На правах рукописи

Хузиев Ильнур Масхудович

О распределённых вычислениях в синхронных сетях с неизвестной топологией

Специальность 01.01.09 – дискретная математика и математическая кибернетика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук

Москва – 2019

Работа выполнена на кафедре дискретной математики Московского физико-технического института (национальный исследовательский университет).

Научный руководитель: Вялый Михаил Николаевич, к.ф.-м.н., доцент, старший научный сотрудник Вычислительного центра им А.А. Дородницына.

Ведущая организация: Автономная некоммерческая образовательная организация высшего образования “Сколковский институт науки и технологий”.

Защита состоится 5 декабря 2019 года в 12:00 на заседании диссертационного совета по адресу 141701 ФПМИ.01.01.09.003, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский переулок, д. 9.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте Московского физико-технического института (государственного университета): https://mipt.ru/education/post-graduate/soiskateli-fiziko-matematicheskienauki.php

Работа представлена «24» апреля 2019 г. в Аттестационную комиссию федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Московский физико-технический институт (государственный университет)» для рассмотрения советом по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, доктора наук в соответствии с п. 3.1 ст. 4 Федерального закона «О науке и государственной научно-технической политике».

Общая характеристика работы

Актуальность темы.

В диссертационной работе затрагиваются темы распределённых вычислений и вопросы эффективного обнаружения топологии сети узлами, которые имеют очень мало информации о ней.

Тема распределённых вычислений активно развивается в настоящее время, что связано с практической необходимостью работы с системами, включающими в себя большое число вычислительных узлов.

Вопросы о самодиагностике сети и обнаружении других свойств вполне естественно возникают в тех сетях, которые создаются не по заранее построенному плану, а хаотично, либо подвержены высокой изменчивости. С практической точки зрения некоторые условия, в которых результаты работы применимы, выглядят экзотическими (например, все устройства заведомо имеют уникальные «заводские» номера, причём их длина мала). Тем не менее задачи выбора лидера или установления свойств топологии спонтанно возникшей сети могут возникать, но в реально используемых сетях используются пакеты относительно большого объема (и как следствие, не составляет проблем подписать пакет уникальным идентификатором узла). Можно интерпретировать протоколы с высокой адаптивностью, которые строятся в этой работе, как протоколы для многопроцессорных систем с общей памятью. Но в рамках данной работы такой интерпретации (алгоритмы для «акторной» модели параллельных алгоритмов) не делалось.

Степень разработанности темы исследования.

В качестве обзорных материалов по теме распределённых вычислений можно порекомендовать [6, 8].

Одной из проблем изучения распределённых вычислений является многообразие рассматриваемых моделей, что ведёт к сложности сравнения результатов. Одним из ключевых свойств используемой модели сети является различие между асинхронными и синхронными сетями[1]. Формулировки задач в сетях с неполной информацией о топологии более характерны для асинхронных моделей, но их сравнение с синхронными моделями не вполне корректно.

Хотелось бы отметить, что одним из полезных свойств используемого в данной работе формализма является сама возможность сравнения достаточно сильно отличающихся моделей за счёт их сведения к более «базовой».

Другой важной особенностью моделей являются ограничения на размер сообщений. Часто оптимизируемой величиной является число сообщений, при этом размер самих сообщений может быть большим. Стандартным является использование подписанных сообщений[2].

Всё это осложняет сравнение результатов. Тем не менее постараемся привести наиболее релевантные и близкие работы.

Одним из часто используемых «строительных блоков» в наших протоколах является *эхо протокол* и его модификации. Он описан, например, в работе Перельман [7].

---

[1] Многие результаты из данной работы переносимы на асинхронные модели: протоколы можно переформулировать, чтобы они по-прежнему находили лидеров, строили мосты и т.п. Но оценки на время теряют свою корректность. Результаты из главы 4 не переносимы на асинхронные модели.

[2] То есть к каждому сообщению можно дополнительно дописать $\log V$ бит (V – число узлов в сети), обычно это номер некоторого узла. Использование таких подписей вполне согласуется с используемыми на практике протоколами сетевого обмена.

