На правах рукописи

Бердников Алексей Викторович

Раскраски метрических пространств с запрещенными одноцветными конфигурациями

Специальность 01.01.09 —
«дискретная математика и математическая кибернетика»

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2021

Работа выполнена в Федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)».

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор
Райгородский Андрей Михайлович

Ведущая организация: Хабаровское отделение Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института прикладной математики Дальневосточного отделения Российской академии наук

Защита состоится 28 декабря 2021 г. в 12 часов на заседании диссертационного совета ФПМИ.01.01.09.014 по адресу: 141701, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский переулок, д. 9.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте Московского физико-технического института (государственного университета): https://mipt.ru/education/post-graduate/soiskateli-fiziko-matematicheskie-nauki.php

Ученый секретарь
диссертационного совета
ФПМИ.01.01.09.014,
к. т. н., доцент Войтиков Константин Юрьевич

Актуальность темы исследования и степень ее разработанности

Данная работа посвящена задачам о раскраске метрических пространств, связанным с двумя классическими сюжетами комбинаторной геометрии — задачей Хадвигера — Нельсона о хроматическом числе пространства и задачей Борсука о разбиении множества на части меньшего диаметра.

Считается, что первый вариант формулировки этой задачи о хроматическом числе плоскости был предложен Э. Нельсоном в 1950 году. В 50-х годах она уже была известна Г. Хадвигеру и П. Эрдёшу, хотя впервые была опубликована лишь в 1960 году[1]. История этой задачи подробно изложена в книге А. Сойфера[2].

Итак, *хроматическим числом плоскости* называется величина, равная наименьшему количеству цветов, в которые можно покрасить все точки плоскости таким образом, чтобы расстояние между любыми двумя точками одинакового цвета не было равно единице. Эта величина обозначается $\chi(E^2)$, и задача ее отыскания называется задачей Хадвигера — Нельсона. Несмотря на кажущуюся простоту эта задача до сих пор далека от полного решения. Известно, что $\chi(E^2) \leqslant 7$. Соответствующая раскраска в семь цветов, получающаяся из разбиения плоскости на шестиугольники диаметра чуть меньше единицы, приписывается Дж. Р. Исбеллу. Нижняя же оценка $\chi(E^2) \geqslant 4$, доказанная братьями Мозерами[3], более полувека оставалась непревзойденной, однако в 2018 году была улучшена на единицу О. Д. Н. Дж. де Греем (с привлечением компьютерных вычислений)[4].

Приведенное выше определение допускает множество обобщений. Например, естественно рассматривать хроматическое число n-мерного евклидова пространства E^n (мы будем обозначать эту величину символом $\chi(E^n)$). Для значений $n \leqslant 4$ известны следующие оценки (помимо указанных выше оценок величины $\chi(E^2)$):

$$\chi(E^1) = 2, \tag{1}$$

$$6 \leqslant \chi(E^3) \leqslant 15, \tag{2}$$

$$9 \leqslant \chi(E^4) \leqslant 54. \tag{3}$$

[1] *Gardner, M.* Mathematical Games: A new collection of “brain teasers” [Text] / M. Gardner // Scientific American. 1960. Vol. 203, issue 4. P. 172—180.

[2] *Soifer, A.* The Mathematical Coloring Book [Text] : Mathematics of Coloring and the Colorful Life of its Creators / A. Soifer. New York : Springer New York, 2008. 618 p.

[3] *Moser, L.* Solution to problem 10 [Text] / L. Moser, W. Moser // Canadian Mathematical Bulletin. 1961. Vol. 4. P. 187—189.

[4] *de Grey, A. D. N. J.* The chromatic number of the plane is at least 5 [Text] / A. D. N. J. de Grey. 2018. Apr. 8. arXiv: 1804.02385 [math.CO].

Равенство (1) очевидно. Оценки (2) для трехмерного пространства были получены в 2002 году: нижняя — О. Нехуштаном[5], верхняя — Д. Коулсоном[6]. Из неравенств (3) первое доказали Дж. Эксо, Д. Измаилеску и М. Лим в 2014 году[7] (с использованием вычислений на компьютере), второе — Р. Радоичич и Г. Тот в 2003 году[8].

Представляет интерес и асимптотическое поведение величины $\chi(E^n)$ при стремлении размерности n к бесконечности. Известны следующие экспоненциальные оценки:

$$(1{,}239... + o(1))^n \leqslant \chi(E^n) \leqslant (3 + o(1))^n \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{4}$$

Иными словами, существует константа $\zeta = 1{,}239...$ и бесконечно малые последовательности действительных чисел $\{\delta_n\}$ и $\{\delta'_n\}$, для которых при любом натуральном n выполняются неравенства

$$(\zeta + \delta_n)^n \leqslant \chi(E^n) \leqslant (3 + \delta'_n)^n.$$

Оценка снизу была доказана в 2000 году А. М. Райгородским[9] и является улучшением оценки П. Франкла и Р. М. Уилсона[10], которые доказали неравенство $\chi(E^n) \geqslant (\zeta + o(1))^n$ при $n \to \infty$ для $\zeta = 1{,}207...$ Оценка сверху была найдена Д. Ларманом и К. А. Роджерсом в 1972 году[11] и с тех пор так и не была улучшена. Таким образом, оказалась верна высказанная еще ранее гипотеза Эрдёша о том, что величина $\chi(E^n)$ растет экспоненциально при $n \to \infty$.

