Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
“Московский физико-технический институт (государственный университет)”

На правах рукописи

УДК 519.176

Бобу Андрей Викторович

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ О ГИПЕРГРАФАХ С ЗАПРЕЩЕННЫМИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯМИ РЕБЕР

01.01.09 — дискретная математика и математическая кибернетика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва, 2019

Работа прошла апробацию на кафедре дискретной математики Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Московский физико-технический институт (государственный университет)».

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор
Райгородский Андрей Михайлович

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Тамбовский государственный университет имени Г. Р. Державина».

Защита состоится «29» апреля 2019 г. в 14:00 на заседании диссертационного совета ФПМИ.01.01.09.002 по адресу 141701, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский переулок, д. 9.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте Московского физико-технического института (государственного университета):

`https://mipt.ru/education/post-graduate/soiskateli-fiziko-matematicheskie-nauki.php`

Работа представлена «4» февраля 2019 г. в Аттестационную комиссию федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Московский физико-технический институт (государственный университет)» для рассмотрения советом по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, доктора наук в соответствии с п. 3.1 ст. 4 Федерального закона «О науке и государственной научно-технической политике».

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Диссертация посвящена решению ряда экстремальных задач, лежащих на стыке теории графов, комбинаторной геометрии и теории кодирования.

Во второй половине прошлого века начала активно развиваться область комбинаторики, связанная с изучением экстремальных свойств совокупностей конечных множеств с определенными запретами на пересечения. Развитие в этой области математики было связано в первую очередь с переоткрытием пионерского результата Эрдеша, Ко и Радо [1]. Еще в 1938 году авторы этой работы установили следующий факт. Обозначим $f(n,k,t)$ максимально возможную мощность семейства k-элементных подмножеств множества $\mathcal{R}_n = \{1,\ldots,n\}$, попарно пересекающихся не менее, чем по t элементам. Тогда при $n \geqslant n_0(k,t)$

$$f(n,k,t) = C_{n-t}^{k-t}.$$

При этом оценка снизу в данном равенстве практически очевидна, ее дает пример тривиальной конструкции множеств, которые содержат некоторые фиксированные t элементов, оставался лишь вопрос о том, что происходит при $n < n_0(k,t)$. В 1977 году Франкл показал, что $n_0(k,t) = (k-t+1)(t+1)$ при $t \geqslant 15$ [2], а в 1984 году Уилсон доказал, что формула для $n_0(k,t)$ справедлива и при $t < 15$[3]. Однако оставалось невыясненным, что же происходит при $n < n_0(k,t)$. В 1996 работа Алсведе и Хачатряна [4] дала окончательный ответ на поставленный вопрос и было найдено точное значение величины $f(n,k,t)$ при всех значениях параметров n, k и t. При этом оптимальная в общем случае конструкция сама по себе довольно проста (хоть и не совпадает с тривиальной конструкцией Эрдеша–Ко–Радо), а вот доказательство ее оптимальности весьма нетривиально. Одновременно с этим активно изучались смежные вопросы[5].

Данную задачу можно сформулировать на языке теории гиперграфов. Напомним, что *гиперграфом* называется пара $H = (V,E)$, где V — некоторое конечное множество, а E — совокупность подмножеств множества V. Множество V обычно

[1] *Erdős P., Ko Ch., Rado R.* Intersection theorems for systems op finite sets // Quart. J. Math. Oxford Ser. (2). — 1961. — V. 12. — P. 313–320

[2] *Frankl P.* The Erdős–Ko–Rado theorem is true for $n = ckt$ // Combinatorics (Proc. Fifth Hungarian Colloq., Keszthely, 1976). — 1978. — V. 1. — P. 365–375.

[3] *Wilson R. M.* The exact bound in the Erdős–Ko–Rado theorem // Combinatorica. — 1984. — V. 4, N. 2–3. — P. 247–257.

[4] *Ahlswede R., Khachatrian L. H.* The complete nontrivial-intersection theorem for systems of finite sets // J. Combin. Theory A. — 1996. — V. 76. — P. 121–138.

[5] *Deza M., Erdős P., Frankl P.* Intersection properties of systems of finite sets // Proceedings of the London Mathematical Society. — 1978. — V. 3, N. 2. — P. 369–384.

называют *множеством вершин*, а совокупность E — *множеством ребер* гиперграфа. Гиперграф называется *k-однородным*, если в каждом ребре содержится ровно k вершин. В таком случае $f(n,k,t)$ есть максимальное число ребер в k-однородном гиперграфе на n вершинах, у которого любые два ребра пересекаются не менее, чем по t элементам, $0 \leqslant t < k < n$:

$$f(n,k,t) = \max\{m\colon \exists H = (V,E),\ |V| = n,\ |E| = m,\ \forall\, A \in E\ \ |A| = k,\\ \forall\, A, B \in E\ \ |A \cap B| \geqslant t\}.$$

