На правах рукописи

Багапш Астамур Олегович

Аппроксимация функций решениями однородных эллиптических систем второго порядка на компактах в комплексной плоскости и граничные свойства этих решений

01.01.01 — *вещественный, комплексный и функциональный анализ*

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург — 2018

Работа выполнена на кафедре прикладной математики ФГБОУ ВО Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет).

Научный руководитель:
Федоровский Константин Юрьевич,
доктор физико-математических наук, доцент, главный научный сотрудник НИЧ НУК ФН и профессор кафедры прикладной математики ФГБОУ ВО Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана (национальный исследовательский университет).

Научный консультант:
Власов Владимир Иванович,
доктор физико-математических наук, зав. сектором аналитико-численных методов математической физики отдела прикладной математической физики ФГУ «Федеральный исследовательский центр “Информатика и управление” РАН».

Официальные оппоненты:
Капустин Владимир Владимирович,
доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории математического анализа ФГБУН «Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН»;

Лысов Владимир Генрихович,
кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник отдела теоретической математики ФГУ «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН».

Ведущая организация: Институт математики с вычислительным центром — обособленное структурное подразделение Федерального государственного бюджетного научного учреждения Уфимского федерального исследовательского центра РАН.

Защита диссертации состоится «____» ____________ 2018 г. в ____ часов на заседании Диссертационного совета Д 002.202.01 при ФГБУН «Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН» по адресу: 191023, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, д. 27, к. 311.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ФГБУН «Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН», http://pdmi.ras.ru/

Автореферат разослан «____» ____________ 2018 г.

Ученый секретарь
Диссертационного совета Д 002.202.01,
доктор физико-математических наук А.Ю. Зайцев

Общая характеристика работы

Актуальность темы. В диссертации рассматриваются задачи аппроксимации функций решениями однородных эллиптических систем второго порядка с постоянными коэффициентами на компактах в комплексной плоскости и связанные задачи о граничном поведении решений таких систем. Аппроксимация рассматривается в нормах пространств непрерывных функций и функций класса C^1.

Эти задачи принадлежат к хорошо известному, актуальному и активно развивающемуся направлению современного математического анализа — к теории приближений аналитическими функциями. Задачи аппроксимации функций многочленами и рациональными функциями комплексного переменного, гармоническими функциями и многочленами интересовали еще классиков комплексного анализа — К. Вейерштрасса, К. Рунге, П. Л. Чебышева, Ш. Эрмита. Полученные в этих задачах результаты А. Г. Витушкина и С. Н. Мергеляна о равномерной аппроксимации функций рациональными функциями и многочленами комплексного переменного и результаты М. В. Келдыша и Д. Уолша о равномерной аппроксимации гармоническими функциями и многочленами стали классикой математического анализа.

В последней четверти 20-го столетия в теории приближений стали рассматриваться задачи аппроксимации функций решениями общих однородных эллиптических дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. При этом аппроксимация стала рассматриваться как в нормах классических пространств функций (таких, как C^m, $m \geqslant 0$, и L^p, $p > 0$), так и в нормах специальных пространств обобщенных функций (распределений) на компактных (или, в более общем случае, на замкнутых) подмножествах эвклидовых пространств. Как и в классических случаях, здесь выделяются задачи аппроксимации функций полиномиальными решениями рассматриваемых уравнений и систем, а также решениями со специальным образом локализованными особенностями, лежащими вне множества, на котором рассматривается аппроксимация. За последние два десятилетия в этой тематике получен ряд важных результатов. Отметим работы А. Буаве, Д. Вердеры, С. Гардинера, П.М. Готье, А. Б. Зайцева, Д. Д. Кармоны, М. Я. Мазалова, А.Г. О'Фаррела, П. В. Парамонова, Н. Н. Тарханова, К. Ю. Федоровского, В. П. Хавина, Н. А. Широкова и др.

Отметим, что в упомянутых работах задачи аппроксимации рассматривались, в основном, для случая эллиптических уравнений второго порядка с постоянными комплексными коэффициентами (для т.н. кососимметричных систем). При этом вопрос о том, что происходит в случае систем общего вида, оставался открытым и явно задавался специалистами. Этот вопрос (в случае эллиптических систем второго порядка) изучается в диссертации.

Важную роль в перечисленных задачах аппроксимации играют вопросы о разрешимости классических краевых задач для дифференциальных уравнений или систем и вопрос о граничном поведении решений этих уравнений и систем. Речь идет, главным образом, о задаче Дирихле, или о задаче непрерывного продолжения функции, непрерывной на границе заданной области, до функции, удовлетворяющей нужному уравнению или системе внутри этой области. Среди многочисленных работ, посвященных задаче Дирихле для эллиптических систем, отметим работы Г. Веркоты, В.А. Козлова, Д. Пайфер, А.П. Солдатова, А.Л. Фогеля. В них получен ряд важных результатов о разрешимости задачи Дирихле для индивидуальных граничных функций и о регулярности плоских односвязных областей относительно этой задачи, т.е. результатов об ее разрешимости для произвольной непрерывной граничной функции.

