На правах рукописи

Шакирова Инна Маратовна

ПРИМЕНЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ К РЕШЕНИЮ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА

01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Казань — 2018

Работа выполнена на кафедре дифференциальных уравнений Казанского (Приволжского) федерального университета.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор **Жегалов Валентин Иванович**.

Официальные оппоненты: **Зарубин Александр Николаевич**,
заслуженный деятель науки РФ,
доктор физико-математических наук,
профессор, зав. кафедрой математического анализа
и дифференциальных уравнений
ФГБОУ ВО «Орловский государственный
университет им. И.С. Тургенева».

Плещинская Ирина Евгеньевна,
кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры информатики и прикладной
математики ФГБОУ ВО «Казанский национальный
исследовательский технологический университет».

Ведущая организация: ФГАОУ ВО «Белгородский государственный
национальный исследовательский университет».

Защита состоится «04» октября 2018 г. в 14.30 на заседании диссертационного совета Д 212.081.10 при ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет» по адресу: 420008, Казань, ул. Кремлевская, 35.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке им. Н.И. Лобачевского ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет» по адресу: 420008, Казань ул. Кремлевская, 35.

Автореферат разослан «27» 08 2018 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.081.10
кандидат физ.-мат. наук, доцент Е.К. Липачев

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Отыскание точных решений различных уравнений (алгебраических, дифференциальных, функциональных, интегральных) традиционно считается актуальной проблемой. По этому поводу существует даже определенная справочная литература. Развитие вычислительных методов решения сделало это направление исследований несколько более востребованным: точные решения оказывается возможным использовать для построения и усовершенствования разрабатываемых новых вычислительных схем.

Применяемая в диссертации методика основана на результатах теории уравнений со старшими (доминирующими) частными производными, общий вид которых определяется формулой

$$L(v) \equiv \frac{\partial^k v(x)}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} + \sum_{\substack{|\alpha| \le k-1, \\ \alpha_t \le k_s, t=\overline{1,n}}} a_\alpha(x) \frac{\partial^{|\alpha|} v(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} = f(x), \tag{1}$$

где $(x_1, \dots, x_n)$ – декартовы координаты точки x, $k = k_1 + \dots + k_n$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, k_t, α_s, $s = \overline{1,n}$ – целые неотрицательные числа, $k > 1$, v – искомая, a_α, f – известные функции.

Признаком, выделяющим (1) из множества уравнений с частными производными, является наличие в правой его части первого слагаемого: все прочие производные, входящие в уравнение, получаются из этого слагаемого отбрасыванием по крайней мере одного дифференцирования по какой-либо из независимых переменных.

В случае $m_s = 1$, $s = \overline{1,n}$ принято (1) называть уравнением Бианки. В 1895 г. Бианки и Николетти рассматривали (1) как теоретическое обобщение уравнения $v_{xy} + av_x + bv_y + cv = f$ на случай n независимых переменных. Позже выяснилось, что частные случаи уравнения (1) имеют место, к примеру, при передачи тепла в гетерогенных сферах, математическом моделировании процессов вибрации, в биологических явлениях, распространения волн в диспергирующих средах, обратных задачах и др. Среди упомянутых выше уравнений наиболее известны: уравнение изгиба тонкой сферической оболочки Векуа, уравнения Аллера, описывающее процесс переноса почвенной влаги в зоне аэрации, и Буссинеска-Лява, возникающее при исследовании движения волн в средах с сопротивлением. Важную роль уравнения вида (1) имеют и в теоретических исследованиях: теория отображений, теория аппроксимации, задача интегрального представления преобразования одних линейных дифференциальных операций в другие.

За рубежом уравнениям вида (1) свои работы посвящали: H. Bateman, D. Colton, A.Corduneany, S. Easwaran, M. Hallaire, E. Lahaye, D. Mangeron, Ni Xing-tang, M.N. Oguztoreli, W. Rundell и др.

Внимание к общему уравнению вида (1) при $n = 2$ возникло благодаря задачам теории упругости. Началом исследованиям в данном направлении послужили статьи Николая Ивановича Мусхелишвили в 1919 г. и Ильи Несторовича Векуа в 1937 г. Начиная со второй половины XX века, вопросы, связанные с уравнениями вида (1) при $n > 2$ изучали такие математики, как С.С. Ахиев, Б.А. Бондаренко, О.М. Джохадзе, В.И. Жегалов, А.И. Кожанов, М.П. Котухов, О.А. Кощеева (Тихонова), А.Н. Миронов, Л.Б. Миронова, В.А. Севастьянов, А.П. Солдатов, Е.А. Уткина, М.К. Фаге и др.

