МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Старостин

Старостин Михаил Васильевич

Критериальная система неявно предполных классов в трехзначной логике

Специальность 01.01.09 —
«Дискретная математика и математическая кибернетика»

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2021

Работа выполнена на кафедре дискретной математики Механико-математического факультета Федерального Государственного Бюджетного Образовательного Учреждения Высшего Образования «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова».

Научный руководитель: **Дудакова Ольга Сергеевна,**
кандидат физико-математических наук

Официальные оппоненты: **Алексеев Валерий Борисович,**
доктор физико-математических наук,
профессор кафедры математической кибернетики факультета Вычислительной математики и кибернетики ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова»

Перязев Николай Алексеевич,
доктор физико-математических наук,
профессор кафедры вычислительной техники факультета компьютерных технологий и информатики СПбГЭТУ «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина)

Мещанинов Дмитрий Германович,
кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры математического моделирования Института автоматики и вычислительной техники ФГБОУ ВО «НИУ «МЭИ»

Защита состоится 27 октября 2021 г. в 16 часов 45 минут на заседании диссертационного совета МГУ.05.01 ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова» по адресу: 119234, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова», механико-математический факультет, аудитория 14-08.
Email: vasenin@msu.ru

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М. В. Ломоносова (Ломоносовский просп., д. 27) и на сайте ИАС «ИСТИНА»: https://istina.msu.ru/dissertations/391544317/

Автореферат разослан 27 сентября 2021 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
МГУ.05.01,
канд. физ.-мат. наук М. Кривчиков Кривчиков Максим Александрович

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Диссертация относится к одному из важнейших направлений дискретной математики и математической кибернетики — теории функциональных систем[1]. В ней рассматривается задача о так называемой неявной выразимости — о выразимости функций с помощью уравнений. В частности, исследуется вопрос о неявной полноте систем функций трехзначной логики.

Вопросы выразимости и полноты играют важную роль в теории функциональных систем. Обычно фиксируется некоторое множество A и рассматривается множество всех функций P_A, у которых и аргументы, и значения принадлежат множеству A. Далее определяется оператор ϕ, отображающий множество всех подмножеств P_A в себя. К задачам полноты относятся различные вопросы, связанные с выявлением полных систем функций $\mathfrak{A} \subseteq P_A$, т. е. таких, что множество $\phi(\mathfrak{A})$ совпадает с P_A. Кроме того, важными являются вопросы установления необходимых и/или достаточных условий полноты систем функций. Задачи выразимости являются естественным обобщением задач полноты. К ним относятся вопросы, связанные с нахождением $\phi(\mathfrak{A})$ для произвольных $\mathfrak{A} \subseteq P_A$, изучение структуры множеств $\phi(\mathfrak{A})$ и многие другие.

Ясно, что решение этих задач непосредственно зависит от множества A (точнее, от его мощности), а также от свойств оператора ϕ. В частности, если оператор ϕ обладает свойствами экстенсивности ($\mathfrak{A} \subseteq \phi(\mathfrak{A})$), изотонности ($\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B} \Rightarrow \phi(\mathfrak{A}) \subseteq \phi(\mathfrak{B})$) и идемпотентности ($\phi(\phi(\mathfrak{A})) = \phi(\mathfrak{A})$), то он называется оператором замыкания[2].

Ряд основополагающих результатов для множества всех функций двузначной логики с оператором суперпозиции был получен Э. Л. Постом[3]. Им было доказано, что в двузначной логике мощность множества классов, замкнутых относительно операции суперпозиции, счетна. Также Пост описал все эти классы и показал, что каждый из них является конечно-порожденным.

Удобным понятием для решения задач полноты оказалось понятие предполного (максимального по включению неполного) класса. А. В. Кузнецов[4] показал, что число предполных по суперпозиции классов конечно

[1] Яблонский С. В. Функциональные построения в k-значной логике // Труды математического института АН СССР им. Стеклова. — М.: Изд-во АН СССР, 1958. — С. 5–142.