Прямо противоположная ситуация — ограничение на максимальную мощность пересечения ребер — приводит нас к теории кодирования. Задача состоит в отыскании величины $h(n,k,t)$ — максимального числа ребер в k-однородном гиперграфе на n вершинах, у которого любые два ребра пересекаются не более, чем по t элементам, $0 \leqslant t < k < n$:

$$h(n,k,t) = \max\{m\colon \exists H = (V,E),\ |V| = n,\ |E| = m,\ \forall\, A \in E\ \ |A| = k,\\ \forall\, A, B \in E\ \ |A \cap B| \leqslant t\}.$$

Чтобы яснее показать связь с теорией кодирования, сформулируем задачу иным способом. Если проинтерпретировать ребра k-однородного гиперграфа как слова двоичного равновесного кода веса k, то ограничение сверху на мощность пересечения ребер величиной t означает, что попарные хэмминговы расстояния между кодовыми словами не меньше $2(k-t)$. Тем самым мы приходим к широко известной задаче о кодах, исправляющих ошибки, и работа над этой проблемой все еще далека от завершения. Довольно простая нижняя оценка величины $h(n,k,t)$ была получена еще в 1950-е годы Р. Варшамовым и Е. Гилбертом [6][7]). Что же касается верхних оценок, то здесь имеется целый ряд блестящих результатов, среди которых можно отметить границы Хэмминга[8], Элайеса–Бассалыго[9], оценки Левенштейна [10] и границу линейного программирования[11].

[6] *Варшамов Р. Р.*, Оценка числа сигналов в кодах с коррекцией ошибок // Доклады АН СССР. — Т. 117, № 5. — 1957. — С. 739–741.

[7] *Gilbert E. N.*, A comparison of signalling alphabets // Bell System Technical Journal. — V. 31, N. 3. — 1952. — P. 504–522.

[8] *Hamming R. W.*, Error detecting and error correcting codes // Bell System technical journal. — V. 29, N. 2. — 1950. — P. 147–160.

[9] *Бассалыго Л. А.*, Новые верхние границы для кодов, исправляющих ошибки // Проблемы передачи информации. — Т. 1, № 4. — 1965. — С. 41–44.

[10] *Левенштейн В. И.*, О верхних оценках для кодов с фиксированным весом векторов // Проблемы передачи информации. — Т. 7, № 4. — 1971. — С. 3–12.

[11] *McEliece R. J., Rodemich E. R., Rumsey H. Jr., Welch L. R.*, New upper bounds on the rate of a code via the Delsarte–MacWilliams inequalities // IEEE Transactions on Information Theory. — V. 23, N. 2. — 1977. — P. 157–166.

Следующий вопрос также является исключительно важным для экстремальной комбинаторики: что будет, если запретить всего лишь одно пересечение ребер? Иными словами, чему равно максимальное число $m(n,k,t)$ ребер в k-однородном гиперграфе на n вершинах, у которого любые два ребра не могут пересекаться по t элементам, $0 \leqslant t < k < n$:

$$m(n,k,t) = \max\{m\colon \exists H = (V,E),\ |V| = n,\ |E| = m,\ \forall\, A \in E\ \ |A| = k,\\ \forall\, A, B \in E\ \ |A \cap B| \neq t\}?$$

Первые статьи по этой проблеме появились в 1970-х годах и касались отдельных малых значений параметров k и t[12][13]. Относительно общего случая Эрдеш предположил, что при $k \geqslant 4$, начиная с некоторого $n_0 = n_0(k,t)$,

$$m(n,k,t) \leqslant \max\left\{C_{n-t-1}^{k-t-1}, \frac{C_n^t}{C_k^t}\right\}.$$

В 1981 году Франкл и Уилсон показали, что при определенных ограничениях на разность $(k-t)$ гипотеза Эрдеша верна[14]. Для доказательства авторы использовали ставший впоследствии классическим линейно-алгебраический метод. В дальнейшем активно исследовались различные ситуации относительно параметров k и t при $n \to \infty$.

Конечно, у этой задачи появились и обобщения, довольно популярным является вопрос о целом множестве запрещенных пересечений[15][16]. Среди большого разнообразия случаев мы выделим задачу оценивания величины $p(n,k,t_1,t_2)$ — максимального числа ребер в k-однородном гиперграфе на n вершинах, все ребра которого пересекаются не менее, чем по t_1 элементам, и не более, чем по t_2 элементам, $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant k < n$:

$$p(n,k,t_1,t_2) = \max\{m\colon \exists H = (V,E),\ |V| = n,\ |E| = m,\ \forall\, A \in E\\ |A| = k,\ \forall\, A, B \in E\ \ t_1 \leqslant |A \cap B| \leqslant t_2\}.$$

Иными словами, мы разрешаем ребрам гиперграфа пересекаться по любому числу вершин из отрезка $[t_1, t_2]$.

[12] *Nagy Z.* A certain constructive estimate of the Ramsey number // Matematikai Lapok. — V. 23, N. 301–302. — 1972. — P. 26.

[13] *Larman D. G., Rogers C. A.* The realization of distances within sets in Euclidean space // Mathematika. — 1972. — V. 19. — P. 1–24.

[14] *Frankl P., Wilson R.* Intersection theorems with geometric consequences // Combinatorica. — 1981. — V. 1. — P. 357–368.

