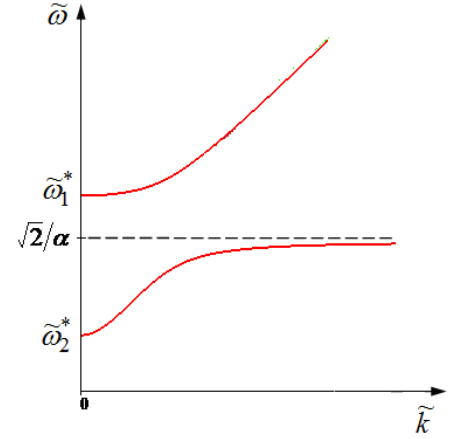


Рис. 3

Точка перегиба нижней ветви дисперсионной кривой определяется из уравнения

$$6\alpha^8 \tilde{k}^8 + 2\alpha^6 \tilde{k}^6 (7\alpha^2 + 2) + 9\alpha^4 \tilde{k}^4 (\alpha^4 + 4) - (\alpha^4 + 4)^2 = 0. \quad (2.9)$$

В зависимости от параметра α (т.е. отношения погонной массы основания к погонной плотности струны) рассмотрим три предельных случая: $\alpha \rightarrow 1, \alpha \ll 1, \alpha \gg 1$. При $\alpha \rightarrow 1$ критические частоты $\tilde{\omega}_1^*$ и $\tilde{\omega}_2^*$ будут соответственно равны $\tilde{\omega}_{1,2}^* = \sqrt{(3 \pm \sqrt{5})/2}$. С уменьшением α ($\alpha \ll 1$) верхняя частота $\tilde{\omega}_1$ увеличивается ($\tilde{\omega}_1 \rightarrow \infty$), а нижняя – $\tilde{\omega}_2 \rightarrow \sqrt{\tilde{k}^2 + 1/2}$, что соответствует безинерционности основания. В этом случае существует одна частота отсечки $\omega_2^* = \omega_*$. При увеличении α ($\alpha \gg 1$) верхняя ветвь дисперсионной кривой (2.7) $\tilde{\omega}_1 \rightarrow \sqrt{\tilde{k}^2 + 1}$, а нижняя $\tilde{\omega}_2 \rightarrow 0$. Критическая частота одна $\omega_1^* = \sqrt{\gamma/(\rho_0 S)}$ ($\tilde{\omega}_1^* = 1$), превышающая критическую частоту ω_* (в пренебрежении инерционностью основания) в $\sqrt{2}$ раз.

Фазовые ($v_{ph} = \omega/k = c \tilde{\omega}/\tilde{k}$) и групповые ($v_{gr} = d\omega/dk = c d\tilde{\omega}/d\tilde{k}$) скорости поперечных волн, распространяющихся в струне, лежащей на упруго-инерционном основании, определяются выражениями

$$\frac{v_{ph}}{c} = \frac{1}{\alpha\sqrt{2}} \sqrt{\alpha^2 k^2 + \alpha^2 + 2 \pm \sqrt{(\alpha^2 k^2 + \alpha^2 + 2)^2 - 4\alpha^2(2k^2 + 1)}} \quad (2.10)$$

$$\frac{v_{gr}}{c} = \frac{\alpha k}{\sqrt{2}\beta} \frac{\beta \pm (\alpha^2 k^2 + \alpha^2 - 2)}{\sqrt{\alpha^2 k^2 + \alpha^2 + 2 \pm \beta}}, \quad \beta = \sqrt{(\alpha^2 k^2 + \alpha^2 + 2)^2 - 4\alpha^2(2k^2 + 1)} \quad (2.11)$$

Во всем диапазоне волновых чисел, значения фазовых скоростей волн превосходят значения их групповых скоростей, следовательно дисперсия является нормальной. При $k \rightarrow \infty$ для верхней дисперсионной ветки $v_{ph} \rightarrow c$ и $v_{gr} \rightarrow c$; для нижней – $v_{ph} \rightarrow 0$ и $v_{gr} \rightarrow 0$.

Зависимость групповой скорости от волнового числа для нижней дисперсионной ветви не является монотонной. Значение длины волны, при котором групповая скорость максимальна, определяется на основе решения уравнения (2.9).