Однако и в этом направлении остается открытым ряд интересных и важных вопросов. Среди них вопрос о регулярности произвольной ограниченной односвязной области относительно задачи Дирихле для любого сильно эллиптического уравнения второго порядка с постоянными комплексными коэффициентами. Другой известный вопрос — это вопрос о существовании областей, регулярных относительно уравнений второго порядка с постоянными комплексными коэффициентами, не являющихся сильно эллиптическими. Еще один важный вопрос в этом направлении — это вопрос о свойствах отображений плоских областей решениями рассматриваемых систем и, в частности, о свойствах гармонических отображений. Эти вопросы также изучаются в диссертации.

Таким образом, диссертация посвящена изучению нескольких известных специалистам вопросов, связанных с аппроксимативными свойствами и граничным поведением решений однородных эллиптических систем второго порядка с постоянными коэффициентами в комплексной плоскости.

Цель работы. Целями диссертационного исследования являются:

i) получение новых необходимых и достаточных условий (критериев) аппроксимации функций полиномиальными решениями общих однородных эллиптических систем второго порядка с постоянными коэффициентами в пространствах функций класса C^1 на компактах в плоскости;

ii) изучение задачи Дирихле для рассматриваемых систем: получение новых результатов о регулярности/нерегулярности плоских односвязных областей и нахождение новых интегральных представлений типа Пуассона для систем сильно эллиптического типа;

iii) исследование отображений плоских областей решениями однородных эллиптических систем второго порядка с постоянными коэффициентами. Значительный интерес здесь представляет вопрос о звездообразности образа круга при однолистном нормированном гармоническом отображении, а также построение конкретных примеров отображений круга решениями указанных систем общего вида на области с углами.

Научная новизна работы. В диссертации получены следующие новые результаты:

1. Получен критерий C^1-слабой аппроксимации функций полиномиальными решениями общих однородных эллиптических систем второго порядка на компактах в плоскости.

2. Разработан новый метод решения задачи Дирихле для сильно эллиптических систем, основанный на представлении соответствующего дифференциального оператора в виде возмущения оператора Лапласа по двум малым параметрам. С помощью этого метода для однородных сильно эллиптических систем второго порядка получены новые формулы для интеграла типа Пуассона и функции Грина в круге.

3. Показано, что ограниченные односвязные области, границы которых содержат аналитические дуги, не регулярны относительно задачи Дирихле для однородных эллиптических систем второго порядка, не являющихся сильно эллиптическими: в каждой такой области существует неразрешимая задача Дирихле для любой не сильно эллиптической системы второго порядка.

4. Для класса нормированных однолистных гармонических отображений единичного круга на выпуклые области установлен критерий звездообразности образа меньшего концентрического круга и найдена новая (наилучшая на данный момент) нижняя оценка радиуса звездообразности для указанного класса отображений.

5. Исследованы отображения круга решениями сильно эллиптических систем, представленными в виде интеграла типа Пуассона от кусочно-непрерывной граничной функции, получены формулы, описывающие граничное поведение таких функций.

Используемые методы. В работе применяются классические и современные методы вещественного и комплексного анализа. В частности, задействована схема Витушкина, специальным образом модифицированная для изучения рассматриваемых аппроксимационных задач, а для исследования задачи Дирихле предложен метод возмущений по малым параметрам.

Достоверность полученых результатов. Все основные результаты диссертации обоснованы строгими математическими доказательствами.

Теоретическая и практическая значимость. Диссертация носит теоретический характер. Полученные результаты и развитые в диссертации методы найдут применение для решения задач теории приближений аналитическими функциями и теории краевых задач для эллиптических уравнений и систем. Указанные результаты и методы будут полезны в исследованиях по комплексному анализу и теории эллиптических уравнений, ведущихся в МГУ им. М. В. Ломоносова, в СПбГУ, в МИАН им. В. А. Стеклова, в ПОМИ РАН, в МГТУ им. Н. Э. Баумана, а также в других исследовательских центрах.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 4 статьи [1А]–[4А] в изданиях, рекомендованных ВАК. Работы [1А] и [4А] опубликованы в изданиях, индексируемых Web of Science и Scopus.

Вклад соискателя. Все основные результаты диссертации получены автором самостоятельно. Из результатов совместной работы [4А] в диссертацию включены только результаты, полученные лично автором.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на ряде научных семинаров: на Санкт-Петербургском семинаре по теории операторов и теории функций (ПОМИ РАН) под руководством академика РАН С. В. Кислякова, на семинаре по теории приближений аналитическими функциями (МГУ им. М. В. Ломоносова) под руководством проф. П. В. Парамонова и д.ф.-м.н. К. Ю. Федоровского, на семинаре «Анализ и дифференциальные уравнения» (МГТУ им. Н. Э. Баумана) под руководством д.ф.-м.н. К. Ю. Федоровского и доц. Г. В. Гришиной, на семинаре по дифференциальным уравнениям (Белгородский государственный университет) под руководством проф. А. П. Солдатова, на семинаре «Методы решения задач математической физики» (ФИЦ ИУ РАН) под руководством д.ф.-м.н. А. А. Абрамова, д.ф.-м.н. В. И. Власова и д.ф.-м.н. С. Я. Степанова, на семинаре по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям (РУДН) под руководством проф. А. Л. Скубачевского.