[15] *Frankl P.* Families of finite sets with prescribed cardinalities for pairwise intersections // Acta Mathematica Hungarica. — 1980 — V. 35, N. 3. — P. 351–360.

[16] *Mubayi D., Rödl V.* Specified intersections // Transactions of the American Mathematical Society. — V. 366, N. 1. — 2014. — P. 491–504.

Исследование величин $m(n,k,t)$ и $p(n,k,t_1,t_2)$ было в значительной степени мотивировано задачами комбинаторной геометрии. Величина $m(n,k,t)$ оказалась напрямую связана с задачей Нельсона–Эрдеша–Хадвигера о хроматическом числе пространства, ставшей широко известной в 50-е годы XX столетия[17]. Она заключается в отыскании величины $\chi(\mathbb{R}^n)$, называемой *хроматическим числом пространства* и равной минимальному числу цветов, в которые можно так покрасить все точки $\mathbb{R}^n$, чтобы никакие две точки одного цвета не находились на расстоянии 1. Эта проблема до сих пор является открытой даже для случая евклидовой плоскости: известно лишь, что $5 \leqslant \chi(\mathbb{R}^2) \leqslant 7$. [18][19]

При больших n зазор становится только больше. Пожалуй, первым результатом в общем случае была теорема Райского, доказанная в 1970 году[20]. Эта теорема дала линейную по n нижнюю оценку величины $\chi(\mathbb{R}^n)$. Большое продвижение в случае растущего n связано в первую очередь с упоминавшейся выше работой Лармана и Роджерса 1972 года. В данной работе была впервые получена квадратичная по n нижняя оценка хроматического числа $\chi(\mathbb{R}^n)$. Кроме того, в работе указана наилучшая известная на настоящий момент верхняя оценка исследуемой величины при $n \to \infty$:

$$\chi(\mathbb{R}^n) \leqslant (3 + o(1))^n, \quad n \to \infty.$$

Однако довольно длительное время вообще не было известно, растет ли $\chi(\mathbb{R}^n)$ экспоненциально. Ответ на этот вопрос дала та самая работа Франкла и Уилсон 1981 года, в которой авторы при помощи оценок величин $m(n,k,t)$ показали, что

$$\chi(\mathbb{R}^n) \geqslant (1.207\ldots + o(1))^n, \quad n \to \infty.$$

Наилучшая нижняя оценка при $n \to \infty$ была получена не так давно и выглядит следующим образом[21]:

$$\chi(\mathbb{R}^n) \geqslant (1.239\ldots + o(1))^n, n \to \infty.$$

Разумеется, задача обросла большим количеством обобщений и переформулировок. Нас будет в первую очередь интересовать запрет одноцветных треугольников. А именно, для $0 < a < 1 < b < \sqrt{2}$ определим величину $\chi_{a,b}(\mathbb{R}^n)$ как

[17] *Hadwiger H.* Ein Überdeckungssatz für den Euklidischen Raum // Portugaliae Math. — 1944. — V. 4. — P. 140–144.
[18] *Moser L., Moser W.* Solution to problem 10 // Canad. Math. Bull. — 1961. — V. 4. — P. 187–189.
[19] *de Grey A. D. N. J.* The chromatic number of the plane is at least 5 // arXiv preprint arXiv:1804.02385. — 2018.
[20] *Raiskii D. E.* Realization of all distances in a decomposition of the space $\mathbb{R}^n$ into $n+1$ parts // Mathematical notes. — 1970. — V. 7, N. 3. — P. 194–196.
[21] *Райгородский А. М.* Проблема Борсука и хроматические числа метрических пространств // Успехи матем. наук. — 2001. — Т. 56, № 1. — С. 107–146.

минимальное количество цветов, в которые можно так покрасить точки пространства $\mathbb{R}^n$, чтобы никакие три точки не образовывали равнобедренный треугольник с длинами боковых сторон 1 и длиной основания в пределах от a до b. Данную величину называют хроматическим числом пространства с запрещенными одноцветными треугольниками, и она активно изучалась в последнее время [22][23][24][25]. Заметим, что можно указать довольно тривиальную верхнюю оценку исследуемой величины:

$$\chi_{a,b}(\mathbb{R}^n) \leqslant \chi(\mathbb{R}^n) \leqslant (3 + o(1))^n, \quad n \to \infty.$$

Оказывается, что нижние оценки $\chi_{a,b}(\mathbb{R}^n)$ имеют прямую связь с упоминавшейся выше величиной $p(n, k, t_1, t_2)$ подобно тому, как связаны $m(n, k, t)$ и $\chi(\mathbb{R}^n)$. Это является мотивацией для получения содержательных оценок величины $p(n, k, t_1, t_2)$.

Цель работы и основные задачи

Цель данной диссертации состоит в получении новых нижних и верхних оценок величин $m(n, k, t)$ и $p(n, k, t_1, t_2)$ и применении полученных результатов к задачам теории кодирования и комбинаторной геометрии, в частности, к оценкам хроматических чисел пространства с запрещенными одноцветными треугольниками.