В работе [3] рассматривается задача выбора разрушения симметрии в кольцевых сетях (разрушение сети по своей сути эквивалентно выбору лидера). Следуя идеям этой работы, мы различаем разные типы завершения протоколов (подробно об этом в первой главе). Использованный там термин *message-terminating protocol* соответствует термину *слабо-корректные протоколы* из этой работы, а термин *processor-terminating protocol* соответствует *корректным протоколам* (термин сильно-корректный протокол не имеет прямого аналога в [3]). В этой работе авторы установили близкие верхние и нижние оценки, связывающие синхронизированную коммуникационную сложность и обычную детерминированную коммуникационную сложность в предположении, что время работы протокола ограничено полиномом от числа булевых переменных у участников протокола.

Относительно оценок на коммуникационную сложность выбора лидера существуют следующие две работы. Для кольцевых сетей в [5] доказана нижняя оценка $\Omega(V \log V)$ для числа сообщений в протоколе, решающем задачу выбора лидера (уникального узла в сети). В работе [2] получена такая же нижняя оценка для решения задачи достижения консенсуса (все узлы должны выдать одинаковый бит) в кольцевой сети. Нетрудно видеть, что эти задачи решаются с дополнительными $O(V)$ сообщениями, если в кольцевой сети с заданными ориентациями связей в каждой вершине (по и против часовой стрелки) построено остовное дерево (т.е. удалено одно ребро).

Известны нижние оценки времени распределённого построения кратчайшего остовного дерева [1, 8], однако они используют другую модель (априорная плотная нумерация и подписанные сообщения).

В главе 3 рассматриваются две задачи, в которых требуется найти в сети объекты, заданные через свойства топологии сети. В разделе 3.1 рассматривается задача плотной нумерации и поиска мостов. В разделе 3.2 рассматривается задача поиска антиподальной вершины в симметричном графе Кэли над группой булева куба [14].

Данные задачи интересны тем, что их можно решать не находя полной информации о топологии сети, то есть приведённые протоколы быстрее «тривиального» подхода через аккумулирование всей матрицы смежности в некотором узле.

В разделе 3.1 мы рассматриваем задачу поиска мостов. Эффективный алгоритм поиска мостов был представлен в работе [13]. Он работает в синхронизированной сети, в модели с подписанными сообщениями и априорной плотной нумерацией вершин. В целом идея протокола о непосредственном поиске мостов в данной работе не отличается от идей [13], но используются разные модели. Явный контроль посылаемых сообщений (отказ от подписей там, где это не нужно) позволяет улучшить оценки.

<u>Цели и задачи.</u>

Целью исследования было определить в чём состоит разница между сетью, чьи узлы знают топологию сети, в которой происходит вычисление, с одной стороны, и сетью, в которой узлы не имеют такой информации, с другой. А также хотелось понять: насколько эффективно можно перейти из одной ситуации (нет полной информации) к другой (есть полная информация).

<u>Научная новизна.</u>

В работе использовано несколько новых идей. Во-первых, используется особый формализм для описания моделей сетей и протоколов на них. Это позволяет формализовать понятие известной узлам информации о сети и разделять классы сетей по этому признаку. Для возможности полного определения топологии сети узлами необходима возможность выбора лидера. Построены протоколы, которые выбирают лидера в очень слабой модели уникальных идентификаторов. Причём используемая модель сети позволяет осуществлять «оптимизацию» за счёт быстрой коррекции поведения, что обеспечивает построение быстрых протоколов. В частности, для известной задачи поиска мостов получилось построить более быстрые протоколы.

Теоретическая и практическая значимость.

Работа носит теоретический характер. Разработанный математический аппарат позволяет точно описывать доступную узлам в сети информацию и выделять классы сетей по степени доступной им информации. Получены достаточные условия сводимости слабой модели уникальных идентификаторов к хорошо изученным моделям с плотной нумерацией. Построены эффективные алгоритмы такого сведения. Для алгоритма распространения нумерации построенные алгоритмы достигают нижних оценок. Показана невозможность сведения ещё более слабых моделей (анонимных сетей) к сети с известной топологией.

Методы исследования.

В диссертации применяется аппарат дискретной математики, теории вероятностей, теории вычислений.

Положения, выносимые на защиту.