[2] Кон П. Универсальная алгебра. М.: Мир, 1968.

[3] Post E. L. Introduction to a general theory of elementary propositions // American Journal of Mathematics. — 1921. — Vol. 43. — P. 143–185.; Post E. L. Two-valued iterative systems of mathematical logic // Princeton University Press, 1941.

[4] Кузнецов А. В. О проблемах тождества и функциональной полноты для алгебраических систем // Труды 3-го Всесоюзного матем. съезда. М.: Изд-во АН СССР, 1956. Т. 2. С. 145 — 146.

в P_k при любом $k \geq 2$ и всякий неполный класс содержится в некотором предполном. В трехзначной логике все предполные классы были описаны С. В. Яблонским[5]. В дальнейшем было получено большое количество результатов, связанных с различными семействами предполных классов в P_k[6]. Окончательное решение задачи описания всех предполных классов в P_k было получено И. Розенбергом[7].

Попытки построения решетки замкнутых по суперпозиции классов в P_k при $k \geq 3$ натолкнулись на трудности принципиального характера. Ю. И. Яновым и А. А. Мучником[8] было показано, что в P_k существуют как классы, не имеющие базиса, так и классы, имеющие счетный базис. Тем самым было установлено, что семейство замкнутых классов в P_k при $k \geq 3$ имеет континуальную мощность. В связи со значительными затруднениями при обозрении континуального числа классов выделилось два основных направления исследований.

К первому направлению относятся работы, в которых рассматриваются некоторые фрагменты решетки замкнутых по суперпозиции классов. В частности, изучаются решетки подклассов и надклассов некоторых замкнутых классов[9], а также множества классов, находящихся на определенных уровнях решетки всех классов[10].

---

[5] Яблонский С. В. О функциональной полноте в трехзначном исчислении // Доклады АН СССР. 1954. Т. 95, № 6. С. 1152 — 1156.

[6] Байрамов Р. А. Об одной серии предполных классов в k-значной логике // Кибернетика. — 1967. — Вып. 1. — С. 7–9.; Захарова Е. Ю. Критерий полноты системы функций из P_k // Проблемы кибернетики. — 1967. — Вып. 18. — С. 5–10.; Захарова Е. Ю., Кудрявцев В. Б., Яблонский С. В. О предполных классах в k-значных логиках // Доклады АН СССР. — 1969. — Т. 186, № 3. — С. 509–512.; Ло Чжу-Кай. О предполноте классов функций, сохраняющих разбиение // Acta sci. natur. Univ. Jilinensis. — 1963. — № 2.; Мартынюк В. В. Исследование некоторых классов в многозначных логиках // Проблемы кибернетики. — 1960. — Вып. 3. С. 49–60.; Пан Юн-Цзе. Один разрешающий метод для отыскания всех предполных классов в многозначной логике // Acta sci. natur. Univ. Jilinensis. — 1962. — № 2.; Tardos G. A not finitely generated maximal clone of monotone operations // Order. — 1986. — № 3. — P. 211–218.

[7] Rosenberg I. G. Über die funktionale Vollständigkeit in den mehrwertigen Logiken // Rozpravy Čs. Akad. Věd. Ser. Řada Mat. Přirod. Sci. — 1970. — Vol. 80. — P. 3–93.

[8] Янов Ю. И., Мучник А. А. О существовании k-значных замкнутых классов, не имеющих конечного базиса // Доклады АН СССР. — 1959. — Т. 127, № 1. — С. 44-46.