Научная новизна

Все результаты диссертации являются новыми.

Теоретическая и практическая значимость работы

Диссертация носит теоретический характер. Полученные в ней результаты важны для теории графов и гиперграфов, экстремальной комбинаторики и комбинаторной геометрии. Кроме того, данные результаты могут иметь прямое приложение к теории кодирования, в частности к оценкам объема равновесного кода, исправляющего ошибки.

[22] *Самиров Д. В., Райгородский А. М.* Хроматические числа пространств с запрещенными одноцветными треугольниками // Матем. заметки. — 2013. — Т. 93, № 1. — С. 134–143.

[23] *Самиров Д. В., Райгородский А. М.* Новые нижние оценки хроматического числа пространства с запрещенными равнобедренными треугольниками // Итоги науки и техники, Современная математика и ее приложения. — 2013. — Т. 125. — С. 252–268.

[24] *Самиров Д. В., Райгородский А. М.* Новые оценки в задаче о хроматическом числе пространства с запрещенными равнобедренными треугольниками // Доклады Академии Наук. — 2014. — Т. 456, № 3. — С. 280–283.

[25] *Самиров Д. В., Райгородский А. М.* Об одной задаче, связанной с оптимальной раскраской пространства без одноцветных равнобедренных треугольников // Труды МФТИ. —2015. —Т. 7, № 2. — С. 39–50.

Методология и методы исследования

В диссертации используются методы экстремальной комбинаторики, границы теории кодирования, линейно-алгебраический метод и вероятностный метод в комбинаторике.

Положения диссертации, выносимые на защиту

1. Получены новые нижние оценки величины $m(n, k, t)$ в ситуации, когда $k \sim k'n$, $t \sim t'n$ при $n \to \infty$, а $k' \in (0, 1)$, $t' \in (0, k')$ — фиксированные константы.
2. Получены новые оценки величины $p(n, k, t_1, t_2)$ для различных ситуаций относительно параметров n, k, t_1, t_2.
3. На основании оценок из пунктов 1 и 2 получены верхние оценки классической в теории кодирования величины $h(n, k, t)$.
4. Получены новые нижние оценки хроматического числа пространства с запрещенными одноцветными треугольниками.

Степень достоверности и аппробация результатов

Все результаты работы строго доказаны.

По теме диссертации были сделаны доклады на следующих научных семинарах:

- Кафедральный научно-исследовательский семинар кафедры дискретной математики ФИВТ МФТИ под руководством профессора А. М. Райгородского (2017 г.)
- Научный семинар по теории кодирования в ИППИ им. Харкевича под руководством д. ф.-м. н. Л. А. Бассалыго (2017 г.)

Публикации

Результаты диссертации опубликованы в 5 работах, представленных в конце списка литературы. Все работы опубликованы в журналах из перечня ВАК. Личный вклад соискателя в работах с соавторами заключается в следующем:

- в работах [1] и [2] доказаны нижние оценки величины $m(n, k, t)$ при $n \to \infty$;
- в работах [3] и [4] доказаны нижние и верхние оценки величины $p(n, k, t_1, t_2)$, получено следствие для задачи о равновесных кодах, исправляющих ошибки;

— в работе [5] доказана теорема о нижней оценке хроматического числа пространства с запрещенными одноцветными треугольниками.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы, насчитывающего 101 наименование. Общий объем диссертации составляет 82 страницы.

Основное содержание работы

Во введении излагается история исследований, связанных с величинами $m(n,k,t)$ и $p(n,k,t_1,t_2)$, а также смежных задач экстремальной комбинаторики. Кроме того, во введении описывается история изучения проблемы о величине хроматического числа пространства $\chi(\mathbb{R}^n)$ и его обобщений, а также связь этих задач с величинами $m(n,k,t)$ и $p(n,k,t_1,t_2)$.

Первая глава диссертации состоит из 4 разделов и посвящена исследованию величины $m(n,k,t)$, определение которой дано выше. Рассматривается *асимптотический* случай, то есть ситуация, в которой $k \sim k'n$, $t \sim t'n$ при $n \to \infty$, где $k' \in (0,1)$, $t' \in (0,k')$. В указанных предположениях все интересующие нас оценки имеют вид $(c+o(1))^n$, где $c > 1$ — константа, т.е. их логарифмы асимптотически равны $n \ln c$ (это можно продемонстрировать при помощи формулы Стирлинга). Мы скажем, что две оценки разнятся значительно, если у них разные величины c, в противном случае будем считать их *асимптотически совпадающими.*

В разделе **1.1** приводятся верхние оценки Франкла–Уилсона и Райгородского–Пономаренко. Формулируются теорема Алсведе–Хачатряна о точном значении $f(n,k,t)$ и теорема Варшамова–Гилберта о нижней оценке величины $h(n,k,t)$. Показывается, каким образом данные теоремы дают нижние оценки величины $m(n,k,t)$.

В разделах **1.2** и **1.3** формулируются и доказываются полученные нами новые нижние оценки величины $m(n,k,t)$. В случае $2t < k$ приводится теорема 5, указывающая, что оценка Франкла–Уилсона является асимптотически точной.