Кроме того, результаты диссертации были представлены на следующих конференциях: «Spaces of analytic functions and singular integrals» (Санкт-Петербург, Россия, 17-20 октября 2016) и «Физико-математические проблемы создания новой техники» (МГТУ им. Н. Э. Баумана, Россия, 17-19 ноября 2014).

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, разбитых на параграфы, заключения и списка использованной литературы. Объем диссертации составляет 74 страницы, включая 2 рисунка. Список литературы содержит 52 наименования.

Обзор содержания диссертации

Во **введении** дана постановка изучаемых задач, приведен исторический обзор исследований по теме диссертации и сформулированы основные результаты работы автора, выносимые на защиту.

Глава 1 посвящена задачам аппроксимации функций полиномиальными решениями эллиптических систем второго порядка с постоянными коэффициентами. Аппроксимации рассматриваются в пространствах непрерывных и гладких функций на компактах в плоскости. Основные результаты этой главы опубликованы в [4А].

Пусть A, B и C — вещественные постоянные (2×2)–матрицы. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\left(A\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

на функции u и v двух вещественных переменных. Напомним, что эта система является эллиптической, если выражение $\det(A\xi^2+2B\xi\eta+C\eta^2)$ с вещественными ξ и η обращается в нуль только при $\xi=\eta=0$.

Пусть τ и σ — вещественные параметры, причем $\tau\in[0,1)$, а $\sigma\neq\pm1$ и σ может принимать значение ∞. Определим дифференциальный оператор $\mathcal{L}$ следующим образом:

$$\mathcal{L}_{\tau,\sigma}f=\overline{\partial}\partial f+\tau\partial^2 f+\sigma\partial^2\overline{f}+\tau\sigma\overline{\partial f}$$

при $|\sigma|<1$ и

$$\mathcal{L}_{\tau,\sigma}f=\overline{\partial}^2 f+\tau\overline{\partial}\partial f+\sigma^{-1}\overline{\partial}\partial\overline{f}+\tau\sigma^{-1}\overline{\partial}^2\overline{f}$$

при $|\sigma|>1$ (в случае $\sigma=\infty$ полагаем $\sigma^{-1}=0$). Здесь f — комплекснозначная функция, а $\partial f=(f'_x-if'_y)/2$ и $\overline{\partial}f=(f'_x+if'_y)/2$ — операторы Коши–Римана. Любая эллиптическая система указанного выше вида может быть приведена к уравнению вида

$$\mathcal{L}_{\tau,\sigma}f=0.$$

Отметим несколько важных частных случаев. Значениям параметров $\tau=\sigma=0$ соответствует система уравнений Лапласа $\Delta f=0$, а паре значений $\tau=0$, $\sigma=\infty$ — система Бицадзе $\overline{\partial}^2 f=0$. При $\sigma=0$ и $\sigma=\infty$ получаем сильно и не сильно эллиптическую кососимметричную системы соответственно. Они связаны с уравнением $af''_{xx}+2bf''_{xy}+cf''_{yy}=0$ с постоянными комплексными коэффициентами a, b, c. Наконец, при $\tau=0$ имеем систему Ламе, играющую важную роль в теории упругости.

Для произвольного подмножества E комплексной плоскости обозначим через $C(E)$ пространство всех непрерывных на E комплекснозначных функций. Для $f\in C(E)$ положим $\|f\|_E=\sup_{z\in E}|f(z)|$.

Определим класс $\mathscr{O}_{\tau,\sigma}(E)$ состоящий из всех функций f, каждая их которых определена и удовлетворяет уравнению $\mathcal{L}_{\tau,\sigma}f=0$ на некотором (своем) открытом множестве, содержащем E. Кроме того, обозначим через $\mathscr{P}_{\tau,\sigma}$ пространство всех $\mathcal{L}_{\tau,\sigma}$-полиномов, то есть $\mathscr{P}_{\tau,\sigma} = \{p\colon p \in \mathbb{C}[x,y],\ \mathcal{L}_{\tau,\sigma}p \equiv 0\}$.

В дальнейшем, если нет необходимости указывать явно значения параметров τ и σ, мы будем использовать более короткие обозначения: $\mathcal{L}$ вместо $\mathcal{L}_{\tau,\sigma}$, $\mathscr{P}_{\mathcal{L}}$ вместо $\mathscr{P}_{\tau,\sigma}$, $\mathscr{O}_{\mathcal{L}}(E)$ вместо $\mathscr{O}_{\tau,\sigma}(E)$ и т.д. (включая пространства, зависящие от оператора $\mathcal{L}$, которые будут введены далее).