В п.2.3 для случая равномерного закона движения $x = Vt$ ($V = \text{const}$) нагрузки проводится анализ волновых явлений и качественно-различных случаев их проявления. Под этой задачей понимается определение частот, волновых чисел, скоростей и направлений распространения возбуждаемых волн. Частоты и волновые числа искомых волн в безразмерных переменных $\tilde{k} = ck\sqrt{\rho_0 S/\gamma}$, $\tilde{\omega} = \omega\sqrt{\rho_0 S/\gamma}$, $\alpha = \sqrt{\rho_g/\rho_0 S}$, $\tilde{V} = V/c$, $\tilde{\Omega} = \Omega\sqrt{\rho_0 S/\gamma}$ определяются системой уравнений:

$$\begin{cases} \alpha^2 \tilde{\omega}^4 - \tilde{\omega}^2 (\alpha^2 \tilde{k}^2 + \alpha^2 + 2) + 2\tilde{k}^2 + 1 = 0 \\ \tilde{\omega} - \tilde{k}\tilde{V} = \tilde{\Omega} \end{cases} \quad (2.12)$$

Первое из уравнений системы (2.12) является дисперсионным уравнением, а второе, называемое кинематическим инвариантом, выражает собой равенство фаз излучаемых волн в движущейся системе отсчёта фазе колебаний нагрузки и определяет величину смещения частоты согласно эффекту Доплера. Если движущаяся нагрузка представляет собой постоянную силу, то $\tilde{\Omega} = 0$ и кинематический инвариант запишется в виде $\tilde{\omega} - \tilde{k}\tilde{V} = 0$. На плоскости $(\tilde{k}, \tilde{\omega})$ кинематический инвариант представляет собой прямую, проходящую через точку $(0, \tilde{\Omega})$, с угловым коэффициентом, равным скорости движения нагрузки. Точки пересечения этой прямой и дисперсионной кривой соответствуют действительным частотам и волновым числам возбуждаемых волн.

Физически реализуемыми будут лишь те волны, которые удовлетворяют условию ограниченности прогибов струны на бесконечности и условию излучения Мандельштама (волны должны отводить энергию от движущейся нагрузки). На языке кинематики волн эти требования запишутся в виде:

$$\text{Im } k = \begin{cases} > 0 & \text{при } x < Vt \\ < 0 & \text{при } x > Vt \end{cases} \quad \text{и} \quad v_{gr} = \begin{cases} < V & \text{при } x < Vt \\ > V & \text{при } x > Vt \end{cases}$$

Система (2.12) совместно с последними двумя условиями позволяет единым образом находить значения частот, волновых чисел возбуждаемых движущейся нагрузкой волн, анализировать их поведение от скорости движения и тем самым определять возможные кинематические эффекты: эффект Вавилова-Черенкова, тормозного излучения, эффект Доплера и др., обусловленные движением границ.

Критические скорости $\tilde{V}_j^*$ ($j=1-3$), при переходе через которые меняется число возбуждаемых в струне волн, определяются из условия вырождения корней системы уравнений (2.12).

На плоскости параметров $(\tilde{\Omega}, \tilde{V})$ определены области с различным числом возбуждаемых волн (рис. 4).

Если на струну, лежащую на упруго-инерционном основании, действует равномерно движущаяся нагрузка, величина которой постоянна, то, определяя из системы уравнений (2.12) при $\tilde{\Omega}=0$, частоты и волновые числа и отбирая только физически реализуемые решения, получим, что в зависимости от скорости движения нагрузки возможны два

качественно различных режима волнообразования. Критическая скорость, разделяющая эти случаи равна C ($\tilde{V}=1$), т.е. совпадает со скоростью распространения волн в струне без учета упруго-инерционного основания.

У неподвижной нагрузки ($\tilde{V}=0$) поле поперечных смещений локализовано около источника, т.е. спадает по мере удаления от него, а $\tilde{k}_{1,2}$ имеют вид $\tilde{k}_{1,2} = \pm i/\sqrt{2}$. При движении нагрузки со скоростью $0 < \tilde{V} < 1$ слева от нее ($x < Vt$)

$$\begin{aligned} \tilde{k}_1 &= i \left(\alpha^2 \tilde{V}^2 - 2(1 - \tilde{V}^2) + \sqrt{\alpha^4 \tilde{V}^4 + 4(1 - \tilde{V}^2)^2} \right)^{1/2} (2\alpha^2 \tilde{V}^2 (1 - \tilde{V}^2))^{-1/2} \\ \tilde{k}_{3,4} &= \pm \left(2(1 - \tilde{V}^2) - \alpha^2 \tilde{V}^2 + \sqrt{\alpha^4 \tilde{V}^4 + 4(1 - \tilde{V}^2)^2} \right)^{1/2} (2\alpha^2 \tilde{V}^2 (1 - \tilde{V}^2))^{-1/2}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

а справа при $x > Vt$

$$\tilde{k}_2 = -i \left(\alpha^2 \tilde{V}^2 - 2(1 - \tilde{V}^2) + \sqrt{\alpha^4 \tilde{V}^4 + 4(1 - \tilde{V}^2)^2} \right)^{1/2} (2\alpha^2 \tilde{V}^2 (1 - \tilde{V}^2))^{-1/2} \quad (2.14)$$

$$\tilde{\omega}_{1-4} = \tilde{k}_{1-4} \tilde{V}. \quad (2.15)$$

Отсюда следует, что движение источника нулевой частоты приводит к возникновению, наряду с собственным полем, двух бегущих вслед волн.