Некоторые из перечисленных авторов, а именно Валентин Иванович Жегалов, Алексей Николаевич Миронов и Ольга Александровна Кощеева, в своих работах занимались нахождением возможностей построения в квадратурах решения рассматриваемых задач. Одна из возможностей такого построения связана с известным методом решения задачи Коши, предложенным в свое время Бернхардом Риманом, для уравнения

$$u_{xy} + au_x + bu_y + cu = f$$

и распространенным затем на уравнения типа (1). Важную роль здесь выполняет функция Римана R: в терминах этой функции решения задач Коши и Гурса могут быть записаны в явном виде. В общем случае о функции Римана известно лишь то, что она существует. Жегалову, Миронову и Кощеевой удалось отыскать варианты условий, накладываемые на коэффициенты исходных уравнений, достаточные для построения функции Римана в явном виде, что, в свою очередь, равнозначно возможности решения в квадратурах соответствующих задач.

Наиболее любопытной для автора является статья В.И. Жегалова «Решение уравнений Вольтерра с частными интегралами при помощи дифференциальных уравнений» (Дифференциальные уравнения. – 2008. – Т.44. – № 7. – С. 874–882.), в которой имеют место варианты интегральных уравнений Вольтерра для двух и трех независимых переменных, редуцируемых к задачам типа Гурса. В терминах коэффициентов исходных уравнений получены условия их разрешимости в явном виде, то есть в квадратурах. Содержание этой публикации привело автора представленной диссертации к идее о возможности нахождения новых случаев уравнений Вольтерра, решаемых в квадратурах. Собственно говоря, осуществлением указанной идеи мы и занимались в данной работе.

Считаем, что вышеуказанная связь темы диссертационной работы с интенсивно развивающимся направлением исследований придает ей дополнительную актуальность.

Методы исследования. Используются результаты теории обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнений с частными производными и интегральных уравнений Вольтерра.

Научная новизна. Основные новые результаты диссертации состоят в следующем:

- В случае одной независимой переменной разработана процедура редукции уравнений Вольтерра с вырожденными ядрами к задачам Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений.

- На основе дальнейшего изучения возможностей метода каскадного интегрирования для задачи Гурса в классической постановке к уже известным трем вариантам условий ее разрешимости в квадратурах добавлены четыре новых варианта подобных условий.

- Для уравнений Вольтерра с двумя и тремя независимыми переменными разработаны новые способы их редукции к задачам Гурса и на основе применения к получаемым при этом уравнениям в частных производных методов Римана и факторизации выделены новые наборы условий разрешимости исходных уравнений в квадратурах.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Она содержит результаты, которые могут быть использованы в дальнейших научных исследованиях, а также в образовательном процессе при чтении спецкурсов. Не исключена возможность приложений, связанных с математическим моделированием в указанных выше областях применения теории уравнений с доминирующими частными производными.

Апробация. Результаты диссертации по мере их получения докладывались на итоговых научных конференциях Казанского (Приволжского) федерального университета (2010 — 2013 гг.), на Всероссийских молодежных научных школах-конференциях «Лобачевские чтения» (Казань, 2009 — 2012 гг., 2016 г.), на международных Казанских летних научных школах-конференциях «Теория функций, ее приложения и смежные вопросы» (Казань, 2011 г., 2013 г. и 2015 г.), на Всероссийской научной конференции с международным участием «Дифференциальные уравнения и их приложения» (Стерлитамак, 2011 г. и 2013 г.), на Десятой школе молодых ученых «Нелокальные краевые задачи и проблемы современного анализа и информатики» (Нальчик, 2012 г.), на международной конференции «Дифференциальные уравнения и их приложения» (Белгород, 2013 г.).

Публикации. Основные результаты изложены в 18 работах, список которых приведен в конце автореферата. Из них пять статей ([1]-[5]) опубликованы в изданиях из Перечня ВАК.

Объем и структура работы. Диссертационная работа изложена на 90 страницах машинописного текста и состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы из 106 наименований.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

В первой главе рассматривается уравнение Вольтерра с одной независимой переменной вида:

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} \sum_{k=1}^{n} a_k(x) b_k(t) y(t)\, dt + f(x), \quad x \in [\alpha, \beta], \quad f, a_k, b_k \in C[\alpha, \beta],$$

для которого имеет место теорема о существовании единственного решения. В случае $x = \beta$ это уравнение является фредгольмовым и имеет название «с вырожденным ядром». Оставим это название, в том числе, и для уравнения Вольтерра.