Помимо увеличения размерности пространства, имеет смысл также увеличивать число «запрещенных расстояний», то есть запрещать двум точкам одного цвета находиться на расстоянии $a \in \mathcal{A}$, где $\mathcal{A}$ — некоторое фиксированное множество положительных чисел. Минимальное возможное число цветов в раскраске n-мерного евклидова пространства, удовлетворяющей этому ограничению, называется хроматическим числом

---

[5] *Nechushtan, O.* On the space chromatic number [Text] / O. Nechushtan // Discrete Mathematics. 2002. Vol. 256, issues 1—2. P. 499—507.

[6] *Coulson, D.* A 15-colouring of 3-space omitting distance one [Text] / D. Coulson // Discrete Mathematics. 2002. Vol. 256, issues 1—2. P. 83—90.

[7] *Exoo, G.* On the chromatic number of $\mathbb{R}^4$ [Text] / G. Exoo, D. Ismailescu, M. Lim // Discrete & Computational Geometry. 2014. Vol. 52, no. 2. P. 416—423.

[8] *Radoičić, R.* Note on the chromatic number of the space [Text] / R. Radoičić, G. Tóth // Discrete and Computational Geometry : The Goodman–Pollack Festschrift / ed. by B. Aronov [et al.]. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2003. P. 695—698. (Algorithms and Combinatorics ; 25).

[9] *Райгородский, А. М.* О хроматическом числе пространства [Текст] / А. М. Райгородский // Успехи математических наук. 2000. Т. 55, вып. 332, № 2. С. 147—148.

[10] *Frankl, P.* Intersection theorems with geometric consequences [Text] / P. Frankl, R. M. Wilson // Combinatorica. 1981. Vol. 1, no. 4. P. 357—368.

[11] *Larman, D. G.* The realization of distances within sets in Euclidean space [Text] / D. G. Larman, C. A. Rogers // Mathematika. 1972. June. Vol. 19, issue 01. P. 1—24.

этого пространства с множеством запрещенных расстояний $\mathcal{A}$ и обозначается $\chi(E^n, \mathcal{A})$. Существуют исследования, посвященные хроматическим числам с бесконечным множеством запрещенных расстояний[12], но в данной работе будет рассматриваться лишь случай конечного числа запретов, то есть когда $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_k\}$.

Сразу же отметим, что случай $\operatorname{card} \mathcal{A} = 1$ не дает ничего нового, так как в силу однородности вещественного пространства E^n

$$\chi(E^n, \{a\}) = \chi(E^n)$$

для любого положительного числа a. Иными словами, величина запрещенного расстояния (в том случае, если оно всего одно) не влияет на хроматическое число пространства. Однако при $\operatorname{card} \mathcal{A} \geqslant 2$ величина $\chi(E^n, \mathcal{A})$ уже представляет определенный интерес. В частности, в главах 1 и 2 данной работы производится нижняя оценка хроматического числа пространства с несколькими запрещенными расстояниями.

Хроматическое число с несколькими запрещенными расстояниями можно грубо оценить сверху через хроматическое число с одним запрещенным расстоянием. А именно, нетрудно показать, что для любого натурального k и любого набора $a_1, \dots, a_k$ справедливо неравенство

$$\chi(E^n, \{a_1, \dots, a_k\}) \leqslant (\chi(E^n))^k. \tag{5}$$

При большом количестве запрещенных расстояний, как правило, рассматривают не саму величину $\chi(E^n, \mathcal{A})$ для некоторого фиксированного множества $\mathcal{A}$, а максимум таких величин по всем наборам $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_k\}$ заданной мощности k, то есть

$$\overline{\chi}(E^n, k) := \max_{\operatorname{card} \mathcal{A} = k} \chi(E^n, \mathcal{A}). \tag{6}$$

Неравенство (5) и результат Лармана и Роджерса (верхняя оценка в неравенствах (4)) позволяют асимптотически оценить сверху величину $\overline{\chi}(E^n, k)$ (и заодно убедиться в ее существовании):

$$\overline{\chi}(E^n, k) \leqslant (3 + o(1))^{kn} \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{7}$$

Существуют и нижние асмптотические оценки. В 2001 году А. М. Райгородский доказал[13], что $\overline{\chi}(E^n, k) \geqslant (Bk)^{Cn}$ для некоторых полодительных

[12] *Мощевитин, Н. Г.* О раскрасках пространства $\mathbb{R}^n$ с несколькими запрещенными расстояниями [Текст] / Н. Г. Мощевитин, А. М. Райгородский // Математические заметки. 2007. Т. 81, № 5. С. 733—743.

[13] *Райгородский, А. М.* Проблема Борсука и хроматические числа некоторых метрических пространств [Текст] / А. М. Райгородский // Успехи математических наук. 2001. Т. 56, вып. 1. С. 107—146.

констант B и C. В 2006 году И. М. Шитова представила[14] следующие результаты для случаев двух, трех и четырех запрещенных расстояний:

$$\overline{\chi}(E^n, 2) \geqslant (1{,}465 + o(1))^n \quad \text{при} \quad n \to \infty, \tag{8}$$

$$\overline{\chi}(E^n, 3) \geqslant (1{,}664 + o(1))^n \quad \text{при} \quad n \to \infty, \tag{9}$$

$$\overline{\chi}(E^n, 4) \geqslant (1{,}836 + o(1))^n \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{10}$$

Позднее, в 2009 году, Е. С. Горская, И. М. Митричева, В. Ю. Протасов и А. М. Райгородский[15] опубликовали новый метод получения оценок вида

$$\overline{\chi}(E^n, k) \geqslant (\zeta_k + o(1))^n \quad \text{при} \quad n \to \infty \tag{11}$$

для любого натурального k. Они вычислили для малых значений k конкретные значения ζ_k, удовлетворяющие неравенству (11), и высказали предположение, что $\zeta(k)$ растет сублинейно при $k \to \infty$, причем скорость роста замедляется по мере увеличения k. В данной диссертации доказывается, что значения ζ_k растут асимптотически быстрее, чем k^C для любой константы $C < \frac{1}{2}$.