1. Существование сильно-корректного протокола, который выбирает лидера и строит остовное дерево с корнем в сети с уникальными номерами за время $O(\mathrm{D} \log L + L)$, где L – длина битовой записи минимального идентификатора, а D – диаметр сети.
2. Существование сильно-корректного протокола в сети с лидером, который за время $O(V)$ распространяет между всеми узлами полную информацию о некотором остовном дереве, в частности все узлы узнают своё место в этом дереве.
3. Существование сильно-корректного протокола, который в сети с лидером за время $O(V)$ делает известной всем узлам информацию обо всех мостах. Нумерация рёбер при этом согласована с деревом из предыдущего пункта.
4. Существование корректного протокола, который строит остовное дерево и выбирает лидера в сети с уникальными

номерами, и при этом по всем связям передаётся не более $O(E\ g(V))$ не пустых сообщений, где $g(z)\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ – произвольная неограниченная функция.

Степень достоверности и апробация результатов.

Высокая степень обоснованности результатов диссертации обеспечивается корректностью применения математического аппарата, апробацией результатов на конференциях и публикацией результатов в рецензируемых научных изданиях, в том числе включённых в список ВАК.

Результаты были доложены на следующих конференциях: 57, 58, 59 научные конференции МФТИ (2014-2016), 10 международная конференция «Дискретные модели в теории управляющих систем» (2018).

По теме диссертации соискателем опубликовано 4 печатные работы, три из них ([1, 2, 4]) в реферируемых изданиях, включённых ВАК в список изданий, рекомендуемых для публикации основных научных результатов диссертаций.

Объём и структура диссертации.

Диссертация состоит из введения, главы с подробным определением используемой модели и некоторыми структурными результатами, трёх глав собственных исследований, заключения, а также приложения из двух частей, содержащих доказательства некоторых простых известных утверждений, адаптированных к применяемой в работе системе определений.

Общий объём составляет 90 страницы.

В списке цитируемой литературы 14 наименований, в том числе 4 работы автора (некоторые в соавторстве), в которых опубликованы различные части данной диссертации.

Основное содержание работы

Глава 1. Определения

В данной главе вводятся определения и даётся формальное описание используемых моделей.

Понятие сети определяется через индексную функцию:

Определение. Сетью $G = (\mathrm{V}, \deg, \mathrm{E})$ мы будем называть кортеж из трёх элементов, где

- первый элемент – множество вершин V;
- второй элемент – функция степени вершин $deg: V \to \mathbb{N}$;
- третий элемент – индексная функция $E: V \times \mathbb{N} \to V \times \mathbb{N}$, порождающая связи в сети.

Причём индексная функция должна удовлетворять следующим условиям:

- $E(v, k)$ определено только для k из отрезка $[0, \deg(v)]$;
- $E\big(E(v, k)\big) = (v, k)$; (связи двусторонние)
- $E(v, k) \neq (v, d), \ \ \forall d$. (отсутствие петель)

Так же определим вспомогательные функции $p_E(v, k), r_E(v, k)$, которые задаются равенством $E\big(p_E(v, k), r_E(v, k)\big) = (v, k)$. Эти функции определяют обратное преобразование для E.

Определение. Инициализирующей функцией узлов мы будем называть произвольную функцию вида $I: \mathrm{V} \to 2^{\mathbb{N}}$.

Определяется понятие конфигурации как пары из сети и начального состояния:

Определение. *Конфигурацией* называется четвёрка $(V, deg, E, I) = (G, I)$, задающая и топологию сети, и начальное состояние узлов.

Определение. *Семейством конфигураций с лидером* называется множество конфигураций (G, I), где $G = (V, deg, E)$ пробегает все конечные связные сети (и, как было сказано выше, без петель и кратных рёбер), а индексная функция $I: V \to \{0,1\}$ равна единице ровно на одной вершине из V.