Основная задача, рассматриваемая в первой главе диссертации, формулируется следующим образом:

Задача 1. *Найти необходимые и достаточные условия на компакт $X \subset \mathbb{C}$, при которых всякая функция $f \in C^1(\mathbb{C}) \cap \mathscr{O}_{\mathcal{L}}(X^\circ)$ может быть приближена последовательностью $\{p_n\} \subset \mathscr{P}_{\mathcal{L}}$ в следующем смысле: $p_n \rightrightarrows_X f$ и $\nabla p_n \rightrightarrows_X \nabla f$ при $n \to \infty$, где символом $\rightrightarrows_X$ обозначена равномерная сходимость на X.*

Хорошо известно, что в задачах аппроксимации функций решениями уравнения $\mathcal{L}f = 0$ работает метод Рунге «движения особенностей». Аналогично классическим задачам об аппроксимации функций многочленами комплексного переменного или гармоническими многочленами, вместе с Задачей 1 рассматривается задача об аппроксимации функций функциями класса $\mathscr{O}_{\mathcal{L}}(X)$, т.е. решениями уравнения $\mathcal{L}f = 0$ в окрестностях X. Эту задачу естественно воспринимать как аналог задачи аппроксимации рациональными функциями комплексного переменного (вместо произвольных функций класса $\mathscr{O}_{\mathcal{L}}(X)$ достаточно рассматривать конечные линейные комбинации фундаментальных решений уравнения $\mathcal{L}f = 0$ в точках, не принадлежащих X).

Рассматриваемые задачи удобно сформулировать в терминах подходящих пространств функций. Пусть $C^1_w(X)$ — это замыкание в $C(X)^3$ подпространства $\{(f, \nabla f)|_X \colon f \in C^1(\mathbb{C})\}$. Другими словами, элемент $g = (g_0, g_1, g_2)$ принадлежит $C^1_w(X)$ тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ найдется функция $f \in C^1(\mathbb{C})$ такая, что $\|g_0 - f\|_X < \varepsilon$ и $\|(g_1, g_2) - \nabla f\|_X < \varepsilon$. Норма элемента g в $C^1_w(X)$ по определению совпадает с нормой в $C(X)^3$ и равна $\max\limits_{s=0,1,2} \|g_s\|_X$. Заметим, что сходимость в пространстве $C^1_w(X)$ слабее сходимости в стандартном пространстве Уитни $C^1(X)$, однако для компактов с условием $\overline{X^\circ} = X$ из C^1_w-сходимости вытекает сходимость в пространстве $C^1(X)$. Определим теперь следующие пространства:

$A^{1,w}_{\mathcal{L}}(X)$ — замыкание $\{(f, \nabla f)|_X \colon f \in C^1(\mathbb{C}) \cap \mathscr{O}_{\mathcal{L}}(X^\circ)\}$ в $C(X)^3$,
$P^{1,w}_{\mathcal{L}}(X)$ — замыкание $\{(p, \nabla p)|_X \colon p \in \mathscr{P}_{\mathcal{L}}\}$ в $C(X)^3$,
$R^{1,w}_{\mathcal{L}}(X)$ — замыкание $\{(g, \nabla g)|_X \colon g \in \mathscr{O}_{\mathcal{L}}(X)\}$ в $C(X)^3$.

Из эллиптичности $\mathcal{L}$ вытекает, что

$$P^{1,w}_{\mathcal{L}}(X) \subset R^{1,w}_{\mathcal{L}}(X) \subset A^{1,w}_{\mathcal{L}}(X).$$

Таким образом, нас интересуют задачи описания компактов X, для которых выполняются равенства $A^{1,w}_{\mathcal{L}}(X) = P^{1,w}_{\mathcal{L}}(X)$ и $A^{1,w}_{\mathcal{L}}(X) = R^{1,w}_{\mathcal{L}}(X)$ соответственно.

Приведем ряд известных результатов, относящихся к рассматриваемой проблематике. Сразу отметим, что тематика аппроксимации функций решениями эллиптических уравнений и систем началась с задач *равномерной* аппроксимации. Не формулируя эти задачи явно, отметим некоторые наиболее известные результаты. Во-первых, это классическая теорема С. Н. Мергеляна [5] о равномерной приближаемости функций многочленами комплексного переменного (1953 г.): *Для того, чтобы всякая функция, непрерывная на данном компакте $X \subset \mathbb{C}$ и голоморфная на X°, могла быть приближена равномерно на X последовательностью многочленов комплексного переменного, необходимо и достаточно, чтобы множество $\mathbb{C} \setminus X$ было связным.*

Другой классический результат о равномерной аппроксимации — это теорема Уолша–Лебега [16] (1929 г.): *Для того, чтобы всякая функция, непрерывная на данном компакте $X \subset \mathbb{C}$ и гармоническая на X°, могла быть приближена равномерно на X последовательностью гармонических многочленов, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие* $\partial X = \partial \widehat{X}$. Напомним, что $\widehat{X}$ — это объединение X и всех ограниченных связных компонент его дополнения $\mathbb{C} \setminus X$. Компакты X, удовлетворяющие такому условию, называются *компактами Каратеодори.* Этот класс компактов часто и естественно возникает во многих задачах теории приближений.