[9] Бурле Г. А. Классы k-значных функций, содержащие все функции одной переменной // Дискретный анализ. — 1967. — Вып. 10. — С. 3–7.; Деметрович Я., Мальцев И. А. О строении клона Бурле на трехэлементном множестве // Acta Cybernet. — 1989. — Vol. 9, № 1. — P. 1–25.; Марченков С. С. Дискриминаторные классы трехзначной логики // Математические вопросы кибернетики. — 2003. — Вып. 12. — С. 15–26.; Мещанинов Д. Г. О некоторых свойствах надструктуры класса полиномов в P_k // Математические заметки. — 1988. — Т. 44, № 5. — С. 673—681.; Bagyinszki J., Demetrovics J. The structure of linear classes in prime-valued logics // Banach Center publications. — 1982. — Vol. 7. — P. 105–123.

[10] Csákány B. All minimal clones on three-element set // Acta Cybernet. — 1983. — Vol. 6, № 3. — P. 227–238.; Lau D. Submaximalle Klassen von P_3 // J. Inf. Process. Cybern. — 1982. — Vol. 18, № 4/5. — P. 227–243.

Ко второму направлению относятся работы, в которых изучаются виды выразимости отличные от выразимости по суперпозиции (обычно более сильные). Один из подходов в этом направлении — выделить некоторое множество функций F и разрешить в определении суперпозиции в качестве тривиальных формул использовать формулы, реализующие функции из этого множества. Легко видеть, что изучение такого вида выразимости тесно связано с решеткой надклассов рассматриваемого множества. В частности, Кузнецовым[11] было введено понятие слабой выразимости по суперпозиции, при этом в качестве множества F берется множество всех констант $\{0,1,\ldots,k-1\}$. Кроме того, ко второму направлению относятся работы по изучению S-замыкания[12], операций программного типа[13] и другие[14].

Кузнецовым[15] было введено несколько видов выразимости, в которых функции выражаются через другие функции посредством функциональных уравнений. В частности, им рассматривались операторы параметрического замыкания и неявной выразимости. Кузнецову удалось описать все параметрически замкнутые классы в P_2. А. Ф. Данильченко[16] нашла все параметрически предполные классы в P_3, а также доказала, что в трехзначной логике имеется конечное число параметрически замкнутых классов.

---

[11] Кузнецов А. В. О проблемах тождества и функциональной полноты для алгебраических систем // Труды 3-го Всесоюзного матем. съезда. М.: Изд-во АН СССР, 1956. Т. 2. С. 145 — 146.

[12] Марченков С. С. Основные отношения $S-$классификации функций многозначной логики // Дискретная математика. 1996. Т. 8, вып. 1. С. 99—128.; Марченков С. С. S-классификация функций многозначной логики // Дискретная математика. 1997. Т. 9, № 3, С. 125—152.; Нгуен Ван Хоа. О структуре самодвойственных замкнутых классов трехзначной логики P_3 // Дискретная математика. 1992. Т. 4, № 4. С. 82—95.; Нгуен Ван Хоа. О семействах замкнутых классов k-значной логики, сохраняемых всеми автоморфизмами // Дискретная математика. 1993. Т. 5, № 4. С. 87—108.

[13] Соловьев В. Д. Замкнутые классы в $k-$значной логике с операцией разветвления по предикатам // Дискретная математика. 1990. Т. 2, вып. 4. С. 18 – 25.; Тайманов В. А. О функциональных системах k-значной логики операциями программного типа // Докл. АН СССР. 1983. Т. 268, № 6. С. 1307 – 1310.; Тайманов В. А. Функциональные системы с операциями замыкания программного типа. Диссертация. 1983.

[14] Акулов Я. В. О полноте систем функций для классов расширенной суперпозиции // Вестник МГУ. Серия 1. Математика. Механика. — 2011. — № 1. — С. 36–41.; Подолько Д. К. О классах функций, замкнутых относительно специальной операции суперпозиции // Вестник МГУ. Серия 1. Математика. Механика. — 2013. — №6. — С. 54–57.; Тарасова О. С. Классы функций k-значной логики, замкнутые относительно операции суперпозиции и перестановки // Математические вопросы кибернетики. 2004. Вып. 13. С. 59 – 112.