Понятие протокола определяется, как функция отображающая состояние узла (начальное состояние и предыдущая история общения) в сообщения, которые необходимо отправить по связям:

Определение. *Протоколом* будем называть любую функцию 5 аргументов вида

$$\pi(d, t, s, i, k) \in \Sigma, \text{ где } d, t, k \in \mathbb{N}, k \le d, s \in \Sigma^{t\,d}, i \in 2^{\mathbb{N}}.$$

Другими словами, протокол π – это функция, которая по степени вершины d, её начальному состоянию i, предыдущей истории общения s, моменту времени t, определяет какой символ послать по связи узла с номером k.

Определим понятие работы протокола в сети:

Протокол π рекурсивно определяет функцию состояния H_π по конфигурации (V, deg, E, I):

$$H'_\pi\big(t, p_e(v,k), r_e(v,k)\big) = \pi(\deg(v)\,, t-1, H_\pi(v, t-1), I(v), k).$$

Вводится понятие различных типов завершения протокола и даются определения сильно-корректных, корректных и слабо-корректных протоколов. Соответственно, вводится и понятие времени работы сети.

Определение. Протокол π называется *сильно-корректным* в семействе конфигураций $\{(G, I)\}$, если найдётся функция $end: (d, i, s, t) \longmapsto x \in \{0,1\}$, что для любой конфигурации (G, I)

из рассматриваемого семейства найдётся такой момент времени t, что выполнено

1. $\mathrm{end}(\deg(\mathrm{v}), \mathrm{I}(\mathrm{v}), \mathrm{H}_\pi(\mathrm{v}, \mathrm{t}'), \mathrm{t}') = [\mathrm{t}' \geq \mathrm{t}]$, здесь [...] – индикаторная функция;
2. состояние $s = \mathrm{H}_\pi(\mathrm{v}, \mathrm{t})$ *завершающее* в протоколе π, то есть выполнено

$$\pi(\deg(\mathrm{v}), \mathrm{t}', \mathrm{ss}', \mathrm{I}(\mathrm{v}), \mathrm{k}) = \lambda, \forall t' \geq t, \forall k, \forall s' \in \Sigma^{\deg(v)(t'-t)}.$$

Даётся понятие результата работы протокола в сети.

Приводится протокол вычисления высоты и метод синхронизации часов. Последний позволяет сводить корректные протоколы к сильно-корректным в сети с лидером, затратив всего лишь $O(D)$ дополнительных тактов (а также расширив алфавит, последнее при эмуляции в исходном алфавите увеличивает время протокола в 2 раза, то есть не меняет асимптотику).

Теорема 1.1. В сетях с лидером корректные протоколы сводятся к эквивалентным (состояния узлов на конец старого протокола определимы по состояниям узлов в конце нового протокола) сильно-корректным протоколам. Накладные расходы на время $O\big(diam(G)\big)$, накладные расходы на трафик[3] $O(E)$.

Основные результаты главы 1

Во-первых, введены формальные определения, используемые в работе.

Во-вторых, метод синхронизации часов позволяет упростить описания протоколов в следующих главах.

[3] Суммарное число непустых сообщений, переданных по всем связям. Подробнее смотри главу 4.

Глава 2. Быстрый протокол выбора лидера

В данной главе рассматривается вопрос о быстром выборе лидера в сети с уникальными идентификаторами. Описывается протокол распространения идентификаторов узлов по сети, в результате которого всем узлам станет известен минимальный идентификатор, а также будет построена структура остовного дерева.

Теорема 2.1. Существуют сильно-корректные протоколы передачи минимального идентификатора и построения корневого остовного дерева, работающие за время $O(D \ \log L + \ L)$, где L – длина минимального идентификатора, D - диаметр сети.

Определение. Мы говорим, что протокол строит корневое остовное дерево, если по его завершению в каждом узле определимо: 1) является ли он лидером; 2) номер связи, соответствующий родительскому узлу, для всех некорневых узлов.

Во-первых, вводятся ключи, которые представляют собой образы идентификаторов относительно простой модификации: добавляется префикс в виде унарной записи длины битовой записи идентификатора.

$$K: x \mapsto 1^{k+1}0^{2^k-|x|}1x, \text{ где } k = \lceil \log |x| \rceil + 1.$$

Главной особенностью кодирования является «префиксность» сравнения ключей: если префикс одного ключа меньше префикса другого ключа в лексикографическом сравнении, то первый идентификатор меньше второго идентификатора.