Источник нулевой частоты, движущийся со скоростью $\tilde{V} > 1$, собственного поля не создает, но зато излучает четыре волны, бегущие ему вослед, волновые числа и частоты которых определяются формулами

$$\begin{aligned} \tilde{k}_{1-4} &= \pm \left(\alpha^2 \tilde{V}^2 + 2(\tilde{V}^2 - 1) \pm \sqrt{\alpha^4 \tilde{V}^4 + 4(\tilde{V}^2 - 1)^2} \right)^{1/2} (2\alpha^2 \tilde{V}^2 (\tilde{V}^2 - 1))^{-1/2} \\ \tilde{\omega}_{1-4} &= \tilde{k}_{1-4} \tilde{V} \end{aligned} \quad (2.16)$$

Справа от нагрузки при $x > Vt$ направляющая остается невозмущенной.

Таким образом, наличие инерционности в основании струны приводит к тому, что даже при «докритических» скоростях движения нагрузки ($0 < \tilde{V} < 1$) возникают бегущие волны. Однако, для очень малых ($\Lambda \rightarrow 0$) длин волн $v_{gr} \rightarrow 0$

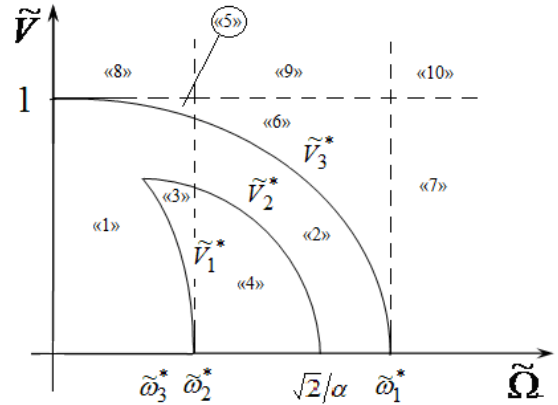


Рис. 4

При рассмотрении задачи кинематики излучения волн гармоническим источником колебаний частоты Ω , движущимся равномерно со скоростью V относительно направляющей, количество критических скоростей и качественно различных случаев увеличивается. Когда безразмерная частота источника $0 < \tilde{\Omega} < \tilde{\omega}_3^*$ и скорость его движения $0 < \tilde{V} < \tilde{V}_3^*$, либо когда частота источника $\tilde{\omega}_3^* < \tilde{\Omega} < \tilde{\omega}_2^*$, а скорость его движения $0 < \tilde{V} < \tilde{V}_1^*$ или $\tilde{V}_2^* < \tilde{V} < \tilde{V}_3^*$ движущийся источник создаёт локальное собственное поле, представляющее собой суперпозицию спадающих по экспоненте осцилляций, и возбуждает две волны, бегущие ему вослед. На рис.4 этой ситуации соответствует область «1». При частоте $\tilde{\Omega} \in (\tilde{\omega}_2^*, \tilde{\omega}_1^*)$ и скорости движения $\tilde{V} \in (\tilde{V}_2^*, \tilde{V}_3^*)$ (область «2» на рис.4) собственное поле у источника сохраняется, а две волны, возбуждаемые позади источника, бегут в противоположных направлениях. Когда скорость движения источника превышает первую критическую ($\tilde{V}_1^*$), но меньше второй критической скорости ($\tilde{V}_2^*$), а частота его колебаний $\tilde{\omega}_3^* < \tilde{\Omega} < \tilde{\omega}_2^*$ (область 3 рис. 4) он излучает одну волну с большей частотой перед собой и три волны позади, которые бегут в сторону движения источника, отводя от него энергию. Аналогичная ситуация возникает, если скорость источника больше третьей критической, но меньше c ($\tilde{V}_3^* < \tilde{V} < 1$), а его частота не превосходит критическую частоту $\tilde{\omega}_2^*$ (область 5 рис.4). Если частота источника $\tilde{\omega}_2^* < \tilde{\Omega} < \sqrt{2}/\alpha$ и его скорость $0 < \tilde{V} < \tilde{V}_2^*$ (область 4 рис.4), либо, если его частота $\tilde{\Omega} \in (\tilde{\omega}_2^*, \tilde{\omega}_1^*)$ и скорость $\tilde{V}_3^* < \tilde{V} < 1$ (область 6 рис.4), то от предыдущего эти случаи отличаются тем, что одна из трёх волн, возбуждаемых позади источника, низкочастотная, бежит в $-x$ направлении. С увеличением частоты источника $\tilde{\Omega} > \tilde{\omega}_1^*$ при $0 < \tilde{V} < 1$ (область 7 рис. 4) уже две из трёх волн бегут в $-x$ направлении. При движении источника со скоростью, превышающей предельно допустимую скорость распространения волн c ($\tilde{V} > 1$), все четыре волны распространяются слева от источника в области $x < Vt$, а справа направляющая остаётся невозмущённой. Причём, если $0 \leq \tilde{\Omega} < \tilde{\omega}_2^*$ (область 8 рис. 4), то все четыре волны бегут вслед за источником. Если $\tilde{\omega}_2^* < \tilde{\Omega} < \tilde{\omega}_1^*$ (область 9 рис. 4), то одна из них бежит в противоположном направлении, при $\tilde{\Omega} > \tilde{\omega}_1^*$ (область 10 рис. 4) уже две бегут в отрицательном направлении оси x .