Вместо евклидова пространства E^n можно рассматривать произвольное метрическое пространство (X, ρ). Например, n-мерное векторное пространство $\mathbb{R}^n$, снабженное нормой

$$\|\boldsymbol{x}\|_p := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

где $p \geqslant 1$ — некоторое действительное число. Для такого нормированного пространства мы будем использовать обозначение ℓ_p^n. (Ясно, что евклидово пространство является частным случаем ℓ_p^n, а именно $E^n = \ell_2^n$.) В 2003 году А. М. Райгородский нашел[16] нижнюю асимптотическую оценку хроматического числа пространства ℓ_1^n:

$$\chi(\ell_1^n) \geqslant (1{,}365... + o(1))^n \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Для k запрещенных естественным образом определяется величина $\overline{\chi}(\ell_p^n, k)$ аналогично величине $\overline{\chi}(E^n, k)$. При малых значениях k известны следующие оценки величины $\overline{\chi}(\ell_1^n, k)$:

$$\overline{\chi}(\ell_1^n, 2) \geqslant (1{,}691... + o(1))^n \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

[14] *Шитова, И. М.* О хроматическом числе пространства с несколькими запрещенными расстояниями [Текст] / И. М. Шитова // Доклады Академии наук. 2007. Т. 413, № 2. С. 178—180.

[15] Оценка хроматических чисел евклидова пространства методами выпуклой минимизации [Текст] / Е. С. Горская [и др.] // Математический сборник. 2009. Т. 200, № 6. С. 3—22.

[16] *Райгородский, А. М.* О хроматическом числе пространства с метрикой l_q [Текст] / А. М. Райгородский // Успехи математических наук. 2004. Т. 59, вып. 5 (359). С. 161—162; *Райгородский, А. М.* О хроматических числах метрических пространств [Текст] / А. М. Райгородский // Чебышёвский сборник. 2004. Т. 5, вып. 1. С. 165—173.

$$\overline{\chi}(\ell_1^n, 3) \geqslant (2{,}000... + o(1))^n \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

$$\overline{\chi}(\ell_1^n, 4) \geqslant (2{,}250... + o(1))^n \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Эти результаты были опубликованы И. М. Шитовой в 2007 году[17]. Существует также и верхняя оценка

$$\overline{\chi}(\ell_1^n, k) \leqslant (5 + o(1))^{kn} \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

которую получили в 2004 году З. Фюреди и Кан Джонхён[18]. Для $p \notin \{1, 2\}$ тоже существуют верхние и нижние оценки хроматического числа пространства ℓ_p^n с одним или несколькими запрещенными расстояниями[19].

Понятие хроматического числа $\chi((X, \rho), \mathcal{A})$ метрического пространства (X, ρ) с множеством запрещенных расстояний $\mathcal{A}$ тесно связано с теорией графов. Чтобы понять эту связь, рассмотрим граф

$$\mathfrak{G}((X, \rho), \mathcal{A}) := (\mathcal{V}, \mathcal{E}),$$

где $\mathcal{V} = X$ и

$$\mathcal{E} = \{\{x, y\} \subset \mathcal{V} \mid \rho(x, y) \in \mathcal{A}\}$$

(так называемый *полный дистанционный граф*). Проще говоря, это граф, вершинами которого являются точки нашего пространства, причем две точки соединены ребром тогда и только тогда, когда между ними достигается одно из запрещенных расстояний. Такие графы называются графами расстояний, или дистанционными графами. Для удобства введем обозначение $G_X := \mathfrak{G}((X, \rho), \mathcal{A})$ (далее для простоты будем считать, что метрика ρ и множество $\mathcal{A}$ фиксированы, поэтому такая краткая запись не должна привести ни к каким неоднозначностям). Нетрудно видеть, что хроматическое число пространства равно хроматическому числу дистанционного графа (отсюда и название):

$$\chi((X, \rho), \mathcal{A}) = \chi(G_X).$$

[17] *Шитова, И. М.* О хроматическом числе пространства с несколькими запрещенными расстояниями [Текст] / И. М. Шитова // Доклады Академии наук. 2007. Т. 413, № 2. С. 178—180; *Райгородский, А. М.* О хроматических числах вещественных и рациональных пространств с вещественными или рациональными запрещенными расстояниями [Текст] / А. М. Райгородский, И. М. Шитова // Математический сборник. 2008. Т. 199, № 4. С. 107—142.

[18] *Füredi, Z.* Distance graph on $\mathbb{Z}_n$ with ℓ_1 norm [Text] / Z. Füredi, J.-H. Kang // Theoretical Computer Science. 2004. Vol. 319, issues 1—3: Combinatorics of the Discrete Plane and Tilings. P. 357—366.

[19] *Купавский, А. Б.* О хроматическом числе $\mathbb{R}^n$ с множеством запрещенных расстояний [Текст] / А. Б. Купавский // Доклады Академии наук. 2010. Т. 435, № 6. С. 740—743; *Kupavskiy, A.* On the chromatic number of $\mathbb{R}^n$ with an arbitrary norm [Text] / A. Kupavskiy // Discrete Mathematics. 2011. Vol. 311, issue 6. P. 437—440.

(Напомним, что хроматическим числом $\chi(G)$ графа G называется наименьшее число цветов, в которые можно раскрасить его вершины так, чтобы каждое ребро соединяло вершины разных цветов[20].)