В §1 описана процедура, допускающая выделение для этого уравнения случаев построения его решения в явном виде. Представленный метод основан на 2х преобразованиях **A** и **B**.

Так, преобразование, основанное на дифференцировании исходного уравнения (мы обозначили его как преобразование **A**) позволяет снизить количество слагаемых в сумме в правой части уравнения на единицу. Ясно, что последовательное применение к исходному интегральному уравнению **A** на n-ом шаге преобразует его в задачу Коши вида

$$y^{(n)} = M_{n-1}(x, y, ..., y^{(n-1)}), \quad y(x_0) = f(x_0),$$

$$y^{(s)}(x_0) = M_{s-1}(x, y, ..., y^{(s-1)})|_{x=x_0}, \quad s = \overline{2, n-1},$$

где

$$M_{n-1}(x,y,...,y^{(n-1)}) = a_{n-1,n}\left[\frac{M_{n-2}(x,y,...,y^{(n-2)})}{a_{n-1,n}}\right]' +$$

$$+\frac{a'_{n-1,n}}{a_{n-1,n}}y^{(n-1)} + a_{n-1,n}b_n y,$$

$$a_{n-1,n} = a_{n-2,n-1}\left[\frac{a_{n-2,n}}{a_{n-2,n-1}}\right]'.$$

Преобразование **B**, основанное на замене искомой функции по формуле

$$y_1 = \int_{x_0}^{x} b_1(t)y(t)\,dt,$$

аналогично А позволяет уменьшить количество слагаемых под знаком интеграла в исходном уравнении на единицу. Здесь задача Коши имеет следующий вид:

$$y_n^{(n)} = N_{n-1}(x, y_n, ..., y_n^{(n-1)}), \quad y_n^{(s)}(x_0) = 0, \quad s = \overline{0, n-1},$$

где

$$N_{n-1}(x, y_n, ..., y_n^{(n-1)}) = c_{n-1,n}b_{n-1,n}y_n +$$

$$+b_{n-1,n}\left[N_{n-2,0}(x, y'_n, \ldots, y_n^{(n-1)}) - \sum_{s=0}^{n-2} C_{n-1}^s \left(\frac{1}{b_{n-1,n}}\right)^{(n-1-s)} y_n^{(s+1)}\right],$$

$$N_{n-2,0}(x, y'_n, ..., y_n^{(n-1)}) = N_{n-2}\left[x, \frac{y'_n}{b_{n-1,n}}, (\frac{y'_n}{b_{n-1,n}})', ..., (\frac{y'_n}{b_{n-1,n}})^{(n-2)}\right],$$

$$c_{n-1,n}(x) = b_{n-1}(x)a_n(x), \quad b_{n-1,n}(t) = -\left[\frac{b_n(t)}{b_{n-1}(t)}\right]'.$$

Итогом вышеприведенных рассуждений является лемма 1.1, где сформулированы условия вида

$$1) f, a_k \in C^n[\alpha,\beta], \quad b_k \in C[\alpha,\beta], \quad k = \overline{1,n},$$

$$a_{s,s+1} \neq 0, \quad s = \overline{0, n-1}, \quad a_{0,1} = a_1,$$

$$2) f, a_k \in C[\alpha,\beta], \quad b_k \in C^n[\alpha,\beta], \quad k = \overline{1,n},$$

$$b_{s,s+1} \neq 0, \quad s = \overline{0, n-1}, \quad b_{0,1} = b_1,$$

выполнение которых влечет за собой приведение исходного интегрального уравнения к задаче Коши.

В случае $n > 1$ число задач Коши может быть увеличено благодаря применению комбинаций преобразований **A** и **B**. Таким образом, сформулирована и доказана теорема 1.1, которая гласит, что общее число наборов определенных условий, позволяющих редуцировать уравнение Вольтерра с вырожденным ядром к задаче Коши есть $2^n n!$

В п.3 §1 разобран частный случай $n = 2$: комбинации преобразований **AA**, **AB**, **BA** и **BB**.

Понятно, что решение получаемого после применения преобразований дифференциального уравнения влечет за собой построение решения исходного интегрального уравнения Вольтерра. Для решения дифференциальных уравнений можно воспользоваться известными справочниками. Кроме того, в конце §1 приведены примеры разрешимости получаемых уравнений второго порядка в квадратурах, а в §2 предложен для таких уравнений вариант метода каскадного интегрирования.