Как видно из последовательности построения решения всей задачи о вынужденных колебаниях, для кинематики волн не важен вид движущейся нагрузки. Важными характеристиками являются лишь частота и скорость ее движения. Это выгодно разделяет задачу кинематики - определение частот и волновых чисел и задачу динамики - определение амплитуд колебаний и сил в движущемся контакте.

Найдены амплитуды излучаемых волн в докритическом

$$A_1 = \frac{P(1 + (1 - \tilde{V}^2)\tilde{k}_3^2)}{2ic\sqrt{\rho_0 S \gamma}(1 - \tilde{V}^2)^2 \tilde{k}_2(\tilde{k}_3^2 - \tilde{k}_2^2)}, \quad A_2 = A_1$$

и закритическом случаях

$$A_3 = \frac{P(1 + (1 - \tilde{V}^2)\tilde{k}_2^2)}{2ic\sqrt{\rho_0 S \gamma}(1 - \tilde{V}^2)^2 \tilde{k}_3(\tilde{k}_3^2 - \tilde{k}_2^2)}, \quad A_4 = -A_3$$

Вычисляя силу давления волн по формуле $F_{pr} = -[T - \ell p]$, получим

$$F_{pr} = \begin{cases} \frac{-P^2 \alpha^2 \tilde{V}^2 / (\rho_0 S c_0^2 \sqrt{\alpha^4 \tilde{V}^4 + 4(1 - \tilde{V}^2)})}{2(\alpha^2 \tilde{V}^2 + 2(1 - \tilde{V}^2) + \sqrt{\alpha^4 \tilde{V}^4 + 4(1 - \tilde{V}^2)})} & \text{при } \tilde{V} < 1 \\ -P^2 / (4\rho_0 S c_0^2 (\tilde{V}^2 - 1)) & \text{при } \tilde{V} > 1 \end{cases}$$

В пренебрежении инерционностью основания для $\tilde{V} < 1$ имеем $F_{pr} \equiv 0$. В этом случае $\tilde{V} = 1$ является «резонансным» значением скорости, сопровождающейся неограниченным ростом F_{pr} . Начиная с него в системе происходит излучение волны, бегущей вслед за нагрузкой, подобно эффекту Вавилова-Черенкова. Наличие инерционности приводит всегда к отличной от нуля силе давления волн (рис. 5, $\tilde{F}_{pr} = F_{pr} \rho_0 S c_0^2 / P^2$), причём при закритических скоростях её значение не зависит от инерционных свойств основания.

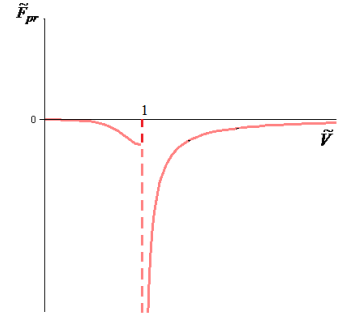


Рис. 5

В п. 2.5 рассмотрено излучение волн источником, действующим на движущийся по направляющей двухопорный экипаж, и находятся условия на параметры объекта и источника, при которых сопротивление движению будет минимальным. В качестве модели направляющей используется струна, лежащая на упругом основании, модели Винклера. Экипаж представляет собой два осциллятора, связанных невесомой связью так, что рассмотрение между ними в процессе движения не меняется.