Рассмотрим $G_V := \mathfrak{G}((V,\rho),\mathcal{A})$ — полный граф расстояний, построенный для конечного подпространства V нашего пространства X. Поскольку G_V — подграф графа G_X, его хроматическое число не больше хроматического числа графа G_X:

$$\chi(G_V) \leqslant \chi(G_X).$$

Таким образом, если мы сможем найти величину $\chi(G_V)$ (или оценить ее снизу), то автоматически получим нижнюю оценку хроматического числа пространства X. Более того, среди конечных подмножеств $V \subset X$ гарантированно существует такое, что $\chi(G_V) = \chi(G_X)$ (даже если X континуально, как, например, в случае $X = \mathbb{R}^n$). Это следует из теоремы, доказанной в 1951 году Н. Г. де Брёйном и П. Эрдёшем[21]. (Стоит также отметить, что доказательство этой теоремы опирается на аксиому выбора.)

Величину $\chi(G_V)$, в свою очередь, удобно оценивать с помощью неравенства

$$\chi(G_V) \geqslant \frac{\operatorname{card} V}{\alpha(G_V)}, \tag{12}$$

где $\alpha(G_V)$ — число независимости графа G_V (размер наибольшего пустого подграфа графа G_V). Значит, всё сводится к оценке, на этот раз верхней, числа $\alpha(G_V)$. Опять же, по аналогии с теорией графов мы будем называть множество $U \subset V$ *независимым в метрическом пространстве* (V,ρ) *с множеством запрещенных расстояний* $\mathcal{A}$, если между парами точек из U не достигается ни одно из запрещенных расстояний:

$$\forall x, y \in U \quad \rho(x,y) \notin \mathcal{A},$$

— и будем называть величину

$$\alpha((V,\rho),\mathcal{A}) := \max\{\operatorname{card} U \mid U \text{ — независимое множество в } (V,\rho)\}$$

числом независимости метрического пространства (V,ρ) *с множеством запрещенных расстояний* $\mathcal{A}$. При этом, очевидно, выполняется равенство

$$\alpha((V,\rho),\mathcal{A}) = \alpha(G_V).$$

Итак, множество V должно быть подобрано таким образом, чтобы можно было достаточно точно оценить величину $\alpha(G_V)$. Помимо этого,

[20] *Харари, Ф.* Теория графов [Текст] / Ф. Харари ; под ред. Г. П. Гаврилова ; пер. с англ. В. П. Козырева. М. : Мир, 1973. 301 с.

[21] *Bruijn, N. G. de.* A colour problem for infinite graphs and a problem in the theory of relations [Text] / N. G. de Bruijn, P. Erdös // Proceedings of the Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen. Series A: Mathematical Sciences. 1951. Vol. 54, no. 5. P. 371—373.

конечно, хотелось бы, чтобы отношение $\frac{\operatorname{card} V}{\alpha(G_V)}$ было само по себе близко к значению $\chi(G_V)$, однако в большинстве случаев проверить это не представляется возможным.

Один из наиболее эффективных способов получения верхних оценок на числа независимости дистанционных графов — *линейно-алгебраический метод в комбинаторике.* Он подробно описан в книге Л. Бабаи и П. Франкла[22], а также в книге А. М. Райгородского[23]. Именно этот метод (вместе с вышеизложенными идеями) был использован для получения всех нижних асимптотических оценок, перечисленных выше, и будет неоднократно использован в данной работе.

Отметим также, что в большинстве упомянутых выше оценок хроматического числа пространства, так же как и в данной работе, использовались графы расстояний с целочисленными координатами вершин, поэтому все эти результаты связаны также и с теорией кодирования. Чтобы понять эту связь достаточно проинтерпретировать целочисленные точки n-мерного пространства $\mathbb{R}^n$, снабженного некоторой метрикой, как кодовые слова длины n. Если мы теперь рассмотрим граф, вершины которого — это кодовые слова, а ребра соединяют все пары вершин, расстояние между которыми равно некоторому числу d, то любое независимое множество такого графа будет являться *кодом с одним запрещенным расстоянием*[24].

Помимо полных дистанционных графов на метрическом пространстве (X, ρ) рассматриваются и неполные, то есть такие графы $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$, у которых $\mathcal{V} = X$ и

$$\mathcal{E} \subset \big\{\{x, y\} \subset \mathcal{V} \bigm| \rho(x, y) \in \mathcal{A}\big\}.$$

Ясно, что $\chi(\ell_p^n, \mathcal{A}) = \max \chi(\mathfrak{G})$, где максимум берется по всем дистанционным графам в пространстве ℓ_p^n с множеством запрещенных расстояний $\mathcal{A}$. Можно рассмотреть аналогичную величину, добавив дополнительное ограничение на графы расстояний: для каждого натурального $m \geqslant 3$ определим величину $\chi_m(\ell_p^n, \mathcal{A})$ как максимум хроматических чисел полных и неполных дистанционных графов в пространстве ℓ_p^n с множеством запрещенных расстояний $\mathcal{A}$, не содержащих клик размера m. Если запрещенное расстояние всего одно, то есть $\mathcal{A} = \{a\}$, сама величина a неважна, поэтому для удобства введем обозначение $\chi_m(\ell_p^n) := \chi_m(\ell_p^n, \{1\})$. Для случая евклидова пространства известно, что для каждого m существует константа

[22] *Babai, L.* Linear algebra methods in combinatorics [Text] / L. Babai, P. Frankl. Chicago : The University of Chicago, 1992. 225 p.