Вторая глава носит подготовительный характер к содержанию третьей главы, где исследуются возможности решения в квадратурах уравнений Вольтерра с двумя и тремя независимыми переменными. Будем редуцировать эти уравнения так же к дифференциальным, но уже с частными производными. Роль задачи Коши из предыдущей главы переходит к задаче Гурса.

Как известно, задача Гурса, в ее классической постановке рассматривается в области $T = \{x_0 < x < x_1, \quad y_0 < y < y_1\}$ и состоит в отыскании регулярного решения уравнения $v_{xy} + av_x + bv_y + cv = f$ по условиям

$$v(x_0, y) = \mu(y), \quad v(x, y_0) = \nu(x), \quad \mu(y_0) = \nu(x_0), \quad x \in [x_0, x_1], y \in [y_0, y_1].$$

Для нахождения решения задачи применим метод Римана. Тогда решение будет зависеть от функции Римана R. Таким образом, исходная задача разрешима в квадратурах, если функция Римана может быть записана в явном виде. К началу работы над диссертацией автором были найдены три варианта условий, достаточных для представления R в явном виде. Два из них определялись (соответственно) тождествами

$$h = a_x + ab - c \equiv 0; \quad k = b_y + ab - c \equiv 0.$$

Значения R в данных случаях представляют собой

$$R(x, y; \xi, \eta) = exp\left(\int_\eta^y a(x, \beta)d\beta + \int_\xi^x b(\alpha, \eta)d\alpha\right),$$

$$R(x,y;\xi,\eta) = exp\left(\int\limits_{\xi}^{x} b(\alpha,y)d\alpha + \int\limits_{\eta}^{y} a(\xi,\beta)d\beta\right).$$

Третий вариант определялся двумя тождествами $a_x \equiv b_y, \quad a_x + ab - c \equiv \alpha(x)\beta(y) \neq 0$ с любыми непрерывными функциями α, β. Они просто определяли структуру конструкции, стоящей в левой части. При этом функция Римана R имеет вид:

$$R(x,y,t,\tau) = J_0\left[2\left(\int\limits_{t}^{x} \alpha_1(\xi)d\xi \int\limits_{\tau}^{y} \beta_1(\eta)d\eta\right)^{1/2}\right] *$$

$$* \exp\left(\int\limits_{\tau}^{y} a(t,\eta)d\eta + \int\limits_{t}^{x} b(\xi,y)d\xi\right),$$

где $J_0(\omega)$ есть функция Бесселя первого рода нулевого порядка.

Конструкции h, k связаны с методом каскадного интегрирования, поэтому возникла мысль присмотреться к этому методу на предмет обнаружения дополнительных условий построения функции Римана в явном виде. И действительно, автору совместно с научным руководителем В.И. Жегаловым удалось получить еще четыре условия. Итогом рассуждений является лемма 3.1, в которой выписаны условия для нахождения функции R в квадратурах, и теорема 3.1, где предложены необходимые условия для построения решения задачи Гурса в явном виде (используются результаты леммы 3.1 и дополнительно накладываются условия гладкости на граничные значения).

Таким образом, полученные новые соотношения более чем вдвое увеличивают количество уже известных возможностей решения задачи Гурса в квадратурах.

Следующим шагом было обнаружение подобных условий для трехмерной задачи Гурса, когда в области $D = \{x_0 < x < x_1, \quad y_0 < y < y_1, \quad z_0 < z < z_1\}$ необходимо найти решение уравнения

$$v_{xyz} + av_{xy} + bv_{yz} + cv_{xz} + dv_x + ev_y + fv_z + gv = \Phi$$

по следующим условиям

$$v(x_0,y,z) = \psi_1(y,z), \quad v(x,y_0,z) = \psi_2(x,z), \quad v(x,y,z_0) = \psi_3(x,y);$$

$$\psi_2(x,z_0) = \psi_3(x,y_0), \quad \psi_1(y,z_0) = \psi_2(x_0,y), \quad \psi_1(y_0,z) = \psi_3(x_0,z).$$

Итогом явился §4, в котором в терминах соотношений

$$h_1 = a_x + ab - e, \quad h_2 = a_y + ac - d, \quad h_3 = b_y + bc - f,$$

$$h_4 = b_z + ab - e, \quad h_5 = c_x + bc - f, \quad h_6 = c_z + ac - d,$$

$$h_7 = d_x + bd - g, \quad h_8 = e_y + ce - g, \quad h_9 = f_z + af - g,$$

$$k_1 = b_{yz} + ab_y + cb_z + bd - g,$$

$$k_2 = c_{xz} + ac_x + bc_z + ce - g,$$

$$k_3 = a_{xy} + ca_x + ba_y + af - g.$$

выписаны условия, позволяющие факторизовать левую часть исходного уравнения операторами первого порядка, а также комбинациями операторов первого и второго порядка.