Теорема 5. *Пусть $k = k'n, t = t'n$ при $n \to \infty$ и $2t < k$. Тогда оценка*

$$m(n,k,t) \geqslant f(n,k,t+1) = \sum_{i=r}^{\min\{2r,k-t-1)\}} C_{t+1+2r}^{t+i} C_{n-t-1-2r}^{k-t-1-i}$$

асимптотически точна.

Доказательство теоремы 5, по сути, представляет собой аккуратное применение методов асимптотического анализа к результатам теоремы Алсведе–Хачатряна.

В случае $2t \geqslant k$ нами доказан ряд нижних оценок. Теорема 6 представляет собой в некотором смысле комбинацию теорем Алсведе–Хачатряна и границы Варшамова–Гилберта.

Теорема 6. *Пусть $2k - t \leqslant n$ и $0 \leqslant r \leqslant k - t$. Положим $t_1 = 3t + 2r - 2k$ и* *допустим, что* $2(t+2r)-t_1 \leqslant n$. *Тогда*

$$m(n,k,t) \geqslant \frac{C_n^{t+2r} \sum\limits_{i=r+1}^{\min\{2r,k-t\}} C_{t+2r}^{t+i} C_{n-t-2r}^{k-t-i}}{\sum\limits_{j=t_1}^{t+2r} C_{t+2r}^{j} C_{n-t-2r}^{t+2r-j}}.$$

Эта теорема представляет собой частный случай доказанной нами теоремы 8, которая дает более сильную оценку за счет применения более сложных комбинаторных конструкций в доказательстве.

Теорема 8. *Пусть, как обычно,* $2k-t \leqslant n$. *Пусть, далее,* f, r, l, t_1, s, x *— натуральные числа, удовлетворяющие неравенствам*

$$t+r+l \leqslant k; \;\; t+2r+l \leqslant f \leqslant n; \;\; x \leqslant l;$$

$$2(t+2r)-f \leqslant t_1 = 2t+r-x-k < s < t+2r;$$

$$n-f \geqslant k-t-r-l-1.$$

Введем обозначение

$$|\mathcal{F}| = \frac{C_f^{t+2r}}{\sum\limits_{j=s}^{t+2r} C_{t+2r}^{j} C_{f-t-2r}^{t+2r-j}}.$$

Тогда выполнена оценка

$$m(n,k,t) \geqslant |\mathcal{F}| \cdot C_{n-f}^{k-t-r-l-1} \cdot \left(C_{t+2r}^{t+r+1} C_{f-t-2r}^{l} - C_1 - C_2 \right),$$

где слагаемые C_1 *и* C_2 *имеют вид*

$$C_1 = |\mathcal{F}| \cdot C_{f-t-2r}^{l} \max_{t_1 \leqslant i < s} \sum_{j=t_1}^{i} C_i^j C_{t+2r-i}^{t+r-j+1},$$

$$C_2 = |\mathcal{F}| \cdot C_{t+2r}^{t+r+1} \max_{0 \leqslant i < s} \sum_{j=x+1}^{l} C_{t+2r-i}^{j} C_{f-2t-4r+i}^{l-j}.$$

Кроме того, в разделе 1.2 проведен довольно глубокий анализ относительно оптимальности параметров, используемых в теореме 8.

Наконец, нами сформулирована довольно простая теорема 9, которая в некоторых ситуациях дает лучшую оценку по сравнению с теоремой 8. Доказательство теоремы 9 сводится к примеру явной конструкции.

Теорема 9. *Имеет место два случая.*

1. *Пусть n, k — четные натуральные числа, а t — нечетное число. Тогда*
$$m(n,k,t) \geqslant C_{n/2}^{k/2}.$$

2. *Если же n, k — нечетные натуральные числа, а t — четное число, то*
$$m(n,k,t) \geqslant C_{(n-1)/2}^{(k-1)/2}.$$

После формулировок теорем 6, 8 и 9 приводится ряд рисунков, демонстрирующих, как соотносятся численные значения приведенных выше оценок и теорем из раздела 1.1. Оказывается, что теорема 8 существенно улучшает известные нижние оценки величины $m(n, k'n, t'n)$ при $t' \in (k'/2, k')$. Наибольшее улучшение наблюдается при t', расположенных в середине исследуемого интервала.

Раздел **1.4** посвящен оценкам верхним оценкам величины $A(n, 2\delta, \omega)$, связанной с теорией кодирования и определяемой как максимальное число кодовых слов веса ω с попарными хэмминговыми расстояниями, не меньшими 2δ (эта задача очевидным образом может быть переформулирована в термины величины $h(n,k,t)$, поскольку $A(n,2\delta,\omega) = h(n, 2(k-t), k)$). На основании доказательства теоремы 6 и границы Варшамова–Гилберта формулируется и доказывается следующая новая граница для объема равновесного кода, исправляющего ошибки.