[15] Кузнецов А. В. О средствах для обнаружения невыводимости или невыразимости // Логический вывод. — М.: Наука, 1979. — С. 5–33.

[16] Данильченко А. Ф. О параметрической выразимости функций трехзначной логики // Алгебра и логика. — 1977. — Т. 16, № 4. — С. 397–416.

Позднее[17] была установлена конечность числа параметрически замкнутых классов в P_k при любом $k \geq 2$.

Неявная выразимость является частным случаем параметрического замыкания в том смысле, что любая функция неявно выразимая над системой функций, параметрически выражается через эту систему. Вообще говоря, неявная выразимость оказывается слабее параметрического замыкания, однако О. М. Касим-Заде[18] показал, что для всякого множества функций двузначной логики неявное расширение этого множества совпадает с его параметрическим замыканием. При произвольных $k \geq 3$ параметрическое замыкание и неявная выразимость существенно различаются. В частности, при $k \geq 3$ неявная выразимость не является оператором замыкания, так как не обладает свойством идемпотентности[19]. Кроме того, Касим-Заде были найдены критерии[20] неявной полноты в терминах неявно предполных (т.е. максимальных по включению неявно неполных) классов и в терминах минимальных (по включению, замкнутых по суперпозиции) неявно полных классов в P_2, а также получен критерий неявной полноты в P_k при произвольном k в терминах функций трех переменных[21]. Неявной полнотой в трехзначной логике занималась Е. А. Орехова[22]. В частности, ею были найдены все минимальные неявно полные классы в P_3.

В диссертации исследуются неявно предполные классы трехзначной логики. Отметим, что из критерия неявной полноты в P_k следует конечность числа предполных классов в P_k при любом k, однако, полного описания этих классов при произвольных k, начиная с $k = 3$, известно не было.

Цель работы

Целью диссертационной работы является получение критерия неявной полноты в трехзначной логике в терминах неявно предполных классов.

Объект и предмет исследования

[17] Burris S., Willard R. Finitely many primitive positive clones // Proceedings of the American Mathematical Society. — 1987. — Vol. 101, № 3. — P. 427–430.

[18] Касим-Заде О. М. О неявной выразимости булевых функций // Вестник МГУ. Серия 1. Математика. Механика. — 1995. — №2. — С. 44–49.

[19] Кузнецов А. В. О средствах для обнаружения невыводимости или невыразимости // Логический вывод. — М.: Наука, 1979. — С. 5–33.

[20] Касим-Заде О. М. О неявной выразимости в двузначной логике и криптоизоморфизмах двухэлементных алгебр // Доклады РАН. — 1996. — Т. 348, № 3. — С. 299–301.

[21] Касим-Заде О. М. О неявной полноте в k-значной логике // Вестник МГУ. Серия 1. Математика. Механика. — 2007. — №3. — С. 9–13.

[22] Орехова Е. А. Об одном критерии неявной полноты в k-значной логике // Математические вопросы кибернетики. — 2002. — Вып. 11. — С. 77–90.; Орехова Е. А. О критерии неявной шефферовости в трёхзначной логике // Дискретный анализ и исследование операций. Серия 1. — 2003. — Т.10. №3. — С. 82–105.; Орехова Е. А. Об одном критерии неявной полноты в трёхзначной логике // Математические вопросы кибернетики. — 2003. — Вып. 12. — С. 27–74.

Объектом диссертации являются классы функций трехзначной логики. Предмет исследования представляет собой проблему распознавания полноты по неявной выразимости в трехзначной логике.

Основные методы исследования

В диссертации используются методы дискретной математики и теории функциональных систем, в частности, предикатный подход к описанию замкнутых классов функций.