Отметим недавний результат М. Я. Мазалова [3] (2008 г.): *Пусть X — произвольный компакт в $\mathbb{C}$, а $\mathcal{L}$ — эллиптический оператор любого порядка с постоянными комплексными коэффициентами и локально ограниченным (в начале координат) фундаментальным решением. Тогда всякая функция класса $C(X) \cap \mathscr{O}_{\mathcal{L}}(X^\circ)$ может быть приближена равномерно на X последовательностью функций класса $\mathscr{O}_{\mathcal{L}}(X)$.*

Изучение задачи об аппроксимации функций решениями эллиптических уравнений и систем в нормах пространств $C^m(X)$, $m > 0$, началось в 1980-е годы в работах А. Г. О'Фаррелла [13], Д. Вердеры [15], Н. Н. Тарханова [10], П. В. Парамонова [6], [7] и ряда других авторов. П. В. Парамонов [8] (1993 г.) получил критерий C^1-приближаемости функций гармоническими полиномами: *равенство $A^{1,w}_{\Delta}(X) = P^{1,w}_{\Delta}(X)$ выполняется в том и только том случае, когда множество $\mathbb{C} \setminus X$ связно.* На самом деле, этот результат справедлив и для соответствующей задачи об аппроксимации в норме пространства Уитни $C^1(X)$. В 1999 г. П. В. Парамоновым и К. Ю. Федоровским [9] аналогичный результат был доказан для произвольных уравнений второго порядка с постоянным комплексными коэффициентами (т.е., для кососимметричных эллиптических систем рассматриваемого здесь вида).

Сформулируем и обсудим основные результаты первой главы. Для этого нам потребуются специальные метрические характеристики множеств в комплексной плоскости. Обозначим символом $D(a,r)$ круг с центром в точке $a \in \mathbb{C}$ и радиусом $r > 0$. Для точки $z \in \mathbb{C}$ и числа $r > 0$ определим величину $d(z,r,X)$ как верхнюю грань диаметров всех связных компонент множества $D(z,r) \setminus X$ и введем величину $\theta(X) := \inf\big\{r^{-1}d(z,r,X) \colon z \in \partial X,\ r > 0\big\}$.

Теорема 1 (теорема 1.7 диссертации)**.** *Пусть X — компакт в $\mathbb{C}$.*

1. Если $\theta(X) > 0$, то $A^{1,w}_{\mathcal{L}}(X) = R^{1,w}_{\mathcal{L}}(X)$.

2. Для выполнения равенства $A^{1,w}_{\mathcal{L}}(X) = P^{1,w}_{\mathcal{L}}(X)$ необходимо и достаточно, чтобы множество $\mathbb{C} \setminus X$ было связно.

Следствие 2 (следствие 1.8 диссертации)**.** *Предположим, что для компакта $X \subset \mathbb{C}$ выполняется хотя бы одно из следующих условий:* a) *нижняя грань диаметров всех связных компонент множества $\mathbb{C} \setminus X$ положительна;* b) *каждая граничная точка компакта X является граничной точкой для некоторой связной компоненты множества $\mathbb{C} \setminus X$;* c) *$\partial X = \partial \widehat{X}$. Тогда $A^{1,w}_{\mathcal{L}}(X) = R^{1,w}_{\mathcal{L}}(X)$.*

В **главе 2** рассматривается классическая задача Дирихле для однородных эллиптических систем второго порядка с постоянными коэффициентами. Эта задача, как уже говорилось выше, естественно связана с тематикой равномерной приближаемости функций полиномиальными решениями соответствующих систем. Результаты главы опубликованы в [1А], [3А] и [4А].

Классическая задача Дирихле для рассматриваемых систем формулируется следующим образом. Пусть на границе $\mathit{\Gamma}$ некоторой ограниченной области $\mathit{\Omega}$ задана непрерывная функция. Требуется продолжить ее до функции f, определенной в замыкании этой области и удовлетворяющей в ней уравнению $\mathcal{L}_{\tau,\sigma} f = 0$.

Основной интересующий нас вопрос — это вопрос об описании областей, в которых решение классической задачи Дирихле существует для любой граничной функции $h \in C(\mathit{\Gamma})$. Такие области мы будем называть регулярными относительно соответствующей задачи Дирихле. Этот вопрос в общем случае остается нерешенным. Важно отметить, что в данном контексте существенно различаются случаи сильно эллиптических систем и систем, не являющихся сильно эллиптическими.

Модельным примером сильно эллиптической системы можно считать систему уравнений Лапласа $\Delta f = 0$, которой удовлетворяют гармонические функции. А. Лебег [12] (1907 г.) доказал, что любая ограниченная односвязная область является регулярной относительно задачи Дирихле для оператора Δ.

Известна гипотеза о том, что результат, аналогичный теореме Лебега, остается верным для любой кососимметричной сильно эллиптической системы. Для общего сильно эллиптического оператора $\mathcal{L}_{\tau,\sigma}$ подобная гипотеза, хотя и не была в явном виде сформулирована в литературе, тем нее менее, выглядит весьма правдоподобной. В частности, Г. Веркота и А. Фогель [14] (1997 г.) показали, что любая ограниченная односвязная область с кусочно-гладкой границей регулярна относительно задачи Дирихле для любого сильно эллиптического оператора $\mathcal{L}_{\tau,\sigma}$. При этом вопрос о регулярности даже жордановых областей общего вида остается открытым. Что касается собственно задачи Дирихле, ряд условий на область G и функцию $h \in C(\partial G)$, при которых соответствующая задача Дирихле разрешима, получен, в частности, А. П. Солдатовым.