В третьей главе изучается распространение поперечных волн конечной амплитуды в струне, лежащей на упруго-инерционном основании, описываемое нелинейной системой двух дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - c_v^2 \left(1 + \frac{3}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \right)^2 \right) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\gamma}{\rho_0 S} (u_1 - u_2) = 0, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \frac{2\gamma}{\rho_g} u_2 = \frac{\gamma}{\rho_g} u_1, \quad (3.2)$$

Система уравнений (3.1), (3.2) сводится к одному уравнению относительно поперечных смещений струны:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} - a_2 \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + a_3 \frac{\partial^4 U}{\partial \tau^4} - a_4 \frac{\partial^4 U}{\partial \tau^2 \partial z^2} + a_5 U - a_6 \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - a_7 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \left(\left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) = 0, \quad (3.3)$$

где $U = u_1 / u_0$ – безразмерное перемещение, $z = x / X$, $\tau = t / T$ – безразмерные величины координаты и времени, характерные величины приняты равными

$$T^2 = \frac{\varepsilon \rho_g}{\gamma} \left(1 + \frac{2\rho_0 S}{\rho_g} \right), \quad X^2 = \frac{2\varepsilon}{\gamma} \rho_0 S c_v^2,$$

a_i ($i = 2..7$) – безразмерные комплексы параметров.

Рассмотрены различные случаи соотношений массы струны $\rho_0 S$ и погонной массы упруго-инерционного основания ρ_g .

Если погонная масса струны существенно превосходит погонную массу упруго-инерционного основания ($\rho_0 S \gg \rho_g$), то уравнение (3.3) имеет решение в виде периодической стационарной волны.

Если погонные массы струны и основания имеют один порядок $\frac{\rho_0 S}{\rho_g} \sim 1$, то относительно $W = \frac{\partial U}{\partial \xi}$ в движущейся системе координат $\xi = z - \sqrt{b_1} \tau$, уравнение (3.3) преобразуется к виду

$$\frac{\partial W}{\partial \eta} + W^2 \frac{\partial W}{\partial \xi} = 0. \quad (3.4)$$

Уравнение (3.4) можно классифицировать как уравнение Римана с кубической нелинейностью.

Поверхность волны, описываемой уравнением (3.4) и ее профили в разные моменты времени изображены на рис. 6, 7. Из рисунков видно, что у волны описываемой уравнением (3.4), как и у классической волны Римана, происходит опрокидывание.

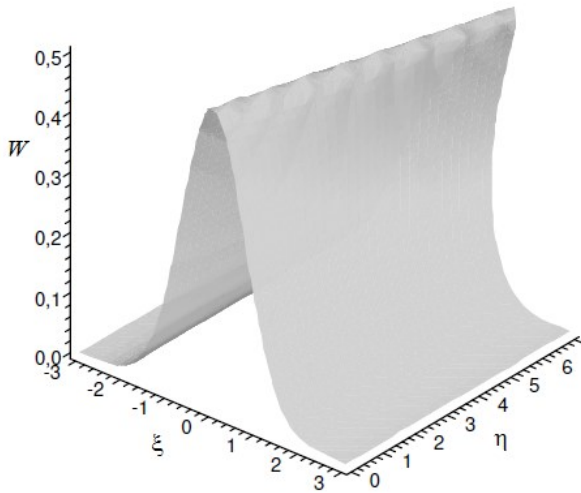


Рис. 6. Поверхность волны $W(\xi, \eta)$

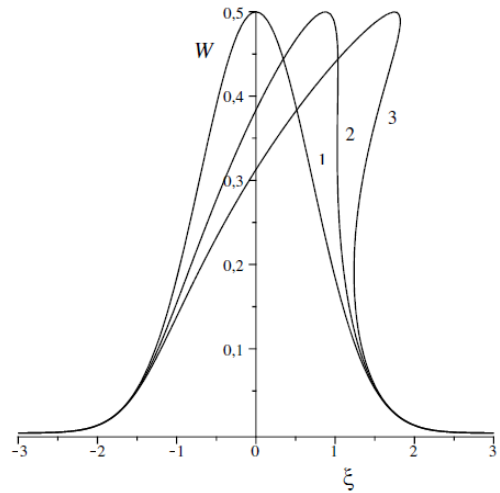


Рис. 7. Профили волны $W(\xi, \eta_1)$ (1), $W(\xi, \eta_2)$ (2), $W(\xi, \eta_3)$ (3) ($\eta_1 < \eta_2 < \eta_3$)