В первом случае функция Римана известна. Во втором же случае мы получили две последовательно решаемые задачи: первая из которых – задача Коши для уравнения первого порядка, а вторая – задача Гурса на плоскости.

Все только что перечисленное создало в **третьей главе** основу для развития результатов первой главы с целью их распространения на плоскость и в трехмерное пространство.

В §5 предметом исследования стали два варианта уравнений:

$$v(x,y) + a_1(x,y)\int\limits_{x_0}^{x} b_1(\xi,y)v(\xi,y)d\xi + a_2(x,y)\int\limits_{y_0}^{y} b_2(x,\eta)v(x,\eta)d\eta = F(x,y),$$

и

$$\alpha(x,y)v(x,y) + \beta(x,y)\Bigg[\int\limits_{x_0}^{x} A(\xi,y)v(\xi,y)d\xi + \int\limits_{y_0}^{y} B(x,\eta)v(x,\eta)d\eta +$$

$$+\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{y_0}^{y} C(\xi,\eta)v(\xi,\eta)d\xi d\eta\Bigg] = F(x,y),$$

рассматриваемых в области $T = \{x_0 < x < x_1, \quad y_0 < y < y_1\}$.

К первому из них мы применили преобразования типа **AB**, описанные в первой главе. Итогом стали две различные задачи Гурса:

$$z_{xy} + A_1 z_x + B_1 z_y + C_1 z = F_1,$$

где

$$A_1 = a_2 b_2, \quad B_1 = a_1 b_1 - [\ln(a_1 b_2)]_x, \quad C_1 = b_2[a_{2_x} - a_2(\ln a_1)_x],$$
$$F_1 = b_2[F_x - F(\ln a_1)_x].$$
$$z(x, y_0) = 0,$$
$$z(x_0, y) = a_2(x_0, y) \int\limits_{y_0}^{y} \left[\frac{F(x_0, \eta)}{a_2(x_0, \eta)}\right]_\eta \exp\left(\int\limits_{y}^{\eta} a_2(x_0, \eta_1) b_2(x_0, \eta_1) d\eta_1\right) d\eta$$

и

$$u_{xy} + A_2 u_x + B_2 u_y + C_2 u = F_2,$$
$$A_2 = a_2 b_2 - [\ln(a_2 b_1)]_y, \quad B_2 = a_1 b_1, \quad C_2 = b_1[a_{1y} - a_1(\ln a_2)_y],$$
$$F_2 = b_1[F_y - F(\ln a_2)_y]$$

с граничными условиями

$$u(x_0, y) = 0,$$
$$u(x, y_0) = a_1(x, y_0) \int\limits_{x_0}^{x} \left[\frac{F(\xi, y_0)}{a_1(\xi, y_0)}\right]_\xi \exp\left(\int\limits_{x}^{\xi} a_1(\xi_1, y_0) b_1(\xi_1, y_0) d\xi_1\right) d\xi.$$

Применяя к полученным задачам доказанную во второй главе теорему 3.1, получаем условия разрешимости исходного уравнения в квадратурах.

Ко второму уравнению были применены преобразования типа **AA**, что привело к задаче Гурса:

$$v_{xy} + M v_x + N v_y + P v = Q,$$

где

$$M = B\frac{\beta}{\alpha} + \left(\ln\frac{\alpha}{\beta}\right)_y, \quad N = A\frac{\beta}{\alpha} + \left(\ln\frac{\alpha}{\beta}\right)_x, \quad P = \frac{\beta}{\alpha}\left[A_y + B_x + C + \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_{xy}\right],$$
$$Q = \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{F}{\beta}\right)_{xy}$$

с граничными условиями

$$v(x_0, y) = \frac{\beta(x_0, y)}{\alpha(x_0, y)} \int\limits_{y_0}^{y} \left(\frac{F}{\beta}\right)_\eta \exp\left(\int\limits_{y}^{\eta} \frac{B(x_0, \eta_1)\beta(x_0, \eta_1)}{\alpha(x_0, \eta_1)} d\eta_1\right) d\eta,$$

$$v(x,y_0)=\frac{\beta(x,y_0)}{\alpha(x,y_0)}\int\limits_{x_0}^{x}\left(\frac{F}{\beta}\right)_\xi \exp\left(\int\limits_{x}^{\xi}\frac{A(\xi_1,y_0)\beta(\xi_1,y_0)}{\alpha(\xi_1,y_0)}d\xi_1\right)d\xi.$$

Для обоих уравнений приведенные выше рассуждения справедливы при условии $a_1(x,y)b_1(x,y)a_2(x,y)b_2(x,y)\neq 0$.