[23] *Райгородский, А. М.* Линейно-алгебраический метод в комбинаторике [Текст] / А. М. Райгородский. 2-е изд. М. : МЦНМО, 2015. 144 с.

[24] *Мак-Вильямс, Ф. Дж.* Теория кодов, исправляющих ошибки [Текст] / Ф. Дж. Мак-Вильямс, Н. Дж. А. Слоэн ; пер. с англ. И. И. Грушко, В. А. Зиновьева. М. : Связь, 1979. 744 с.; *Bassalygo, L.* Codes with forbidden distances [Text] / L. Bassalygo, G. Cohen, G. Zémor // Discrete Mathematics. 2000. Vol. 213, issues 1—3. P. 3—11.

$c_m > 1$, удовлетворяющая асимптотическому неравенству

$$\chi_m(E^n) \geqslant (c_m + o(1))^n \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{13}$$

Наибольшие известные значения c_m были найдены А. Б. Купавским в 2014 году[25] с использованием вероятностного метода. Интерес к величине $\chi_m(E^n)$ связан с тем, что обычные (не дистанционные) графы, не содержащие даже 3-клик, могут обладать сколь угодно большим хроматическим числом (теорема, доказанная в 1959 году П. Эрдёшем[26]). Таким образом, оценки вида (13) в некотором смысле переносят классический результат Эрдёша на графы расстояний.

Другая классическая задача, возникающая в связи с раскраской пространства — это задача Борсука о разбиении множеств на части меньшего диаметра. *Число Борсука* — это величина $f(d)$, равная минимальному количеству частей меньшего диаметра, на которые может быть разбито произвольное множество Ω в евклиовом d-мерном пространстве E^d, имеющее диаметр 1. Очевидно, что $f(1) = 2$. В 30-х годах прошлого века К. Борсук доказал[27], что $f(d)$ всегда больше d, причем $f(2) = 3$, и выдвинул гипотезу, что $f(d) = d + 1$ для всех размерностей d. В 1993 году гипотеза Борсука была опровергнута Дж. Каном и Г. Калаи[28], и сейчас известно, что, хотя $f(1) = 2, f(2) = 3, f(3) = 4$, уже $f(64) > 65$ и, более того,

$$\left(\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{2}} + o(1)\right)^{\sqrt{d}} \leqslant f(d) \leqslant \left(\sqrt{\frac{3}{2}} + o(1)\right)^{d} \tag{14}$$

Нижнюю оценку опубликовал в 1999 году А. М. Райгородский[29], а верхнюю получил в 1988 году О. Шрамм[30].

Нас будут интересовать нижние оценки величины $f(d)$ при $d \to \infty$. Пусть $\Omega \subset E^d$ — конечное множество точек. Граф $G = G_\Omega = (\Omega, \mathcal{E})$ называется его *графом диаметров*, если $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in E$ тогда и только тогда,

[25] *Купавский, А. Б.* Явные и вероятностные конструкции дистанционных графов с маленьким кликовым и большим хроматическим числами [Текст] / А. Б. Купавский // Известия Российской академии наук. Серия математическая. 2014. Т. 78, № 1. С. 3—35.

[26] *Erdös, P.* Graph theory and probability [Text] / P. Erdös // Canadian Journal of Mathematics. 1959. Vol. 11. P. 34—38.

[27] *Borsuk, K.* Drei Sätze über die n-dimensionale euklidische Sphäre [Text] / K. Borsuk // Fundamenta Mathematicae. 1933. Jg. 20. S. 177–190.

[28] *Kahn, J.* A counterexample to Borsuk's conjecture [Text] / J. Kahn, G. Kalai // Bulletin (new series) of the AMS. 1993. Vol. 29. P. 60—62.

[29] *Райгородский, А. М.* Об одной оценке в проблеме Борсука [Текст] / А. М. Райгородский // Успехи математических наук. 1999. Т. 54, вып. 2. С. 185—186; *Raigorodskii, A. M.* Cliques and cycles in distance graphs and graphs of diameters [Text] / A. M. Raigorodskii // Discrete Geometry and Algebraic Combinatorics / ed. by A. Barg, O. R. Musin. Providence, Rhode Island : American Mathematical Society, 2014. P. 93—109. (Contemporary Mathematics ; 625).

[30] *Schramm, O.* Illuminating sets of constant width [Text] / O. Schramm // Mathematika. 1988. Vol. 35. P. 180—189.

когда расстояние $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|$ между точками $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ равно диаметру $\operatorname{diam}\Omega$ множества Ω. Граф диаметров является частным случаем графа расстояний. Нетрудно видеть, что для конечных множеств разбиение на части меньшего диаметра и раскраска графа диаметров суть одно и то же. Поэтому имеет место оценка $f(d) \geqslant \chi(G_\Omega)$, коль скоро $\Omega \subset E^d$.

Нижняя оценка в (14) получается следующим образом. Рассматривается дистанционный граф G в n-мерном евклидовом пространстве E^n, вершины которого являются $(-1,0,1)$-векторами, причем фиксированная доля всех координат равна -1, столько же координат равны 1, а остальные координаты равны 0. Этот граф оказывается изоморфен некоторому графу диаметров H (с диаметром 1) в пространстве E^d, где $d = n(n+1)/2$. Далее оценивается снизу хроматическое число графа G:

$$\chi(G) \geqslant \left(\frac{2}{\sqrt{3}} + o(1)\right)^n,$$

и это даёт нужную оценку, поскольку $f(d) \geqslant \chi(H) = \chi(G)$ и $n \sim \sqrt{2d}$. В главе 3 данной диссертации будет доказано, что целый класс конструкций на основе $(-1,1)$ векторов, а также $(-1,0,1)$-векторов позволяет строить контрпримеры к гипотезе Борсука с нелинейным ростом величины $f(d)$.