Научная новизна

Все основные результаты диссертации являются новыми и получены автором самостоятельно. Для множества P_3 функций трехзначной логики получены следующие основные результаты:

1. Впервые получен критерий неявной полноты в терминах неявно предполных классов.
2. Впервые получено описание нескольких ранее неизвестных семейств неявно предполных классов функций.
3. Доказана предикатная описуемость всех неявно предполных классов, для каждого из этих классов построен соответствующий предикат.
4. Доказан критерий слабой неявной полноты.

Основные положения, выносимые на защиту

На защиту выносятся: обоснование актуальности, научная значимость работы, а также следующие положения.

1. Доказана полнота описания неявно предполных классов в P_3. Тем самым установлен критерий неявной полноты в трехзначной логике в терминах неявно предполных классов.
2. Доказана неявная предполнота нескольких семейств классов функций в P_3.
3. Доказано, что каждый неявно предполный класс в трехзначной логике является классом сохранения предиката. Построены соответствующие предикаты.
4. Установлен критерий слабой неявной полноты в P_3.

Теоретическая и практическая ценность

Диссертация имеет теоретический характер. Результаты могут найти применение в исследованиях по теории функциональных систем, а также теории синтеза и сложности управляющих систем.

Апробация работы

Результаты диссертации докладывались на следующих семинарах и всероссийских и международных конференциях:

1. XII Международный научный семинар «Дискретная математика и ее приложения» имени академика О. Б. Лупанова, МГУ, Россия, 20–25 июня 2016 г.

2. XIII Международная научная конференция студентов, магистрантов и молодых ученых, МГУ им. М. В. Ломоносова, Россия, 10–14 апреля 2017 г.
3. Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2018», Москва, Россия, 9 апреля – 13 мая 2018 г.
4. Семинар «Теоретическая кибернетика», ИПМ им. М. В. Келдыша, 6 февраля 2019 г.
5. Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2019», Москва, Россия, 8–12 апреля 2019 г.
6. XIII Международный семинар «Дискретная математика и ее приложения», Москва, Россия, 17–22 июня 2019 г.
7. Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2020», Москва, Россия, 10–27 ноября 2020 г.
8. Научно-исследовательский семинар по алгебре, механико-математический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова, 7 декабря 2020 г.
9. Семинар «Математические вопросы кибернетики», механико-математический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова, 19 марта 2021 г.
10. Объединенное заседание кафедры алгебры и математической логики, кафедры теоретической кибернетики и семинара «Теория вычислимости», институт математики и механики К(П)ФУ, 3 июня 2021 г.

Публикации

Основные результаты по теме диссертации изложены в 6 работах автора, 3 из которых опубликованы в рецензируемых научных изданиях, индексируемых Web of Science, Scopus и RSCI, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности 01.01.09 — дискретная математика и математическая кибернетика. Список публикаций приведен в конце автореферата [1—6].

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Полный объем диссертации составляет 133 страницы, список литературы содержит 70 наименований.

Содержание работы

Во **введении** кратко излагается история вопроса, описаны основные результаты работы и даны определения, необходимые для формулировки этих результатов. В частности, дается ряд определений, связанных с неявной выразимостью.

Функция $f(x_1,\ldots,x_n) \in P_k$ называется *неявно выразимой* над системой функций $\mathfrak{A}$, если в системе $[\mathfrak{A} \cup \{x\}]$ найдутся такие функции A_i, B_i, что система уравнений

$$\begin{cases} A_1(x_1,\ldots,x_n,z) = B_1(x_1,\ldots,x_n,z), \\ A_2(x_1,\ldots,x_n,z) = B_2(x_1,\ldots,x_n,z), \\ \ldots \\ A_m(x_1,\ldots,x_n,z) = B_m(x_1,\ldots,x_n,z), \end{cases}$$

эквивалентна уравнению $z = f(x_1,\ldots,x_n)$.

Множество всех неявно выразимых над $\mathfrak{A}$ функций называется *неявным расширением* $\mathfrak{A}$ и обозначается через $I(\mathfrak{A})$. Система функций $\mathfrak{A}$ называется *неявно полной*, если $I(\mathfrak{A}) = P_k$, и *неявно предполной*, если она не является неявно полной, но при добавлении любой функции, не принадлежащей A, становится таковой.