Теорема 10. *Пусть даны числа ω и δ. Пусть, далее, k, t, r, t_1 — натуральные числа, удовлетворяющие соотношениям*
$$\delta/2 < k < \omega + \delta/2;\ \ t = k - \delta/2;\ \ r = \frac{\omega + \delta/2 - k}{2};$$
$$1 \leqslant r \leqslant k - t;\ \ t_1 = 3t + 2r - 2k,\ \ 2(t+2r) - t_1 \leqslant n.$$
Выберем числа d, ρ: если $2t < k$, то положим $d = \rho = 0$; иначе
$$d = 2t - k + 1;\ \ (k-d+1)\left(2 + \frac{d-1}{\rho+1}\right) \leqslant n < (k-d+1)\left(2 + \frac{d-1}{\rho}\right).$$
Пусть, наконец, $k - t$ — степень простого числа.

Тогда выполнено неравенство
$$A(n, 2\delta, \omega) \leqslant \frac{C_n^{d+2\rho}}{C_k^{d+\rho} C_{n-k}^{\rho}} \left(\sum_{i=0}^{k-t-1} C_n^i\right) \cdot \frac{1}{\sum\limits_{i=r+1}^{\min(2r,k-t)} C_{t+2r}^{t+i} C_{n-t-2r}^{k-t-i}}.$$

Данная граница сравнивается с наилучшими известными на настоящий момент границами Левенштейна и линейного программирования. Как оказалось, в ряде случаев новая граница улучшает границу линейного программирования, однако всегда доминируется теоремой Левенштейна.

Вторая глава посвящена исследованию величины $p(n, k, t_1, t_2)$. Данная глава состоит из 4 разделов.

В разделе **2.1** формулируются известные на настоящий момент оценки величины $p(n, k, t_1, t_2)$, основанные на теоремах Алсведе–Хачатряна, Франкла–Уилсона и границе Варшамова–Гилберта. Приводится нижняя граница, полученная Самировым и Райгородским.

В разделах **2.2** и **2.3** формулируются и доказываются новые результаты — теоремы 19–22. Теорема 19 представляет собой новую нижнюю оценку исследуемой величины, которая основывается на комбинации теорем Алсведе–Хачатряна и Варшамова–Гилберта с применением идей доказательства теоремы 8.

Теорема 19. *Пусть $k \leqslant n/2$ и $0 \leqslant \tau \leqslant t_1$ — целое число. Пусть также $0 \leqslant r \leqslant k - \tau$ — целое число. Тогда*

$$p(n, k, t_1, t_2) \geqslant \frac{C_{\tau+2r}^{\tau+r} C_{n-\tau-2r}^{k-\tau-r}}{2(C_1 + C_2)} - 1,$$

где

$$C_1 = \sum_{i=\tau}^{t_1-1} \sum_{j=\max\{\tau,\tau+r+i-k\}}^{\min\{\tau+r,i\}} C_{\tau+r}^{j} C_{r}^{\tau+r-j} C_{k-\tau-r}^{i-j} C_{n-k-r}^{k-\tau-r-i+j},$$

$$C_2 = \sum_{i=t_2+1}^{k} \sum_{j=\max\{\tau,\tau+r+i-k\}}^{\min\{\tau+r,i\}} C_{\tau+r}^{j} C_{r}^{\tau+r-j} C_{k-\tau-r}^{i-j} C_{n-k-r}^{k-\tau-r-i+j},$$

причем при $\tau = t_1$ формально полагаем $C_1 = 0$.

Далее формулируется новая верхняя оценка величины $p(n, k, t_1, t_2)$.

Теорема 20. *Пусть $0 \leqslant r < k - t_2$ — целое число. Введем следующие обозначения:*

$$n_0 = n - t_1 - 2r; \;\; k_0' = \frac{k - t_1 - r}{n - t_1 - 2r}; \;\; t_0' = \frac{t_2 - t_1}{n - t_1 - 2r}.$$

Пусть также $0 \leqslant t_1' \leqslant t_2' \leqslant k' \leqslant 1/2$ — константы. Тогда

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\log_2 p(n, k'n, t_1'n, t_2'n)}{n} \leqslant C_1 + C_2,$$

где

$$C_1 = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{n} \log_2 \frac{C_n^{t_1+2r}}{C_k^{t_1+r} C_{n-k}^r},$$

$$C_2 = \begin{cases} \dfrac{n_0}{n} g(u^2), & \text{если } t_0' > k_0'^2, \\ 0, & \text{если } t_0' \leqslant k_0'^2 \end{cases},$$

а функции $H_2(x)$ *и* $g(x)$ *определяются следующим образом:*

$$H_2(x) = -x \log_2 x - (1-x) \log_2 (1-x); \;\; g(x) = H_2\left(\frac{1-\sqrt{1-x}}{2}\right).$$

Здесь

$$u = -2(k_0' - t_0') + 2\sqrt{t_0'(t_0' - 2k_0' + 1)}.$$

Доказательство теоремы 20 в значительной мере опирается на идеи верхней оценки $m(n, k, t)$ Райгородского–Пономаренко в случае $2t \geqslant k$ и границу линейного программирования.