Доказаны и другие вспомогательные свойства использованного кодирования.

Далее приводится описание основной части протокола.

Доказывается, что он слабо-корректен, и в результате его работы будет распространён минимальный ключ.

В целом протокол устроен просто: каждый узел распространяет информацию о своём ключе всем соседям и пытается «убедить» их присоединиться к своему дереву. Если это удаётся, то присоединённый узел начинает распространять ту же информацию своим соседям.

Префиксность сравнения позволяет не дожидаться получения полного сообщения, а принимать решение как только получено достаточное число бит нового ключа (удалось сравнить префиксы старого и нового ключей).

Не менее важно, что используются корректирующие сообщения. Простое наблюдение «если узел долго не присоединялся к дереву, значит у его ключа и нового ключа совпадают очень длинные префиксы» позволяет вместо пересылки всего ключа послать сначала длину совпадающей части, а потом новые биты.

В итоге удаётся доказать искомую оценку на время работы.

Доказывается, что по информации, доступной узлам, можно корректно выбирать родителей, таким образом построить остовное дерево.

Далее показывается как свести слабо-корректные протоколы к корректным. Для этого используются дополнительные «вспомогательные» протоколы, которые позволяют отследить факт того, что все узлы сети были присоединены к текущему дереву. Накладные расходы на эти вспомогательные действия оказываются порядка $O(D)$.

Основные результаты главы 2

Построение протокола выбора лидера и построения остовного дерева с корнем в сетях с уникальными идентификаторами. Доказательство оценки $O(\mathrm{D} \log L + L)$, где L – длина битовой записи минимального идентификатора, а D – диаметр сети. Доказательство корректности протокола. Полученные оценки лучше известных ранее протоколов, адаптированных к используемой модели сети, которые дают $O(\mathrm{D}\,L)$.

Глава 3. Быстрый поиск объектов, заданных топологическими свойствами

3.1 Быстрое распространение информации об остовном дереве

В данной главе рассматривается сети, в которых уже выбран лидер. Дальнейшим логичным шагом в деле установления полной информации о топологии сети является плотная нумерация вершин.

Дополнительно мы хотим не просто выбрать какое-то остовное дерево, чтобы каждый узел знал своих родителей и потомков, но и распространить полную информацию о дереве между всеми узлами.

Вводится понятие нумерации поиском в ширину и сертификата поиска в ширину. Сертификат поиска в ширину даёт полную информацию о структуре дерева с корнем.

Вводится понятие сертификата вершины – это сертификат поиска в ширину, где дополнительно помечена одна вершина.

Доказывается главное свойство сертификата поиска в ширину, на которое опирается протокол: префикс сертификата можно построить зная префиксы сертификатов в ширину.

Далее приводится сам протокол, в ходе которого все узлы шлют родителям (мы предварительно построили локальное дерево) информацию о своих поддеревьях, а родители дочерним узлам шлют сертификат глобального дерева.

Теорема 3.1.1. В сети с лидером существует сильно-корректный протокол, в результате работы которого во всех узлах будет определим сертификат вершины в некотором остовном дереве сети. Время работы протокола $O(V)$.

Так как информация о дереве имеет объём $O(V)$, и наш протокол так же работает $O(V)$, то в данной постановке (распространить полную информацию о дереве) построенный протокол оптимален.

Далее рассматривается задача о поиске мостов. Её также можно свести к вычислению функции префиксно-вычислимой по значениям в поддереве.

В результате строится алгоритм, который за $O(V)$ находит все мосты и распространяет эту информацию по всем узлам в сети. Данная задача интересна тем, что удаётся её решить оптимальным образом (информация о мостах может иметь объём $O(V)$) без того, чтобы какой бы то ни было узел знал всю матрицу смежности графа.

Теорема 3.1.2. В сети с лидером задача поиска мостов решается сильно-корректным протоколом за линейное от размера сети время.

Теорема 3.1.3. Информацию о всех мостах можно распространить по сети с нумерованным деревом за линейное время.

Более того, полученный результат оказывается лучше известного ранее, построенного для модели подписанных сообщений.

3.2 Поиск антиподальной вершины в симметричном графе Кэли над булевым кубом.