В **первой главе** вводится ряд вспомогательных понятий и обозначений, а также формулируются некоторые известные утверждения.

Пусть $E_k = \{0,1,\ldots,k-1\}$, а P_k — множество всех функций k-значной логики. Функция f^σ *двойственна функции* $f \in P_k$ *относительно подстановки* σ на множестве E_k, если для произвольного набора $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ значений переменных верно равенство

$$\sigma(f^\sigma(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)) = f(\sigma(\alpha_1),\ldots,\sigma(\alpha_n)).$$

Функция $f(x_1,\ldots,x_n) \in P_k$ *сохраняет матрицу* A размера $t \times s$ с элементами из E_k, если для любых, быть может повторяющихся, столбцов этой матрицы

$$\begin{pmatrix} a_1^{j_1} \\ a_2^{j_1} \\ \ldots \\ a_t^{j_1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1^{j_2} \\ a_2^{j_2} \\ \ldots \\ a_t^{j_2} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_1^{j_n} \\ a_2^{j_n} \\ \ldots \\ a_t^{j_n} \end{pmatrix}$$

столбец

$$\begin{pmatrix} f(a_1^{j_1}, a_1^{j_2}, \ldots, a_1^{j_n}) \\ f(a_2^{j_1}, a_2^{j_2}, \ldots, a_2^{j_n}) \\ \ldots \\ f(a_t^{j_1}, a_t^{j_2}, \ldots, a_t^{j_n}) \end{pmatrix}$$

также является столбцом матрицы A. Множество всех функций, сохраняющих матрицу A, называется *классом сохранения матрицы* A и обозначается через $Pol(A)$. Класс функций называется *предикатно описуемым*, если он является классом сохранения некоторой матрицы.

Будем использовать следующие обозначения[23] для классов функций в P_2: T_a — класс функций, сохраняющих константу $a \in E_2$, S — класс

[23] Угольников А. Б. Классы Поста. М.: Изд.-во ЦПИ при мех.-мат. факультете МГУ, 2008.

самодвойственных функций, L — класс линейных функций, K — класс конъюнкций и констант, D — класс дизъюнкций и констант. А также следующие обозначения[24] для предполных по суперпозиции классов в P_3: $T_{E,0}$ — класс функций, сохраняющих подмножество $E \subseteq E_3$, $T_{\{a\},1}$ — класс функций, сохраняющих матрицу $\begin{pmatrix} a & b & c & a & a & b & c \\ a & b & c & b & c & a & a \end{pmatrix}$, $T_{N,2}$ — класс Слупецкого, $U_{\{a,b\}\{c\}}$ — класс функций, сохраняющих разбиение $\{a,b\}\{c\}$, где a,b,c — попарно различные элементы E_3, S — класс самодвойственных функций, L — класс линейных функций, M_1, M_2, M_3 — классы функций монотонных относительно порядков $0 < 1 < 2, 1 < 2 < 0, 2 < 0 < 1$ соответственно.

Вторая глава посвящена описанию неявно предполных классов в P_3 и доказательству их неявной предполноты.

В первом параграфе доказывается, что предполные по суперпозиции классы $S, L, T_{a,0}$ при $a \in E_3$ также являются неявно предполными [5].

Во втором параграфе описываются классы, которые представляются в виде пересечения нескольких предполных по суперпозиции, и доказывается, что они являются неявно предполными. Такими классами являются $Y_c = T_{\{a,b\}} \cap U_{\{a,b\}\{c\}} \cap T_{\{c\},1}$, где a,b,c — попарно различные элементы из E_3, а также классы $W_a = U_{\{a,b\}\{c\}} \cap U_{\{a,c\}\{b\}}$, где a,b,c — попарно различные элементы из E_3.