В случае не сильно эллиптических систем ситуация обстоит совсем иначе. Достаточно рассмотреть уравнение Бицадзе $\overline{\partial}^2 f = 0$, которое является характерным представителем данного класса. Для бианалитических функций, являющихся решениями этого уравнения, отсутствует принцип максимума и нет единственности решения даже в круге. Отсутствует общая разрешимость классической задачи Дирихле даже в областях с достаточно гладкими границами (отметим работы А. Б. Зайцева [1] 2006 г. и М. Я. Мазалова [4] 2009 г.).

Приведем основные результаты, полученные во второй главе диссертации.

Теорема 3 (теорема 2.1 диссертации). *Пусть Ω — ограниченная односвязная область с границей Γ, содержащей открытую аналитическую дугу γ, ни одна из точек которой не является предельной для множества $\Gamma \setminus \gamma$. Тогда задача Дирихле для уравнения $\mathcal{L}_{\tau,\sigma} f(z) = 0$ при $|\sigma| > 1$ (т.е. в не сильно эллиптическом случае) с граничной функцией $(z-a)^{-1}$, где точка $a \in \Omega$ расположена достаточно близко к дуге γ, неразрешима в области Ω.*

Таким образом, никакая ограниченная односвязная область с границей, содержащей аналитическую дугу, не является регулярной относительно задачи Дирихле ни для какой не сильно эллиптической системы второго порядка.

Следующие результаты второй главы относятся к сильно эллиптическим системам. Исходя из записи систем в виде уравнения $\mathcal{L}_{\tau,\sigma} f = 0$, предложен метод поиска решения задачи Дирихле в виде ряда по параметрам τ

и σ. Эти параметры в случае сильной эллиптичности задают малое отклонение от оператора Лапласа, соответствующего значениям $\tau = \sigma = 0$. На основе такого метода получены интегральные представления типа Пуассона для круга и эллипса специального вида и выписана соответствующая функция Грина. В случаях, когда хотя бы один из параметров τ или σ обращается в нуль, получающиеся ряды удается суммировать и ответ получается в намного более явном виде.

Теорема 4 (следствие 2.6 диссертации)**.** *Пусть $z_\tau := z - \tau\overline{z}$. Решение задачи Дирихле для уравнения $\mathcal{L}_{\tau,0}f = 0$ в единичном круге $\mathbb{D}$ с граничной функцией $h \in C(\mathbb{T})$ представляется интегралом*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{(1-|z|^2)(\zeta + \tau\overline{\zeta})}{(\zeta_\tau - z_\tau)(\overline{\zeta} - \overline{z})(\zeta + \tau\overline{z})} h(\zeta)|d\zeta|.$$

Теорема 5 (следствие 2.7 диссертации)**.** *Решение задачи Дирихле для уравнения $\mathcal{L}_{0,\sigma}f(z) = 0$ в единичном круге $\mathbb{D}$ с заданной граничной функцией $h \in C(\mathbb{T})$ записывается в следующем виде:*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} (1-|z|^2)\left(\frac{1}{|\zeta - z|^2}h(\zeta) + \sigma\frac{2-\overline{\zeta}z}{(\zeta - z)^2}\overline{h(\zeta)}\right)|d\zeta|.$$

В **главе 3** изучаются отображения единичного круга решениями эллиптических систем $\mathcal{L}_{\tau,\sigma}f = 0$ (или, короче, $\mathcal{L}_{\tau,\sigma}$-отображения). Рассмотрены отображения трех классов: гармонические отображениями (этот случай соответствует значениям параметров $\tau = \sigma = 0$), а также $\mathcal{L}_{\tau,0}$- и $\mathcal{L}_{0,\sigma}$-отображения. Для гармонического случая исследуется вопрос о звездообразности образа круга при однолистном нормированном отображении и вопрос о радиусе звездообразности для одного класса отображений. Для $\mathcal{L}_{\tau,0}$- и $\mathcal{L}_{0,\sigma}$-отображений исследуется граничное поведение и строятся примеры отображений на области с углами. Основные результаты главы 3 опубликованы в [2А].

Односвязная область $U \subset \mathbb{C}$ называется звездообразной относительно точки $a \in U$, если для любой точки $z \in U$ отрезок $[a, z]$, соединяющий ее с точкой a, содержится в U. В дальнейшем мы будем иметь дело только с областями, звездообразными относительно начала координат, и будем называть их просто звездообразными. Граница жордановой звездообразной области называется звездообразной кривой. Радиусом звездообразности для данного класса однолистных функций, определенных в окрестности начала координат, называется такое максимальное число $R > 0$ (если оно существует), что любой круг D_r радиуса $0 < r \leq R$ с центром в начале координат отображается всеми функциями данного класса на звездообразную область.

Вопрос о радиусе звездообразности тесно связан с вопросом о радиусе выпуклости, который определяется аналогично. Так как любая выпуклая область является звездообразной, то значение радиуса выпуклости является нижней оценкой (возможно, неточной) радиуса звездообразности для одного и то же класса отображений.

Для класса $\mathcal{S}$ конформных отображений единичного круга, удовлетворяющих естественным условиям нормировки $f(0) = 0$ и $f'(0) = 1$, точные значения радиусов выпуклости и звездообразности были получены еще в первой половине XX (работы Р. Неванлинны и Г. М. Грунского).