После формулировок данных теорем следуют наглядные сравнения численных результатов новых границ и оценок предыдущих исследователей. Оказалось, что в ряде случаев новая нижняя оценка теоремы 19 значительно улучшает предыдущие нижние оценки, полученные Райгородским и Самировым. Новая же верхняя оценка (теорема 20) дает небольшое, но экспоненциальное улучшение по сравнению с известными на настоящий момент верхними оценками величины $p(n, k, t_1, t_2)$.

Наконец, в укзаанных разделах формулируются и доказываются теоремы о точном значении величин $p(10, 5, 2, 1)$ и $p(8, 4, 2, 1)$. Они доказываются при помощи интеллектуального перебора и примеров явных конструкций.

Теорема 21. *Верно равенство:*

$$p(10, 5, 1, 2) = 6.$$

Теорема 22. *Справедливо равенство:*

$$p(8, 4, 1, 2) = 9.$$

Раздел **2.4** посвящен задачам теории кодирования. Формулируется и доказывается новая верхняя оценка величины $h(n, k, t)$. Ее доказательство опирается на результаты теории графов и точное значение величины $f(n, k, t)$.

Теорема 23. *Пусть $2k - t \leqslant n$ и для некоторого $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$*

$$(k-t+1)\left(2+\frac{t-1}{r+1}\right) \leqslant n < (k-t+1)\left(2+\frac{t-1}{r}\right),$$

причем при $r = 0$ формально полагаем, что $\dfrac{t-1}{r} = \infty$. Тогда

$$h(n,k,t) \leqslant \frac{C_n^k}{\sum\limits_{i=r}^{\min\{2r,k-t-1\}} C_{t+1+2r}^{t+1+i} C_{n-t-1-2r}^{k-t-1-i}} \ln C_n^k.$$

В конце раздела приводится сравнение полученной границы с оценками теорем Левенштейна и линейного программирования. В ряде случае новый результат доминирует оценку линейного программирования. Что же касается оценки Левенштейна, то хотя новая граница оказывается несколько более слабой по сравнению с ней, численно они практически совпадают. Отметим при этом, что новую границу удается обосновать значительно проще, чем теорему Левенштейна.

Третья глава посвящена оценкам хроматического числа пространства с запрещенными одноцветными треугольниками $\chi_{a,b}(\mathbb{R}^n)$. Глава состоит из трех разделов.

В разделе **3.1** приводятся наилучшие известные на настоящий момент нижние оценки Самирова и Райгородского. Обсуждается идея доказательства данных оценок.

В разделе **3.2** формулируется новая нижняя оценка величины $\chi_{a,b}(\mathbb{R}^n)$.

Теорема 27. *Пусть натуральные числа k_1, k_{-1}, l удовлетворяют условию $0 < l < k_1 + k_{-1} < n/2$ и пусть разность $q = k_1 + k_{-1} - l$ является простым числом.*

Введем следующие обозначения:

$$\gamma = l/n, \quad \kappa_1 = k_1/n, \quad \kappa_{-1} = k_{-1}/n;$$
$$\alpha = \kappa_1 + \kappa_{-1} - b^2(\kappa_1 + \kappa_{-1} - \gamma), \quad \beta = \kappa_1 + \kappa_{-1} - a^2(\kappa_1 + \kappa_{-1} - \gamma);$$
$$\bar{\alpha} = \lceil \alpha n \rceil, \quad \bar{\beta} = \lfloor \beta n \rfloor.$$

Пусть, наконец, целые неотрицательные числа

$$r, r_1, r_0, r_{-1}, s, s_1, s_0, s_{-1}, t, t_1, t_0, t_{-1}$$

удовлетворяют соотношениям

$$r+s+t=n,\ \ r_1+r_0+r_{-1}=r,\ \ s_1+s_0+s_{-1}=s,\ \ t_1+t_0+t_{-1}=t;$$
$$r_1+s_1+t_1=k_1,\ \ r_{-1}+s_{-1}+t_{-1}=k_{-1};$$
$$\max(-2r_1,-2r_{-1})+\max(0,r_1-r_{-1}-r_0)+\max(0,r_{-1}-r_0-r_1)+$$
$$\max(-2s_1,-2s_{-1})+\max(0,s_1-s_{-1}-s_0)+\max(0,s_{-1}-s_0-s_1)+$$
$$\max(-2t_1,-2t_{-1})+\max(0,t_1-t_{-1}-t_0)+\max(0,t_{-1}-t_0-t_1)\geqslant\bar{\alpha}.$$

Тогда

$$\chi_{a,b}(\mathbb{R}^n)\geqslant\frac{1}{3\sum\limits_{(m_1,m_2)\in\mathcal{B}}C_n^{m_1}C_{n-m_1}^{m_2}}\times$$
$$\times\left(\frac{C_r^{r_1}C_{r-r_1}^{r_0}C_s^{s_1}C_{s-s_1}^{s_0}C_t^{t_1}C_{t-t_1}^{t_0}}{2\sum\limits_{\mathcal{A}}\prod\limits_{i=-1}^{1}C_{r_i}^{r_{i,1}}C_{r_i-r_{i,1}}^{r_{i,0}}C_{s_i}^{s_{i,1}}C_{s_i-s_{i,1}}^{s_{i,0}}C_{t_i}^{t_{i,1}}C_{t_i-t_{i,1}}^{t_{i,0}}}-1\right),$$