В третьем параграфе рассматриваются два семейства классов типа Σ. Введем следующие обозначения:

$$\Sigma_S^{\{0,1\}} = Pol \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \Sigma_K^{\{0,1\}} = Pol \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\Sigma_L^{\{0,1\}} = Pol \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Эти классы, а также классы двойственные им являются неявно предполными в P_3 [2].

Введем обозначения для следующих классов:

$$\Sigma_S^{\{0,1\}} = Pol \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad \Sigma_K^{\{0,1\}} = Pol \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix};$$

[24] Яблонский С. В. Функциональные построения в k-значной логике // Труды математического института АН СССР им. Стеклова. — М.: Изд-во АН СССР, 1958. — С. 5–142.

$$\Sigma_{T_0}^{\{0,1\}} = Pol \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad \Sigma_{L}^{\{0,1\}} = Pol \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Эти классы, а также классы двойственные им являются неявно предполными в P_3.

В четвертом параграфе рассматривается ряд классов, функции которых являются монотонными относительно некоторых порядков. К ним относятся классы

$$KM_1 = Pol \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix};$$

$$R_2' = Pol \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}; \quad Q_2' = Pol \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix};$$

$$F_2' = Pol \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$

а также двойственные им. Все такие классы являются неявно предполными в P_3 [3].

В пятом параграфе доказывается, что класс квазилинейных функций $\mathfrak{N}$ является неявно предполным в P_3. Класс $\mathfrak{N}$ можно определить как класс сохранения матрицы, каждый из столбцов которой при подстановке в предикат

$$(x_1 = x_2) \wedge (x_3 = x_4) \vee (x_1 = x_3) \wedge (x_2 = x_4) \vee (x_1 = x_4) \wedge (x_2 = x_3)$$

обращает его в единицу.

Всего во второй главе описано 54 неявно предполных класса.

В **третьей главе** доказывается, что список всех неявно предполных классов в P_3 исчерпывается 54 классами, описанными во второй главе. Для этого строятся все возможные (за исключением некоторых тривиальных случаев) замкнутые по суперпозиции классы одноместных функций в P_3. Далее для каждого из них рассматривается вопрос, существуют ли неявно предполные классы с таким множеством одноместных функций отличные от описанных во второй главе.

Для удобства изложения третья глава, во-первых, разбита на пять параграфов, первые четыре из которых соответствуют количеству констант в рассматриваемых классах. А, во-вторых, четвертый параграф, который соответствует классам с тремя константами, разбит на пять разделов, в каждом из которых рассматриваются классы, содержащиеся в некотором предполном по суперпозиции классе.

Основным результатом третьей главы является следующая теорема.

Теорема 1. [1; 4; 6] Система функций трехзначной логики полна в P_3 по неявной выразимости тогда и только тогда, когда она целиком не содержится ни в одном из следующих 54 неявно предполных классов:

$$S, L, T_{\{0\},0}, T_{\{1\},0}, T_{\{2\},0}, W_0, W_1, W_2, Y_0, Y_1, Y_2, \Sigma_L^{\{0,1\}}, \Sigma_S^{\{0,1\}}, \Sigma_K^{\{0,1\}}, \Sigma_D^{\{0,1\}},$$
$$\Sigma_L^{\{0,2\}}, \Sigma_S^{\{0,2\}}, \Sigma_K^{\{0,2\}}, \Sigma_D^{\{0,2\}}, \Sigma_L^{\{1,2\}}, \Sigma_S^{\{1,2\}}, \Sigma_K^{\{1,2\}}, \Sigma_D^{\{1,2\}},$$
$$\Sigma_L^{\{0,1\}\{2\}}, \Sigma_{T_0}^{\{0,1\}\{2\}}, \Sigma_{T_1}^{\{0,1\}\{2\}}, \Sigma_K^{\{0,1\}\{2\}}, \Sigma_D^{\{0,1\}\{2\}}, \Sigma_L^{\{0,2\}\{1\}}, \Sigma_{T_0}^{\{0,2\}\{1\}}, \Sigma_{T_1}^{\{0,2\}\{1\}},$$
$$\Sigma_K^{\{0,2\}\{1\}}, \Sigma_D^{\{0,2\}\{1\}}, \Sigma_L^{\{1,2\}\{0\}}, \Sigma_{T_0}^{\{1,2\}\{0\}}, \Sigma_{T_1}^{\{1,2\}\{0\}}, \Sigma_K^{\{1,2\}\{0\}}, \Sigma_D^{\{1,2\}\{0\}},$$
$$KM_1, DM_1, KM_2, DM_2, KM_3, DM_3, R'_0, R'_1, R'_2, Q'_0, Q'_1, Q'_2, F'_0, F'_1, F'_2, \mathfrak{N}.$$