В третьем пункте разобраны примеры, показывающие, что сформулированные условия разрешимости могут иметь место.

Четвертый пункт посвящен случаю уравнения:

$$v(x,y)+a_1(x,y)\int\limits_{x_0}^{x}b_1(\xi,y)v(\xi,y)d\xi+$$

$$+a_2(x,y)\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{y_0}^{y}b_2(\xi,\eta)v(\xi,\eta)d\xi d\eta=f(x,y),$$

$$a_1(x,y)b_1(x,y)a_2(x,y)b_2(x,y)\neq 0,$$

которое после дважды проведенной операции дифференцирования и замены искомой функции преобразовалось в задачу Гурса:

$$u_{xxy}+Au_{xx}+Bu_{xy}+Cu_x+Du_y+Eu=F,$$

$$u(x,y_0)=\vartheta(x),\quad u(x_0,y)=0,\quad u_x(x_0,y)=b_1(x_0,y)f(x_0,y).$$

В монографии В.И. Жегалова и А.Н. Миронова «Дифференциальные уравнения со старшими частными производными» (Казанское математическое об-во, 2001. – 226 с.) был предложен способ выявления случаев разрешимости, основанный на факторизации оператора в левой части уравнения. А именно, при выполнении определенных тождеств, уравнение можно записать как

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+A\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+A_1\frac{\partial u}{\partial x}+B_1\frac{\partial u}{\partial y}+C_1 u\right)=F,$$

где

$$A_1=A=-\lambda_y,\quad B_1=B-A=a_1b_1-\lambda_x+\lambda_y,$$

$$C_1=C-A_x-A^2=a_2b_2+b_1[a_{1y}-a_1(\ln a_2)_y]+\lambda_y\lambda_x-\lambda_y^2.$$

Таким образом, задача Гурса распадается на две последовательно решаемые задачи:

$$z_x+Az=F,\quad z(x_0,y)=[b_1(x_0,y)f(x_0,y)]_y+A(x_0,y)b(x_0,y)f(x_0,y)$$

и

$$w_{xy}+A_1w_x+B_1w_y+C_1w=z,\quad w(x_0,y)=0,\quad w(x,y_0)=\vartheta(x).$$

Способ решение первой задачи Коши известен. Тогда как решений второй задачи может быть записано через функцию Римана, условия построения которой описаны в §2. Итогом вышеописанных рассуждений является теорема 5.3, содержащая условия построения интегрального уравнения второго порядка в явном виде, то есть в квадратурах.

Подобным образом может быть разобран случай, в котором переменные (x,y) поменялись ролями:

$$v(x,y)+a_3(x,y)\int\limits_{y_0}^{y}b_3(x,\eta)v(x,\eta)d\eta+$$

$$+a_2(x,y)\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{y_0}^{y}b_2(\xi,\eta)v(\xi,\eta)d\xi d\eta=f(x,y).$$

Заключительный §6 посвящен трехмерному уравнению в области $D=\{x_0<x<x_1,\quad y_0<y<y_1,\quad z_0<z<z_1\}$:

$$v(x,y,z)+\int\limits_{x_0}^{x}A(\xi,y,z)v(\xi,y,z)d\xi+\int\limits_{y_0}^{y}B(x,\eta,z)v(x,\eta,z)d\eta+$$

$$+\int\limits_{z_0}^{z}C(x,y,\zeta)v(x,y,\zeta)d\zeta+\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{y_0}^{y}D(\xi,\eta,z)v(\xi,\eta,z)d\eta d\xi+$$

$$+\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{z_0}^{z}E(\xi,y,\zeta)v(\xi,y,\zeta)d\zeta d\xi+\int\limits_{y_0}^{y}\int\limits_{z_0}^{z}F(x,\eta,\zeta)v(x,\eta,\zeta)d\zeta d\eta+$$

$$+\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{y_0}^{y}\int\limits_{z_0}^{z}G(\xi,\eta,\zeta)d\zeta d\eta d\xi=\Phi(x,y,z),$$

где на коэффициенты интегрального уравнения накладываются определенные условия гадкости.