У всех упомянутых выше конструкций для оценки снизу числа Борсука есть общая черта: множество вершин построенного графа единичных диаметров в пространстве E^d всегда лежит на сфере, радиус которой асимптотически равен $1/\sqrt{2}$. Интуитивно это кажется естественным, ведь любое множество диаметра 1 в евклидовом d-мерном пространстве E^d можно накрыть шаром радиуса $\sqrt{d/(2d+2)} \sim 1/\sqrt{2}$, и для построения контрпримера к гипотезе Борсука хочется взять множество с как можно большим накрывающим шаром. Однако в 2012 году А. М. Райгородский и А. Б. Купавский доказали[31], что для любого наперед заданного $r \in (1/2, 1/\sqrt{2})$ на сфере радиуса r в $\mathbb{R}^d$ существует множество диаметра 1, дающее контрпример к гипотезе Борсука.

Райгородский и Купавский для доказательства указанного выше результата использовали $(-1,1)$-векторы с равным числом положительных и отрицательных координат. В данной диссертации доказывается, что аналогичные контрпримеры к гипотезе Борсука на сферах малых радиусов можно строить с помощью довольно произвольных конфигураций $(-1,1)$-векторов и $(-1,0,1)$-векторов.

[31] *Kupavskii, A.* A counterexample to Borsuk's conjecture [Text] / A. Kupavskii, A. Raigorodskii // Moscow Journal of Combinatorics and Number Theory. 2012. Vol. 2. P. 27—48.

Цель работы и основные задачи

Основной задачей работы является получение новых оценок хроматического числа дистанционных графов, возникающих в связи с различными задачами о раскраске метрических пространств. Цель данной работы состоит в развитии линейно-алгебрачеческих и вероятностных методов в экстремальной комбинаторике и теории графов.

Научная новизна

Все результаты, представленные в диссертации, являются новыми.

Теоретическая и практическая значимость работы

Диссертация носит теоретический характер. Полученные в ней результаты важны для экстремальной теории графов, комбинаторной геометрии, экстремальной комбинаторики и теории кодирования.

Методы исследования

В диссертации используется линейно-алгебраический, вероятностный и другие классические методы экстремальной комбинаторики.

Основные положения, выносимые на защиту

1. Для любого $C < \dfrac{1}{q+1}$ найдены полные дистанционные графы в пространстве ℓ_q^n ($q \in \mathbb{N}$) с k запрещенными расстояниями, хроматическое число которых не меньше $(Bk)^{Cn}$, где B — некоторая положительная константа, зависящая от выбора C.
2. С помощью вероятностного метода в комбинаторике доказано существование неполных дистанционных графов в пространстве ℓ_p^n ($p \in \mathbb{N}$) с k запрещенными расстояниями, не имеющих клик фиксированного размера, чье хроматическое число можно оценить снизу в виде $(Bk)^{Cn}$.
3. Найден класс конструкций на основе (-1,1)-векторов, а также $(-1, 0, 1)$-векторов, дающих новые контрпримеры к гипотезе Борсука с нелинейным ростом числа Борсука на сферах любого радиуса, превышающего $\dfrac{1}{2}$.

Апробация результатов

По теме диссертации были сделаны доклады на следующих научных конференциях:

— Международная конференция «The 5th German–Russian Week of the Young Researcher», Россия, 2015.

— Международная конференция «2nd Russian–Hungarian Combinatorial Workshop», Венгрия, 2018.

Публикации

Основные результаты по теме диссертации изложены в 5 работах. Все они опубликованы в журналах, входящих в перечень ВАК, 4 из них — в журналах, индексируемых базой Scopus, 3 — в журналах, индексируемых базой Web of Science. Все результаты, выносимые на защиту, в том числе результаты, опубликованные в совместной работе, были получены автором диссертации самостоятель но.

Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, приводится обзор известных результатов, связанных с задачей Хадвигера — Нельсона о хроматическом числе пространства и задачей Борсука о разбиении множества на части меньшего диаметра.

В **первой главе** диссертации рассматривается величина

$$\overline{\zeta}_k := \varliminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{\overline{\chi}(\mathbb{R}^n, k)}.$$

Ясно, что число $\overline{\zeta}_k$ является верхней оценкой величины ζ_k в оценках вида (11). Мы доказываем следующую теорему:

Теорема 1. *Пусть зафиксированы натуральное число q и положительные действительные числа K и A, причем $q \leqslant A < q+1$. Тогда для любого положительного числа $C < \frac{1}{A}$ найдется такое $B' > 0$, что неравенство*

$$\overline{\chi}(\ell_q^n, k) \geqslant (B'k)^{Cn}$$

будет справедливо при всех натуральных n и всех натуральных $k \leqslant Kn^A$.

В основе доказательства лежит линейно-алгебраический метод в комбинаторике. Мы выбираем натуральное число r и рассматриваем в пространстве ℓ_q^n такое множество векторов V, что координаты любого вектора из V — натуральные числа от 1 до r, то есть $V \subset \{1, \dots, r\}^n \subset \mathbb{R}^n$. Далее, каждому вектору $\boldsymbol{x} \in V$ мы сопоставляем некоторый многочлен $P_{\boldsymbol{x}}$ над полем рациональных чисел таким образом, что для любого независимого множества $U \subset V$ набор многочленов

$$P_{\boldsymbol{x}}, \quad \boldsymbol{x} \in U, \tag{15}$$

окажется линейно независимым. Это позволяет оценить сверху мощность множества U размерностью некоторого пространства многочленов $\mathcal{P}$, содержащего все векторы (15) (в этом и заключается суть линейно-алгебраического метода).