Определение. Графом Кэли $Cay(\mathbb{Z}_2^n, s)$ мы будем называть граф, множество вершин в котором есть $\mathbb{Z}^{\mathrm{n}}$, между двумя вершинам $a, b \in \mathbb{Z}^{\mathrm{n}}$ проходит ребро если расстояние Хэмминга между этими двумя бинарными строками равняется s. Используем стандартные обозначения для расстояния Хемминга двух вершин: $|\mathrm{a} - \mathrm{b}| = s$.

Определение. Вершины $a, b \in \mathbb{Z}_2^n$ называются антиподальными, если любой автоморфизм f, сохраняющий a (то есть $f(a) = a$), сохраняет и b (то есть выполнено $f(b) = b$). Для $Cay(\mathbb{Z}_2^n\ s)$ отношение антиподальности является отношением эквивалентности (симметрично, транзитивно, рефлексивно).

Определение. Множество вершин с заданным весом Хемминга назовём слоем уровня k: $L(k) = \{a \in \mathbb{Z}_2^n \colon |a| = k\}$.

Теорема 3.2.1. Существует сильно-корректный протокол, решающий задачу поиска антиподальной вершины в $Cay(\mathbb{Z}_2^n, s)$ при $s^2 + 3s \leq\ n$ за $O(\frac{n}{s}\log n)$ времени.

Задача интересна тем, что в экспоненциально большом симметричном графе с малой (сильно меньше числа вершин) фиксированной степенью удаётся построить полиномиальный протокол.

Доказательство теоремы опирается на следующие леммы.

Лемма 3.2.1. Пусть вершина $a \in L(l)$ имеет соседа на слоя $b \in L(t)$ (то есть слои l, t связаны), то суммарное число соседей вершины a со слоя t определяется следующим выражением:

$$N(t, l) = \binom{l}{\frac{s+l}{2} - \frac{t}{2}}\binom{n-l}{\frac{(s+t)}{2} - \frac{t}{2}}.$$

Здесь использовано другое (но также общепринятое) обозначение для биномиальных коэффициентов $C_n^k = \binom{n}{k}$ из-за громоздкости формулы.

Лемма 3.2.2. Следующая функция, определённая для чётных k из отрезка $[2, s+1]$ задаёт биекцию при $n \geq 6s$, $s > 2$.

$$F(k) = N(k, s) = \binom{s}{s - \frac{k}{2}}\binom{n-s}{\frac{k}{2}}.$$

Лемма 3.2.3. Для функции F выполнено для чётных $k \leq s + 1, l > s + 1$ при $n \geq s^2 + 3s$.

$$F(k) < F(l).$$

Используя эти леммы можно показать, что вершины первых $2s$ могут определить номер своего слоя. После чего информацию можно распространять на слои с большими номерами. В частности, слой номер n.

Основные результаты главы 3

Показан переход от сети с лидером к сети с нумерованными узлами. Дополнительно протокол распространяет информацию об остовном дереве. Причём построенный протокол оптимален – работает за линейное время.

После нумерации узлов все рёбра можно занумеровать с помощью двух чисел – номеров вершин, входящих в ребро. Дальнейшее распространение полной информации о матрице смежности не представляет сложностей.

То есть, суммируя результаты главы 2 и главы 3, построен метод сведения сети с уникальными идентификаторами к сети с полной информацией о сети.

Рассмотрена задача поиска антиподальной вершины в симметричных графах Кэли над группой булева куба. Построен полиномиальный протокол решения. При этом «тривиальный» подход требует экспоненциального времени.

Глава 4. Протокол построения остовного дерева с малой коммуникационной сложностью

В данной главе, в отличие от двух предыдущих, оптимизируемой величиной является не время, а суммарное число непустых сообщений, передаваемых по всем связям сети за время работы протокола.

Приводится оптимальный протокол для выбора лидера (и построения дерева) в случае, если вершины имеют априорную оценку размера компоненты, причём эта оценка одинаковая у всех узлов.

Принцип протокола прост: показывается что можно «разбудить» ровно один узел, который добавит всех в своё дерево до того, как какой-либо другой узел успеет проснуться.