Здесь, применяя оператор $\dfrac{\partial^3}{\partial x\partial y\partial z}$, мы получили задачу Гурса

$$v_{xyz}+av_{xy}+bv_{yz}+cv_{xz}+dv_x+ev_y+fv_z+gv=\Phi_{xyz},$$

с граничными условиями $v(x_0, y, z) = \psi_1(y, z)$, $v(x, y_0, z) = \psi_2(x, z)$, $v(x, y, z_0) = \psi_3(x, y)$, удовлетворяющими соотношениям:

$$\psi_1(y,z) + \int_{y_0}^{y} B(x_0,\eta,z)\psi_1(\eta,z)d\eta + \int_{z_0}^{z} C(x_0,y,\zeta)\psi_1(y,\zeta)d\zeta +$$

$$+ \int_{y_0}^{y}\int_{z_0}^{z} F(x_0,\eta,\zeta)\psi_1(\eta,\zeta)d\zeta d\eta = \Phi(x_0,y,z),$$

$$\psi_2(x,z) + \int_{x_0}^{x} A(\xi,y_0,z)\psi_2(\xi,z)d\xi + \int_{z_0}^{z} C(x,y_0,\zeta)\psi_2(x,\zeta)d\zeta +$$

$$+ \int_{x_0}^{x}\int_{z_0}^{z} E(\xi,y_0,\zeta)\psi_2(\xi,\zeta)d\zeta d\xi = \Phi(x,y_0,z),$$

$$\psi_3(x,y) + \int_{x_0}^{x} A(\xi,y,z_0)\psi_3(\xi,y)d\xi + \int_{y_0}^{y} B(x,\eta,z_0)\psi_3(x,\eta)d\eta +$$

$$+ \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} D(\xi,\eta,z_0)\psi_3(\xi,\eta)d\eta d\xi = \Phi(x,y,z_0).$$

Полученные соотношения для граничных условий задачи Гурса представляют собой интегральные уравнения Вольтерра второго порядка, для которых в п.1 выписаны, основываясь на результатах §3, условия, обеспечивающие их разрешимость в квадратурах.

Во втором пункте доказана теорема 6.1, в которой сформулированы условия разрешимости исходного уравнения в явном виде.

Еще один способ нахождения условий разрешимости, описанный в п.3 – это факторизация операторами первого и второго порядка в терминах конструкций h_s, k_t, $s = \overline{1,9}, t = \overline{1,3}$.

Итогом §6 является теорема 6.2, которая гласит, что условием разрешимости интегрального уравнения третьего порядка является выполнение определенных шести тождеств, в каждом из которых по три соотношения, записанные через коэффициенты исходного интегрального уравнения. Причем достаточно, чтобы в одном наборе имели место все три тождества, а в остальных пяти наборах выполнялись бы только два первых из них.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи в изданиях, рекомендованных ВАК РФ для публикации основных результатов исследования

[1] Жегалов, В.И. *Об одном подходе к решению интегральных уравнений Вольтерра с вырожденными ядрами* / В.И. Жегалов, И.М. Сарварова // Изв. вузов. Математика. – 2011. – №7. – С. 28–36. В англ. версии *One approach to the solution of Volterra integral equations with degenerate kernels* // Russian Mathematics. – 2011. Vol. 55. – №7. – P. 23–29.

[2] Жегалов, В.И. *К условиям разрешимости задачи Гурса в квадратурах* / В.И. Жегалов, И.М. Сарварова // Изв. вузов. Математика. – 2013. – №3. – С. 68–73. В англ. версии *Solvability of the Goursat problem in quadratures* // Russian Mathematics. – 2013. Vol. 57. – №3. – P. 56–59.

[3] Шакирова, И.М. *Условия разрешимости в квадратурах двух уравнений типа Вольтерра* / И.М. Шакирова. // Учен. зап. Казан. ун-та. Серия Физ.-матем. науки – 2013. – Т. 155. – №4. – С. 90–98.

[4] Шакирова, И.М. *К случаям разрешимости одного интегрального уравнения в квадратурах* / И.М. Шакирова. // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 2014. – №3 (36). – С. 57–63

[5] Шакирова, И.М. *О вариантах разрешимости в квадратурах одного уравнения Вольтерра в трехмерном пространстве* / И.М. Шакирова. // Учен. зап. Казан. ун-та. Серия Физ.-матем. науки – 2016. – Т. 158. – №4. – С. 557–569.