Чтобы избавиться от условия $k \leqslant Kn^A$, мы производим гораздо более грубую оценку при малых размерностях n и получаем другую теорему.

Теорема 2. *Пусть зафиксировано натуральное число q. Тогда для любого положительного числа $C < \dfrac{1}{q+1}$ найдется такая константа $B > 0$, что неравенство*

$$\overline{\chi}(\ell_q^n, k) \geqslant (Bk)^{Cn}$$

будет выполнено для всех натуральных k и n.

Вторая глава посвящена дистанционным графам с большим хроматическим числом без клик фиксированного размера. Мы доказываем следующие две теоремы.

Теорема 3. *Пусть заданы натуральные числа $m \geqslant 3$ и p и положительные действительные числа A, K и C, причем $p \leqslant A < p+1$ и $C < \dfrac{1}{A}\left(1 - \dfrac{2}{m+1}\right)$. Тогда найдется такая константа $B' > 0$, что для любого натурального n и любого $k \leqslant Kn^A$ справедливо неравенство*

$$\overline{\chi}_m(\ell_p^n, k) \geqslant (B'k)^{Cn}. \tag{16}$$

Теорема 4. *Пусть фиксированы натуральное число p, натуральное число $m \geqslant 3$ и положительное действительное число $C < \dfrac{1}{p+1}\left(1 - \dfrac{2}{m+1}\right)$. Тогда найдется константа $B > 0$, при всех натуральных n и k удовлетворяющая неравенству*

$$\overline{\chi}_m(\ell_p^n, k) \geqslant (Bk)^{Cn}. \tag{17}$$

Существование дистанционных графов с большим хроматическим числом без клик фиксированного размера m доказывается с помощью вероятностного метода в комбинаторике. Мы рассматриваем конструкцию, похожую на ту, что была использована в первой главе, и удаляем из графа ребра случайным образом. Разумеется, оставшийся граф по-прежнему будет графом расстояний, и мы доказываем, что с ненулевой вероятностью в нем не будет ни одной клики размера m при всё еще достаточно большом хроматческом числе. В доказательстве используется известная *лемма Ловаса.*

Третья глава посвящена исследованию хроматического числа графов, возникающих при асимптотической оценке числа Борсука.

Пусть $\mathcal{V}(n_-, n_+)$ — множество векторов в евклидовом n-мерном пространстве E^n $(n = n_+ + n_-)$, у которых n_+ координат равны 1 и n_- координат равны -1. Пусть $\mathcal{G}(n_-, n_+; k, r)$ — множество всех таких дистанционных графов с вершинами $\mathcal{V}(n_-, n_+)$, что для каждого из них найдется изоморфный ему граф диаметров в пространстве E^d с вершинами, лежащими на сфере радиуса не более r, причем $d \leqslant \overline{C}_n^{2k} + n$ (здесь $\overline{C}_n^m = C_{n+m-1}^m$ — число сочетаний из n по m с повторениями).

Аналогично, пусть $\mathcal{V}(n_-, n_0, n_+)$ — множество векторов в E^n $(n = n_- + n_0 + n_+)$, у которых n_+ координат равны 1, n_0 координат равны 0 и n_- координат равны -1. В множество $\mathcal{G}(n_-, n_0, n_+; k, r)$ включим каждый дистанционный граф с вершинами $\mathcal{V}(n_-, n_0, n_+)$, который изоморфен какому-нибудь графу диаметров с вершинами на сфере радиуса не более r в пространстве E^d, $d \leqslant \overline{C}_n^{2k} + n$.

Наконец, определим $\chi(n_-, n_+; k, r)$ и $\chi(n_-, n_0, n_+; k, r)$ как максимум хроматических чисел графов, лежащих соответственно в множествах $\mathcal{G}(n_-, n_+; k, r)$ и $\mathcal{G}(n_-, n_0, n_+; k, r)$. Мы доказываем следующе две теоремы.

Теорема 5. *Пусть фиксированы $r \in (1/2, 1/\sqrt{2}]$ и $\nu_+ \in [1/2, 3/4)$. Пусть $n_+(l) + n_-(l) = n(l) = 4l$ и $n_+ \sim \nu_+ n$ при $l \to \infty$. Пусть выбраны натуральное число k, такое, что $r^2 > (2k+1)/(8k)$, и действительное число α, такое, что $0 \leqslant \alpha < 1 - 2\zeta$ и*

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{(1-\zeta^{4k}) + 2(1-\zeta^2)k\alpha^{2k-1}}{1 + 2k\alpha^{2k-1} + (2k-1)\alpha^{2k}} < r^2,$$

где $\zeta := 2\nu_+ - 1$. Тогда

$$\chi(n_-, n_+; k, r) \geqslant \left(\frac{\rho^\rho (1-\rho)^{(1-\rho)}}{{\nu_+}^{\nu_+} (1-\nu_+)^{1-\nu_+}} + o(1) \right)^n,$$

где $\rho := (\alpha + 1)/4$.