Далее строится модификация этого протокола на случай, когда оценка не равномерная. Строится отображение, которое позволяет сохранить условие «не более одного узла успеет проснуться и начать работу в качестве лидера».

Теорема 4.2.1. Для любой неограниченной функции $g\colon \mathbb{N}_+ \to \mathbb{N}_+$ существует корректный детерминированный протокол построения остовного дерева в сети с одинаковыми начальными состояниями, коммуникационная сложность которого $O(E\ g(V))$.

Для основного случая, когда у узлов нет никакой априорной информации о сети, используется похожая идея: узлы пытаются угадать размер компоненты и действуют в соответствии с ним. Если угадать не удалось, то это определяется и результат работы отбрасывается.

Параллельно возможно выполнение протокола для нескольких таких предположений. Но это не противоречит тому, что по связям передаётся константное число бит на каждом такте, так как есть априорная оценка числа одновременно бегущих операций на каждом раунде. Так что не представляет сложностей эмулировать неограниченный объём сообщений, растягивая время работы очередного такта в необходимое число раз.

Последовательность предположений о размере сети, используемая узлами для выполнения протокола, является параметром всей конструкции, от неё требуется только выполнение условия
$$x_{k+1} > 2\,x_k^2, \;\; x_1 \geq 2.$$

Чем быстрее растёт эта последовательность, тем ближе будет трафик протокола к нижней оценке. Показано, что суммарный трафик не превосходит

$$S = O\left(\sum_{k=1}^{x^{-1}(V)} E \log k \right) = O\big(Ex^{-1}(V) \log x^{-1}(V)\big).$$

В последнем разделе главы рассматриваются вероятностные протоколы.

Вводится их определение как протоколов, работающих в сетях, где начальное состояние узлов содержит бесконечную строку, ассоциированную со случайными битами.

На этих строках вводится стандартная для таких постановок мера, порождённая мерой на множествах строк с заданным конечным префиксом.

Приводятся оценки адаптированного для вероятностного случая протокола, который имеет вероятность ошибки (построен лес, а не дерево) не больше заданной и оценку на трафик $O(E\ g(V))$.

Теорема 4.3.1. Для любого ε существует корректный вероятностный протокол построения остовного дерева в анонимной сети с неравномерной оценкой размера сети, трафик которого $O(E)$, а вероятность ошибки меньше ε.

Теорема 4.3.2. Для любой неограниченной функции $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ и любого $\varepsilon > 0$ существует слабо-корректный вероятностный протокол построения остовного дерева в анонимной сети с одинаковыми начальными состояниями, трафик которого $O(E\ g(V))$, а вероятность ошибки меньше ε.

Основные результаты главы 4

Построен протокол выбора лидера в сети с уникальными идентификаторами, причём этот протокол субоптимален по суммарному трафику.

Приведены вероятностные протоколы, также достигающие субоптимальной оценки.

Приложение А

В данном приложении доказываются две простые нижние оценки, суть которых заключается в том, что при выборе лидера необходимо «прозвонить» каждое ребро и каждую вершину. То есть оценкой снизу и на трафик, и на время работы можно взять $O(D + L)$, в качестве нижней оценки на трафик получаем $O(E)$.

Приложение Б

В данном приложении доказано, что корректные протоколы не могут быть построены в анонимных сетях. Причём доказательство приводится не только для детерминированных протоколов, но и для вероятностных. Точнее для ограниченно-вероятностных, это протоколы, которые за конечное время просматривают лишь конечный префикс доступной им строки случайных бит.

Заключение

Задача исследована достаточно подробно. Найдены эффективные методы сведения сетей с неизвестной топологией к сетям с известной.

Построенные протоколы эффективнее известных ранее, а для некоторых оценки совпадают с нижними.

Работы автора по теме диссертации.