Прочие публикации

[6] Жегалов, В.И. *Об уравнениях Вольтерра с вырожденными ядрами* / В.И. Жегалов, И.М. Сарварова // Труды Матем. центра им. Н. И. Лобачевского: Материалы Восьмой молодежной научной школы-конференции «Лобачевские чтения - 2009». – №39. – С. 213–216.

[7] Сарварова, И.М. *Метод исключения для одной системы уравнений Вольтерра* / И.М. Сарварова // Труды Матем. центра им. Н. И. Лобачевского: Материалы Девятой молодежной научной школы-конференции «Лобачевские чтения - 2010». – Т. 40. – С. 289–291.

[8] Сарварова, И.М. *Аналог метода каскадного интегрирования для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка* / И.М. Сарварова // Труды Матем. центра им. Н. И. Лобачевского: Материалы Десятой

молодежной научной школы-конференции «Лобачевские чтения - 2011». – Т. 44. – С. 261–263.

[9] Сарварова, И.М. *Редукция одной системы уравнений Вольтерра к дифференциальным уравнениям* / И.М. Сарварова // Тр. Всероссийской научной Конференции с международным участием «Дифференциальные уравнения и их приложении». Стерлитамак, 27-30 июня 2011г. – С. 81–83.

[10] Сарварова, И.М. *Система уравнений Вольтерра с вырожденными ядрами* / И.М. Сарварова // Труды Матем. центра им. Н. И. Лобачевского: Материалы Десятой международной Казанской летней научной школы-конференции «Теория функций, ее приложения и смежные вопросы». – 2011. – Т. 43. – С. 318–320.

[11] Жегалов, В.И. *О случаях решения задачи Гурса в явном виде* / В.И. Жегалов, И.М. Сарварова // Труды Матем. центра им. Н. И. Лобачевского: Материалы Десятой молодежной научной школы-конференции «Лобачевские чтения - 2012». – №45. – С. 58–60.

[12] Сарварова, И.М. *Условия разрешимости одного уравнения Вольтерра в явном виде* / И.М. Сарварова // Материалы X Школы молодых ученых «Нелокальные краевые задачи и проблемы современного анализа и информатики». Нальчик: Издательство КБНЦ РАН. – 2012. – С. 92–94.

[13] Сарварова, И.М. *Варианты условий разрешимости одного интегрального уравнения в квадратурах* / И.М. Сарварова // Международная научная конференция «Дифференциальные уравнения и смежные проблемы». Стерлитамак 26 - 30 июня 2013г. – С. 264–267.

[14] Сарварова, И.М. *Достаточные условия разрешимости одного уравнения Вольтерра в квадратурах* / И.М. Сарварова // Международная конференция «Дифференциальные уравнения и их приложения». Белгород: ИПК НИУ "БелГУ". – 2013. – С. 170–171.

[15] Сарварова, И.М. *О разрешимости одного интегрального уравнения в явном виде* / И.М. Сарварова // Труды Матем. центра им. Н. И. Лобачевского: Материалы Одиннадцатой международной Казанской летней научной школы-конференции «Теория функций, ее приложения и смежные вопросы». Казан. матем. об-во. – 2013. – Т. 46. – С. 402–405.

[16] Шакирова, И.М. *О разрешимости трехмерной задачи Гурса в квадратурах* / И.М. Шакирова. // Тез. докл. Международной научной конференции «Дифференциальные уравнения и математическое моделирование».– Улан-Удэ: Изд-во ВСГТУ, 2015. – С. 113–114.

[17] Шакирова, И.М. *К условиям разрешимости трехмерной задачи Гурса в квадратурах* / И.М. Шакирова. // Тр. матем. центра им Н.И. Лобачевского: Материалы Двенадцатой международной Казанской летней научной школы-конференции «Теория функций, ее приложения и смежные вопросы». – 2015. – Т.51. – С. 476–478.

[18] Шакирова, И.М. *О случаях разрешимости в квадратурах одного уравнения Вольтерра* / И.М. Шакирова. // Труды Матем. центра им. Н. И. Лобачевского: Материалы Пятнадцатой молодежной научной школы-конференции «Лобачевские чтения - 2016». – 2016. – Т.53. – С. 164–167.

В заключение автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю Жегалову Валентину Ивановичу за постановку задач, за ценные советы, критические замечания и постоянное внимание к работе.

16

Подписано в печать ___.___.____ г.
Формат 60 × 84 1/16. Усл. печ. л. 1,0. Тираж 75 экз. Заказ _____.

Типография «Стрижи»
ИП Мунин Алексей Сергеевич
423827, г. Набережные Челны, пр-т Московский, 140