Момент времени, в который первый раз пересекаются характеристические прямые $t^* = \frac{1}{2k_1^2} \sqrt{\frac{\exp(1)}{k_2}}$. Отношение времён опрокидывания равно $t_R^*/t^* = \sqrt{2}k_1$, где t_R^* – время опрокидывания волны Римана. Из этого отношения следует, что время опрокидывания волны Римана больше времени опрокидывания волны $W(\xi, \eta)$ ($t_R^* > t^*$) при $k_1 > \sqrt{2}/2$, время опрокидывания волны Римана меньше ($t_R^* < t^*$) – при $k_1 < \sqrt{2}/2$ и времена опрокидывания волн равны ($t_R^* = t^*$) при $k_1 = \sqrt{2}/2$.

Таким образом, показано, что величина амплитуды начального возмущения влияет на момент времени опрокидывания и скорость распространения волны. Если амплитуда волны в начальный момент времени больше (меньше) некоторого критического значения, то опрокидывание волны Римана происходит позднее (раньше) по сравнению с волной, описываемой уравнением Римана с кубической нелинейностью.

Если масса струны существенно уступает массе упруго-инерционного основания ($\rho_0 S \ll \rho_g$), то будем считать, что $\frac{\rho_0 S}{\rho_g} \sim \varepsilon^2$, $\frac{3u_0^2 \gamma}{4\rho_0 S c_v^2} \sim \varepsilon^2$. В этом случае уравнение (3.3), с учетом слагаемых до первого порядка малости включительно, примет вид:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} - a_2 \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - a_4 \frac{\partial^4 U}{\partial \tau^2 \partial z^2} - a_7 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \left(\left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) = 0. \quad (3.5)$$

Отыскивая решение уравнения (3.5) в виде бегущей стационарной волны $U = U(\chi)$, где $\chi = z - V\tau$, перейдем к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2 U}{d\chi^2} + d_1 U - d_2 U \left(\frac{dU}{d\chi} \right)^2 = 0, \quad (3.6)$$

где $d_1 = \frac{2\varepsilon(1-V^2)}{V^2}$, $d_2 = d_1 b$, $b = \frac{3u_0^2 \gamma}{4\varepsilon \rho_0 S c_v^2} > 0$, здесь V – скорость нелинейной волны. Уравнение (3.6) описывает колебания ангармонического осциллятора с кубической нелинейностью. Фазовые портреты для случаев $V > 1$ и $V < 1$ изображены на рис. 8, 9. На фазовых плоскостях присутствуют прямые разделяющие движения (асимптоты): $\frac{dU}{d\chi} = \pm \sqrt{\frac{d_1}{d_2}}$ (на рисунке отмечены пунктиром).

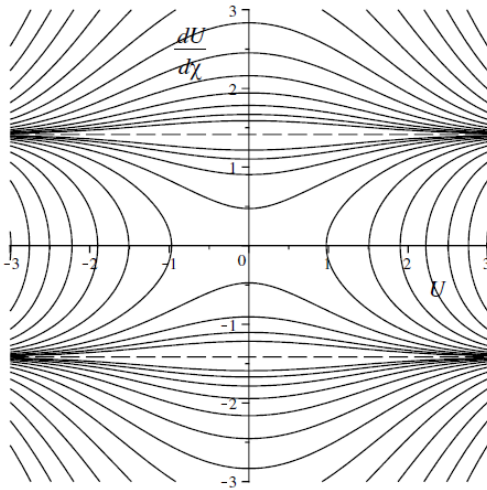


Рис. 8. Фазовый портрет $\left(U, \frac{dU}{d\chi} \right)$ при $V > 1$

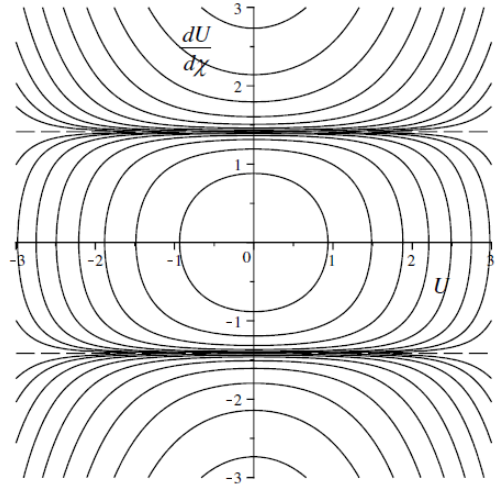


Рис. 9. Фазовый портрет $\left(U, \frac{dU}{d\chi} \right)$ при $V < 1$

Из анализа фазовых портретов следует, что в сверхзвуковом случае нелинейные волны не распространяются. В дозвуковом случае существуют только нелинейные периодические (квазигармонические, кноидальные) волны, уединенных волн нет.