Клуни и Шейл-Смолл [11] (1984 г.) доказали критерий выпуклости образа круга при гармоническом отображении. Этот критерий выражается в терминах выпуклости по одному направлению. Напомним, что область U называется выпуклой в горизонтальном направлении, если ее пересечение с любой горизонтальной прямой либо связно, либо пусто. Иными словами, любая прямая, параллельная вещественной оси, либо пересекает область по целому интервалу (возможно, неограниченному), либо вовсе не пересекает. Аналогичным образом определяется выпуклость в любом другом направлении. Соответствующий критерий выпуклости звучит следующим образом: *пусть гармоническая функция $f = h + \overline{g}$ локально однолистна в круге $D_R = \{|z| < R\}$, $R > 0$. Тогда она однолистно отображает этот круг на выпуклую область в том и только в том случае, когда при любом $\beta \in [0, 2\pi)$ функция $\varphi_\beta(z) := h(z) + e^{i\beta} g(z)$ конформно отображает D_R на область, выпуклую в горизонтальном направлении.*

В диссертации рассмотрен случай гармонических отображений круга на звездообразные области. Результат типа теоремы Клуни–Шейл-Смолла удалось получить для класса $\mathcal{C}_H$, который состоит из всех однолистных гармонических отображений f единичного круга на выпуклые области, для которых $f(0) = 0$ и $f'_z(0) = 1$. Формулировка соответствующего утверждения использует понятие звездообразности по одному направлению. Пусть γ — простая замкнутая аналитическая кривая и $0 \notin \gamma$. Скажем, что γ звездообразна в направлении β, если луч, выходящий из начала координат под углом β относительно положительного направления вещественной оси, пересекает γ не внешним образом не более чем в одной точке. Под пересечением кривой γ с прямой не внешним образом мы подразумеваем такое пересечение, при котором любая окрестность точки пересечения содержит точки γ, лежащие как в одной, так и в другой полуплоскости относительно данной прямой. Жорданову область U, ограниченную такой кривой, назовем звездообразной в направлении β. Звездообразность в направлениях $\pm\dfrac{\pi}{2}$ естественно назвать звездообразностью в вертикальном направлении.

Теорема 6 (теорема 3.1 диссертации). *Функция $f = h + \overline{g} \in \mathcal{C}_H$ отображает круг D_r радиуса $r \in (0, 1)$ на звездообразную область в том и только* *в том случае, когда при любом $\beta \in [0, 2\pi)$ функция $\varphi_\beta(z) = h(z) + e^{i\beta} g(z)$ отображает окружность T_r на кривую, звездообразную в вертикальном направлении.*

Из этого утверждения следует, что для класса $\mathcal{C}_H$ справедлива оценка

$$R_s(\mathcal{C}_H) \geq R_s(\mathcal{S}) = \operatorname{th} \frac{\pi}{4} \approx 0.65$$

радиуса звездообразности. Она является наилучшей из известных на данный момент.

В главе 3 исследуются также отображения круга решениями уравнений вида $\mathcal{L}_{\tau,0} f = 0$ и $\mathcal{L}_{0,\sigma} f = 0$ и граничное поведение таких решений. Рассматриваются решения, задаваемые в виде соответствующих интегралов типа Пуассона (полученных во второй главе). Отметим, что отображения решениями эллиптических уравнений и систем, отличных от уравнения Лапласа, являются пока мало изученными. Можно отметить лишь недавние исследования А. Б. Зайцева [2], который рассматривал вопрос об однолистности $\mathcal{L}_{\tau,0}$-отображений единичного круга и установил ряд достаточных условий. В диссертации установлены следующие обобщения классической теоремы о взвешенном среднем для интеграла Пуассона для гармонических функций.

Теорема 7 (теорема 3.4 диссертации)**.** *Пусть функция f задана интегралом Пуассона для оператора $\mathcal{L}_{\tau,0}$,*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(1 - |z|^2)(e^{it} + \tau e^{-it})}{(e^{it} - z)_\tau (e^{-it} - \overline{z})(e^{it} + \tau \overline{z})} \varphi(t) dt,$$

где функция $\varphi(t)$ кусочно-непрерывная с конечным числом точек разрыва. Пусть $\Lambda_{\theta,\alpha}$ — это прямая, проходящая через точку $e^{i\theta}$ и составляющая угол α с касательной в этой точке к окружности $\mathbb{T}$. Тогда для любого $\alpha \in (0, \pi)$ выполнено

$$\lim_{z \to e^{i\theta}, z \in \Lambda_{\theta,\alpha}} f(z) = p(\theta, \alpha) \varphi_+(\theta) + (1 - p(\theta, \alpha)) \varphi_-(\theta),$$

где $\varphi_\pm(\theta) = \lim_{t \to \theta \pm 0} \varphi(t)$, а $p(\theta, \alpha) = \dfrac{\alpha}{\pi} + \dfrac{1}{2\pi i} \log \dfrac{1 + \tau e^{-2i\theta}}{1 + \tau e^{2i(\alpha - \theta)}}$.