Заключение

Основным результатом диссертации является установление критерия неявной полноты в трехзначной логике в терминах неявно предполных классов. Был описан ряд классов предполных относительно неявной выразимости, которые ранее не рассматривались в связи с неявной выразимостью. Эти классы вместе с ранее известными неявно предполными классами образуют критериальную систему для установления неявной полноты. Каждый класс этой системы сохраняет некоторый предикат, и все такие предикаты приведены в явном виде, что позволяет эффективно устанавливать принадлежность произвольных функций этим классам.

Результаты диссертации могут найти применение в исследованиях по теории функциональных систем, а также теории синтеза и сложности управляющих систем.

Благодарности

Автор благодарит доктора физико-математических наук, профессора О. М. Касим-Заде за постановку задачи и научное руководство, а также кандидата физико-математических наук О. С. Дудакову за научное руководство и внимание к работе.

Публикации автора по теме диссертации

Научные статьи, опубликованные в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности 01.01.09 — дискретная математика и математическая кибернетика

1. *Старостин М. В.* Неявно предполные классы и критерий неявной полноты в трехзначной логике // Вестник МГУ. Серия 1. Математика. Механика. — 2018. — № 2. — С. 182—184 (Scopus, RSCI WoS, ИФ РИНЦ 0,369).

2. *Старостин М. В.* О некоторых неявно предполных классах функций, сохраняющих подмножества // Вестник МГУ. Серия 1. Математика. Механика. — 2018. — № 6. — С. 36—40 (Scopus, RSCI WoS, ИФ РИНЦ $0,369$).
3. *Старостин М. В.* О некоторых неявно предполных классах монотонных функций в P_k // Дискретная математика. — 2018. — Т. 30, № 4. — С. 106—114 (Scopus, RSCI WoS, ИФ РИНЦ $0,685$).

Прочие (по теме диссертации)

4. *Старостин М. В.* Критерий неявной полноты в трехзначной логике // Материалы XII Международного семинара «Дискретная математика и ее приложения» имени академика О. Б. Лупанова (Москва, МГУ, 20—25 июня 2016 г.). — М.: Издательство механико-математического факультета МГУ, 2016. — С. 226—229.
5. *Старостин М. В.* О классах самодвойственных функций неявно предполных в P_k // Материалы XIII Международного семинара «Дискретная математика и ее приложения» имени академика О. Б. Лупанова (Москва, МГУ, 17–22 июня 2019 г.). — М.: Издательство механико-математического факультета МГУ, 2019. — С. 182—184.
6. *Старостин М. В.* Implicit completeness criterion in three-valued logic in terms of maximal classes [Электронный ресурс] // arXiv.org — 2021. — https://arxiv.org/pdf/2103.16631.pdf (дата обращения: 30.08.2021).

Старостин Михаил Васильевич

Критериальная система неявно предполных классов в трехзначной логике

Автореф. дис. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук

Подписано в печать 19.09.2021 Заказ № 21
Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 1. Тираж 100 экз.
Отдел оперативной печати геологического факультета МГУ