В **четвертой главе** рассмотрена модуляция и демодуляция волн в системах, содержащих упругое основание, параметры которого изменяются.

В п. 4.1 рассматривается модуляция поперечной волны в пластине, лежащей на упругом основании, параметры которого изменяются по закону бегущей волны. Существенное отличие этой задачи заключается в том, что она является нелинейной параметрической: нелинейно-упругая пластина, взаимодействует с линейно-упругим основанием, жесткость которого изменяется в пространстве и во времени. Для данной задачи сформулирована математическая модель, построены дисперсионные уравнения, выявлены области формирования солитонов (применимость рассматриваемого приближения определяется условием: область локализации солитона должна быть гораздо больше толщины пластины).

В п. 4.2 рассматривается распространение поперечной квазигармонической волны в струне, лежащей на периодически-неоднородном основании, получена и исследована зависимость амплитуды изменения энергии системы, как функции волнового числа, либо как функции скорости переноса энергии.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ ДИССЕРТАЦИОННОГО ИССЛЕДОВАНИЯ

1. Поставлена самосогласованная динамическая задача для системы, включающей в себя одномерную гибкую направляющую (струна), упруго-инерционное основание (массив осцилляторов) и движущуюся осциллирующую нагрузку. Проанализировано влияние параметров основания на дисперсионные характеристики (зависимости частоты, фазовой и групповой скоростей от волнового числа) поперечных волн, распространяющихся по струне. Показано, что наличие инерционности основания приводит к возникновению двух критических частот (частот отсечки), а движущаяся вдоль такой системы нагрузка вызывает в ней упругие колебания, представляющие собой бегущие волны, при любых скоростях движения и частотах источника.
2. Исследовано распространение квазигармонической поперечной волны в нелинейно-упругой струне, лежащей: (а) на упруго-инерционном основании; (б) на периодически-неоднородном упругом основании. В случае (а) показано, что такая волна неустойчива к малым возмущениям и при любых значениях параметров струны и основания разбивается на отдельные волновые пакеты (модуляционная неустойчивость). В случае (б) получена зависимость амплитуды энергии волнового пакета от волнового числа, или от скорости переноса энергии (не совпадающей с групповой скоростью).
3. В нелинейной постановке рассматривается задача о распространении квазигармонических плоских сдвиговых волн в пластине, лежащей на упругом основании, параметры которого изменяются по закону бегущей волны. Показано, что если параметры основания неизменны, то сдвиговая волна всегда будет неустойчивой по отношению к разбиению на отдельные волновые пакеты (модуляционная неустойчивость). Такая неустойчивость приводит к пространственной локализации волнового процесса. Изменением параметров основания можно добиться стабилизации модуляционной неустойчивости.

Разработанные математические модели имеют существенное теоретическое значение для развития механики одномерных распределенных систем, взаимодействующих с деформируемыми основаниями. Результаты проведенных исследований в дальнейшем будут использованы при решении задач о генерации волн в элементах конструкций высокоскоростными движущимися источниками.

Выполненные исследования волновых процессов в упругих направляющих, взаимодействующих с движущимися объектами, позволяют на этапе конструирования наземных транспортных средств проводить оценку энергозатрат на преодоление сил волнового сопротивления движению и вносить допустимые изменения в конструкции с целью их уменьшения.

СПИСОК РАБОТ, ОПУБЛИКОВАННЫХ АВТОРОМ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

I. Статьи в изданиях, рекомендованных ВАК РФ

1. Ерофеев В.И., Колесов Д.А., Сандалов В.М. Демодуляция сдвиговой волны в нелинейной пластине, лежащей на упругом основании, параметры которого изменяются по закону бегущей волны // Проблемы прочности и пластичности. Межвузовский сборник. Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского университета. 2013. Вып.75 (4). С. 268-272.
2. Ерофеев В.И., Колесов Д.А., Лисенкова Е.Е. Расчет дисперсионных характеристик струны, лежащей на упруго-инерционном основании // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2013. Вып. 4 (1). С.199-203.
3. Ерофеев В.И., Колесов Д.А., Лисенкова Е.Е. Генерация волн источником, движущимся по деформируемой направляющей, лежащей на упруго-инерционном основании // Машиностроение и инженерное образование. 2014. №2. С. 37-40.
4. Ерофеев В.И., Колесов Д.А., Лисенкова Е.Е. Особенности генерации волн источником, движущимся по одномерной гибкой направляющей, лежащей на упруго-инерционном основании // Акустический журнал. 2016. Т. 62. №6. С. 639-647 (Web of Science, Scopus).
5. Erofeev V., Kolesov D., Leonteva A. Nonlinear waves with an elastic guide interacting with an elastic-inertial foundation // MATEC Web of Conferences. 2018. Vol. 224. 02044. P.1-6 (Scopus).