Теорема 8 (теорема 3.5 диссертации)**.** *Пусть $\sigma \in [0, 1)$, а функция f задана интегралом Пуассона для $\mathcal{L}_{0,\sigma}$,*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} (1 - |z|^2) \left(\frac{1}{|e^{it} - z|^2} \mathcal{I} + \sigma \frac{2 - e^{-it} z}{(e^{it} - z)^2} \mathcal{C} \right) \varphi(t) dt,$$

где функция $\varphi(t)$ кусочно-непрерывная с конечным числом точек разрыва. Тогда

$$\lim_{z\to e^{i\theta}, z\in\Lambda_{\theta,\alpha}} f(z) = Q(\theta,\alpha)\varphi_+(\theta) + (\mathcal{I} - Q(\theta,\alpha))\varphi_-(\theta),$$

где $Q(\theta,\alpha) = \dfrac{\alpha}{\pi}\mathcal{I} + \dfrac{\sigma}{2\pi i}\left(e^{-2i\theta} - e^{2i(\alpha-\theta)}\right)\mathcal{C}$*, а* $\mathcal{I}$ *и* $\mathcal{C}$ *— тождественный оператор и оператор комплексного сопряжения.*

Кроме того, в третьей главе построены отображения единичного круга соответствующими интегралами типа Пуассона от кусочно-постоянных граничных функций. В частном случае, когда отображающая функция гармоническая, образом круга при таких отображениях является правильный n–угольник. При отличных от нуля значениях параметров τ или σ наблюдается постепенная деформация многоугольников. Характер границы при этом определяется теоремами 7 и 8.

Литература

[1] *Зайцев А. Б.* О равномерной аппроксимации полиномиальными решениями эллиптических уравнений второго порядка и о соответствующей задаче Дирихле // Комплексный анализ и приложения. Сборник статей. Тр. МИАН. 2006. Т. 253. С. 67–80.

[2] *Зайцев А.Б.* О взаимной однозначности решений эллиптических уравнений второго порядка в единичном круге на плоскости // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2015. Т. 434. С. 91–100.

[3] *Мазалов М.Я.* Критерий равномерной приближаемости на произвольных компактах для решений эллиптических уравнений // Матем. сб. 2008. Т. 199. №1. С. 15–46.

[4] *Мазалов М.Я.* О задаче Дирихле для полианалитических функций // Матем. сб. 2009. Т. 200. №10. С. 59–80.

[5] *Мергелян С.Н.* Равномерные приближения функций комплексного переменного // УМН. 1952. Т. 7. №2. С. 31–122.

[6] *Парамонов П.В.* О гармонических аппроксимациях в C^1-норме // Матем. сб. 1990. Т. 181. №10. С. 1341–1365.

[7] *Парамонов П.В.* C^m-приближения гармоническими полиномами на компактных множествах в $\mathbb{R}^n$ // Матем. сб. 1993. Т. 184. №2. С. 105–128.

[8] *Парамонов П.В.* О приближениях гармоническими полиномами в C^1-норме на компактах в $\mathbf{R}^2$ // Изв. РАН. Сер. матем. 1993. Т. 57. №2. С. 113–124.

[9] *Парамонов П.В., Федоровский К.Ю.* О равномерной и C^1-приближаемости функций на компактах в $\mathbb{R}^2$ решениями эллиптических уравнений второго порядка // Матем. сб. 1999. Т. 190. №2. С. 123–144.

[10] *Тарханов Н.Н.* Равномерная аппроксимация решениями эллиптических систем // Матем. сб. 1987. Т. 133. №3. С. 356–381.

[11] *Clunie J.G., Sheil-Small T.* Harmonic univalent functions // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I. 1984. №9. P. 3–25.

[12] *Lebesgue H.* Sur le probleme de Dirichlet // Rend. circ. mat. Palern. 1907. V. 24. P. 371–402.

[13] *O'Farrel A.G.* Rational approximation and weak analyticity. II // Math. Ann. 1988. V. 281. №1. P. 169–176.

[14] *Verchota G.C., Vogel A.L.* Nonsymmetric systems on nonsmooth planar domains // Trans. Amer. Math. Soc. 1997. V. 349. №11. P. 4501–4535.

[15] *Verdera J.* C^m-approximation by solutions of elliptic equations and Calderón–Zygmund operators // Duke Math. J. 1987. V. 55. №1. P. 157–187.

[16] *Walsh J.L.* The approximation of harmonic functions by polynomials and by harmonic rational funtions // Bull. Amer. Math. Soc. 1929. V. 35. P. 499–544.

Работы автора по теме диссертации

[1А] *Багапш А.О.* Интеграл Пуассона и функция Грина для одной сильно эллиптической системы уравнений в круге и эллипсе // Журнал вычислит. мат. и матем. физики. 2016. Т. 56. №12. С. 2065–2072.

[2А] *Багапш А.О.* О радиусе звездообразности гармонических отображений // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2017. Т. 456. С. 16–24.

[3А] *Багапш А.О.* Функция Грина и интеграл Пуассона в круге для сильно эллиптических систем с постоянными коэффициентами // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естеств. науки. 2017. №6. С. 4–18.

[4А] *Багапш А.О., Федоровский К.Ю.* C^1-аппроксимация функций решениями эллиптических систем второго порядка на компактах в $\mathbb{R}^2$ // Тр. МИАН. 2017. Т. 298. С. 42–57.