Теорема 6. *Пусть фиксированы $r \in (1/2, 1/\sqrt{2}]$, $\nu_+ > 0$ и $\nu_- > 0$, причем $\nu_+ \geqslant \nu_-$ и $\nu_+ + \nu_- \leqslant 1/2$. Пусть $n_+(n) + n_0(n) + n_-(n) = n$, $n_+ \sim \nu_+ n$ и $n_- \sim \nu_- n$ при $n \to \infty$. Пусть выбраны натуральное число k и действительные числа α и ρ таким образом, что $r^2 > (2k+1)/(8k)$, $0 < \alpha \leqslant \min\{2\nu_-, 1/2 - \eta\} + \zeta^2$, $\alpha + \eta - \zeta^2 \leqslant \rho < \min\{\eta + 2\nu_-, 1/2\}$ и*

$$\frac{1}{2} \frac{(\rho-\alpha)^{2k} - (\rho - \alpha - (\eta - \zeta^2))^{2k} + 2k\alpha^{2k-1}(\eta - \zeta^2)}{(\rho-\alpha)^{2k} + 2k\alpha^{2k-1}(\rho - \alpha) + (2k-1)\alpha^{2k}} < r^2,$$

где $\zeta := \nu_+ - \nu_-$ *и* $\eta := \nu_+ + \nu_-$. *Тогда*

$$\chi(n_-, n_0, n_+; k, r) \geqslant \left(\frac{\kappa^\kappa (\rho - 2\kappa)^{\rho - 2\kappa} (1 + \kappa - \rho)^{1+\kappa-\rho}}{\nu_+{}^{\nu_+} \nu_-{}^{\nu_-} (1-\eta)^{1-\eta}} + o(1) \right)^n,$$

где κ *— меньший корень уравнения* $(\rho - 2\kappa)^2 = \kappa(1 - \rho + \kappa)$.

Для обеих теорем приводятся таблицы с наибольшими основаниями экспонент, которые можно получить для некоторых значений параметров r, k, n_-, n_+ и (для теоремы 6) n_0.

Оценка вида $\chi(n_-, n_0, n_+; k, r) \geqslant (C + o(1))^n$ при $n \to \infty$ $(C > 1)$ означает, что для каждого $d \in \mathbb{N}$ найдется конечное множество диаметра 1, расположенное на сфере радиуса не более r в пространстве E^d таким образом, что эти множества не разбиваются на $(C + o(1))^{\sqrt[2k]{(2k)!d}}$ частей меньшего диаметра. В частности, если $f_r(d)$ — наименьшее такое число, что любое подмножество диаметра 1 сферы радиуса r в E^d разбивается на $f_r(d)$ частей меньшего диаметра, то мы имеем асимптотическую оценку

$$f_r(d) \geqslant (C + o(1))^{\sqrt[2k]{(2k)!d}}.$$

Для значений радиуса r около $1/\sqrt{2}$ и $k = 1$ обе теоремы дают оценку вида

$$f_r(d) \geqslant (C + o(1))^{\sqrt{2d}}.$$

В работе проводится сравнение оптимальных значений C, которые можно получить с помощью теоремы 5 и теоремы 6.

В <u>**заключении**</u> приведены основные результаты работы, которые заключаются в следующем:

1. Найдены полные дистанционные графы в n-мерном пространстве с ℓ_p-метрикой с k запрещенными расстояниями, хроматическое число которых оценивается снизу как $(Bk)^{Cn}$, что позволяет оценить рост величины $\overline{\zeta}_k$ при $k \to \infty$.
2. Доказано существование неполных дистанционных графов с большим хроматическим числом, не имеющих клик фиксированного размера, в пространстве ℓ_p^n с несколькими запрещенными расстояниями.
3. Найдены новые контрпримеры к гипотезе Борсука с нелинейным ростом числа Борсука на сферах любого радиуса больше $\frac{1}{2}$.

Также указывается несколько возможных направлений для дальнейшего исследования. Во-первых, интересно было бы найти нетривиальную верхнюю оценку для величины $\overline{\chi}(E^n, k)$. Известная верхняя оценка $(3 + o(1))^{kn}$, упомянутая во введении, асимптотически растет при $n \to \infty$ гораздо быстрее, чем найденная нами нижняя оценка вида $(Bk)^{Cn}$.

Другая интересное задача — получение оценок, аналогичных найденным во второй главе данной работы, для полных дистанционных графов в пространстве ℓ_p^n. Применяемый нами вероятностный метод позволяет строить лишь неполные дистанционные графы.

Третье возможное направление исследований — улучшение существующих оценок для величины $f_r(d)$. В частности, можно попытаться модифицировать линейно-алгебраический метод для получения более эффективных оценок числа Борсука конструкций на основе $(-1, 0, 1)$-векторов.

Публикации автора по теме диссертации

1. *Бердников, А. В.* Оценка хроматического числа евклидова пространства с несколькими запрещенными расстояниями [Текст] / А. В. Бердников // Математические заметки. — 2016. — Т. 99, № 5. — С. 783—787.

2. *Бердников, А. В.* Хроматическое число с несколькими запрещенными расстояниями в пространстве с ℓ_q-метрикой [Текст] / А. В. Бердников // Современная математика и ее приложения. — 2016. — Т. 100. — С. 12—18.

3. *Бердников, А. В.* Хроматические числа графов расстояний с несколькими запрещенными расстояниями без клик заданного размера [Текст] / А. В. Бердников // Проблемы передачи информации. — 2018. — Т. 54, вып. 1. — С. 78—92.

4. *Бердников, А. В.* Оценки чисел борсука по дистанционным графам специального вида [Текст] / А. В. Бердников, А. М. Райгородский // Проблемы передачи информации. — 2021. — Вып. 2. — С. 44—50.

5. *Бердников, А. В.* Числа Борсука множеств специального вида на сферах малого радиуса [Текст] / А. В. Бердников // Труды МФТИ. — 2021. — Т. 13, вып. 3. — С. 29—40.