где область суммирования $\mathcal{A}$ задается условиями

$$r_{i,j}\geqslant 0; s_{i,j}\geqslant 0; t_{i,j}\geqslant 0;\ \ i,j\in\{-1,0,1\};$$
$$\sum_i r_{i,j}=r_j,\ \ j\in\{-1,0,1\};\quad \sum_j r_{i,j}=r_i,\ \ i\in\{-1,0,1\};$$
$$\sum_i s_{i,j}=s_j,\ \ j\in\{-1,0,1\};\quad \sum_j s_{i,j}=s_i,\ \ i\in\{-1,0,1\};$$
$$\sum_i t_{i,j}=t_j,\ \ j\in\{-1,0,1\};\quad \sum_j t_{i,j}=t_i,\ \ i\in\{-1,0,1\};$$

$$r_{1,1}-r_{1,-1}-r_{-1,1}+r_{-1,-1}+s_{1,1}-s_{1,-1}-s_{-1,1}+s_{-1,-1}+t_{1,1}-t_{1,-1}-t_{-1,1}+t_{-1,-1}>\bar{\beta},$$

а область $\mathcal{B}$ определяется следующим образом:

$$\mathcal{B}=\{(m_1,m_2)\colon m_1,m_2\in\mathbb{N}\cup\{0\}, m_1+m_2\leqslant n, m_1+2m_2\leqslant q-1\}.$$

В этом же разделе приводится сравнение численных результатов оценки из теоремы 27 и оценок предыдущих исследователей. Выясняется, что новая теорема улучшает предыдущие оценки при малых a и больших b.

Раздел **3.3** посвящен доказательству теоремы 27. Оно опирается на идеи Самирова и Райгородского. Основная идея улучшения состоит в том, что в одном из этапов доказательства требуется построить совокупность векторов с ограничением на попарные скалярные произведения (это соответствует определению величины $p(n, k, t_1, t_2)$), и на этом этапе вместо $(0, 1)$-векторов рассматриваются $(-1, 0, 1)$-векторы.

В **заключении** приведены основные результаты диссертации и перспективы дальнейшего развития работы.

Результаты диссертации состоят в следующем:

- Получены новые нижние оценки величины $m(n, k, t)$ при $n \to \infty$. Установлена асимптотическая точность оценки Франкла и Уилсона в случае $2t < k$.
- Получены новые нижние и верхние оценки величины $p(n, k, t_1, t_2)$ при $n \to \infty$. Для некоторых случаев малых n явно найдено значение исследуемой величины.
- Указаны новые верхние границы для величины $h(n, k, t)$, приведено их сравнение с имеющимися на настоящий момент оценками теории кодирования.
- При помощи обобщения понятия величины $p(n, k, t_1, t_2)$ на случай $(-1, 0, 1)$-векторов была получена новая нижняя оценка хроматического числа пространства без одноцветных треугольников $\chi_{a,b}(\mathbb{R}^n)$.

Наиболее естественным направлением дальнейшего развития в этой области является изучение других случаев касательно соотношения параметров k, t, t_1, t_2 и n. Также некоторый интерес, на наш взгляд, представляет новая граница теории кодирования, полученная в теореме 23. Наконец, остается возможность для усложнении техники и введении большего числа параметров в случае величины $m(n, k, t)$ и о применении более сложных идей при доказательстве теоремы 27.

Благодарности. Автор выражает глубокую признательность своему научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору Райгородскому Андрею Михайловичу за постановку задач и неоценимую поддержку в работе.

Работы автора по теме диссертации

[1] *Бобу А. В., Куприянов А. Э., Райгородский А. М.* Асимптотическое исследование задачи о максимальном числе ребер однородного гиперграфа с одним запрещенным пересечением // Матем. сборник. — 2016. — Т. 207, № 5. — С. 17–42.

[2] *Бобу А. В., Куприянов А. Э., Райгородский А. М.* О максимальном числе ребер однородного гиперграфа с одним запрещенным пересечением // Доклады Академии Наук. — 2015. — Т. 463, № 1. — С. 11–13.

[3] *Бобу А. В., Куприянов А. Э., Райгородский А. М.* О числе ребер однородного гиперграфа с диапазоном разрешенных пересечений // Проблемы передачи информации. — 2017. — Т. 53, № 4. — С. 16–42.

[4] *Бобу А. В., Куприянов А. Э., Райгородский А. М.* О числе ребер однородного гиперграфа с диапазоном разрешенных пересечений // Доклады Академии Наук. — 2017. — Т. 475, № 4. — С. 365–368.

[5] *Бобу А. В., Куприянов А. Э.* Улучшение нижних оценок хроматического числа пространства с запрещенными одноцветными треугольниками // Труды МФТИ. — 2018. — Т. 10, № 4. — С. 14–23.