1. Вялый М.Н., Хузиев И.М., «Распределённая коммуникационная сложность построения остовного дерева,» *Пробл. передачи информ.,* т. 51, № 1, pp. 54-71, 2015.
2. М. Н. Вялый, И. М. Хузиев, «Быстрые протоколы выбора лидера и построения остовного дерева в распределенной сети,» *Пробл. передачи информ.,* № 53:2, p. 91–111, 2017.
3. Хузиев, И.М., «Быстрая нумерация узлов в синхронной сети с сохранением структуры,» *Дискретные модели в теории управляющих систем: X Международная конференция, Москва и Подмосковье, 23-25 мая 2018 г.: Труды / Отв. ред. В.Б. Алексеев, Д.С. Романов, Б.Р. Данилов. — М.: МАКС Пресс, 2018. — 296 с. ISBN 978-5-317-05834-0.*
4. И. М. Хузиев, “О поиске антиподальных вершин в симметричном графе Кэли группы булева куба”, Дискретн. анализ и исслед. опер., 22:1 (2015), 86–99; J. Appl. Industr. Math., 9:2 (2015), 206–214

В работах с соавторами личный вклад соискателя состоит в следующем:

В работе 1 автором была сформулирована идея исследования стоимости перехода от сети с уникальными идентификаторами к сети остовным деревом. Получены опорные алгоритмы для сетей с априорной информацией, предложен метод распространения информации длиной паузы. Так же были сформулированы первые протоколы для основного случая, полученные для них оценки были значительно улучшены в ходе работы с соавтором и в работу не вошли. Был доказан ряд вспомогательных утверждений, в частности о невозможности разрушения симметрии в анонимных сетях даже вероятностными протоколами. Были доказаны нижние оценки.

В работе 2 автором была сформулирована постановка задачи и получены оценки для кольцевых сетей, в котором использовалась основная идея корректировки сообщений. В дальнейшем соавтор сумел обобщить и усилить эти результаты на произвольные графы.

Список литературы.

[1] Peleg D., Rubinovich V. A near-tight lower bound on the time complexity // SIAM J. on Computing, T. 30, 2000, c 1427–1442

[2] Dinitz Y., Moran Sh., Rajsbaum S. Bit complexity of breaking and achieving // *Journal of the ACM* T. 55 №1 , C. 1-28 ,2008

[3] Itai A., Rodeh M., Symmetry breaking in distributed networks // *Information and Computation,* т. 88, № 1, С. 60–87, 1990

[4] Frederickson G. N., Lynch N. A. Electing a leader in a synchronous ring // *Journal of the ACM,* T. 34, C. 98–115, 1987.

[5] Burns J.E. A formal model for message passing systems // *Tech. Rep. Indiana Univ,* TR–91, 1980.

[6] Lynch N.A. Distributed algorithms. // San Francisco, CA, USA:: Morgan, 1996.

[7] Perlman R. An algorithm for distributed computation of a spanning tree in an extended LAN // *ACM SIGCOMM Computer Communication Review,* T. 15, № 4, C. 44-53, 1985.

[8] Wattenhofer R. Principles of distributed computing // URL: http://dcg.ethz.ch/lectures/podc_allstars/lecture/podc.pdf, 2014..

[9] Вялый М.Н., Хузиев И.М. Распределённая коммуникационная сложность построения остовного дерева // *Пробл. передачи информ.,* Т. 51, № 1, С. 54-71, 2015.

[10] Вялый М. Н., Хузиев И. М. Быстрые протоколы выбора лидера и построения остовного дерева в распределенной сети // *Пробл. передачи информ.,* Т 53 № 2, С. 91–111, 2017.

[11] Хузиев И.М. Быстрая нумерация узлов в синхронной сети с сохранением структуры дерева // *Дискретные модели в теории управляющих систем: X Международная конференция, Москва и Подмосковье, 23-25 мая 2018 г.: Труды / М.: МАКС Пресс, 2018. — 296 с. ISBN 978-5-317-05834-0.*

[12] Успенский В.А., Верещагин Н.К., Шень А. Колмогоровская сложность и алгоритмическая случайность // МЦНМО , 2010.

[13] Pritchard D. An Optimal Distributed Edge-Biconnectivity Algorithm // *URL:* [*https://arxiv.org/abs/cs/0602013*](https://arxiv.org/abs/cs/0602013).

[14] И. М. Хузиев, “О поиске антиподальных вершин в симметричном графе Кэли группы булева куба”, Дискретн. анализ и исслед. опер., 22:1 (2015), 86–99; J. Appl. Industr. Math., 9:2 (2015), 206–214