II. Монография

6. Ерофеев В.И., Колесов Д.А., Плехов А.С., Хазов П.А. Волновая динамика деформируемых систем, взаимодействующих с упруго-инерционными и неоднородными основаниями. Нижний Новгород: Изд-во НГТУ им. Р.Е. Алексеева. 2018. 130 с.

III. Публикации в других научных журналах, сборниках научных трудов и трудах конференций

7. Колесов Д.А. Исследование линейных и нелинейных волн в струне, лежащей на упруго-инерционном основании // Моделирование динамических систем: сборник научных трудов / под ред. В.И. Ерофеева, С.И. Смирнова. – Нижний Новгород: Издательство общества «Интелсервис». 2011. Вып. 3. С. 129-144.
8. Колесов Д.А. Модулированные нелинейные волны, распространяющиеся в струне, лежащей на упруго-инерционном основании. // Труды IX Всероссийской научной конференции «Нелинейные колебания механических систем» (Нижний Новгород,

- 24–29 сентября 2012 г.) / Под редакцией Д.В. Баландина, В.И. Ерофеева, И.С. Павлова. Нижний Новгород: Издательский дом «Наш дом». 2012. С.516-524.
9. Колесов Д.А. Линейные и нелинейные волны в струне, закрепленной на упруго-инерционном основании // XXIII Международная инновационно-ориентированная конференция молодых ученых и студентов (МИКМУС-2011): избранные труды конференции (Москва 14-17 декабря 2011 г.). М: Изд-во ИМАШ РАН. 2012. С.60-68.
 10. Колесов Д.А., Ерофеев В.И., Лисенкова Е.Е. Генерация волн источником, движущимся по деформируемой направляющей, лежащей на упруго-инерционном основании // Юбилейная XXV Международная инновационно-ориентированная конференция молодых ученых и студентов (МИКМУС - 2013): Труды конференции (Москва, 13-15 ноября 2013 г.). М: Изд-во ИМАШ РАН. 2013. С.161-166.
 11. Ерофеев В.И., Колесов Д.А., Лисенкова Е.Е. Исследование волновых процессов в одномерной системе, лежащей на упруго-инерционном основании, с движущейся нагрузкой. // Вестник научно-технического развития. 2013. № 6(70). С.18-29.
 12. Ерофеев В.И., Колесов Д.А., Мальханов А.О. Распространение поперечной квазигармонической волны в струне, лежащей на периодически-неоднородном основании. // Моделирование динамических систем. Сборник научных трудов. Н.Новгород: Изд-во «Интелсервис». 2014. Вып. 4. С. 42-50.
 13. Лисенкова Е.Е., Ерофеев В.И., Колесов Д.А. Волновая динамика одномерных упругих систем, взаимодействующих с движущимися объектами // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: Сборник научных трудов (Казань, 20-24 августа 2015г.) Казань: Изд-во Казанского (Приволжского) федерального университета. 2015. С. 2766-2768.
 14. Ерофеев В.И., Колесов Д.А., Лисенкова Е.Е. Движение двухопорного экипажа по направляющей ракетного трека // Вестник научно-технического развития. 2017. №11 (123). С. 18-23.
 15. Ерофеев В.И., Колесов Д.А., Леонтьева А.В. Нелинейные периодические волны в гибкой направляющей, взаимодействующей с упруго-инерционным основанием // Вестник научно-технического развития. 2018. №5 (129). С. 11-18.
 16. Ерофеев В.И., Колесов Д.А., Лисенкова Е.Е., Мамаев Ш.М. Дисперсионные характеристики струны, лежащей на упруго-инерционном основании и их расчеты // Преемственность образования и науки, перспективы развития в евразийском пространстве XXI века. Сборник материалов Международной научно-практической конференции (Тараз, Казахстан, 18-19 октября 2018 г.). Тараз: Таразский инновационно-гуманитарный университет. 2018. Т.2. С.41-46.

Подписано в печать 24.10.2019 г. Формат 60×84 1/16.
Бумага офсетная. Печать цифровая.
Усл. печ. л. 1. Заказ № 685. Тираж 100 экз.

Отпечатано с готового оригинал-макета
в типографии ННГУ им. Н.И. Лобачевского.
603000, Нижний Новгород, ул. Б. Покровская, 37