На правах рукописи

Савицкий Игорь Владимирович

СЛОЖНОСТЬ ВЫЧИСЛЕНИЙ НА РЕГИСТРОВЫХ МАШИНАХ СО СЧЁТЧИКАМИ

01.01.09 — дискретная математика
и математическая кибернетика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Казань — 2021

Работа выполнена на кафедре математической кибернетики ФГБОУ ВО «Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова»

Научный руководитель: **Марченков Сергей Серафимович**
доктор физико-математических наук, профессор кафедры математической кибернетики ФГБОУ ВО «Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова»

Официальные оппоненты: **Вьюгин Владимир Вячеславович**
доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник лаборатории № 1 им. М. С. Пинскера ФГБУН Института проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН

Ямалеев Марс Мансурович
кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник НОМЦ Приволжского федерального округа ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет»

Ведущая организация: ФГБОУ ВО «Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова»

Защита диссертации состоится 25 ноября 2021 г. в 14:30 на заседании диссертационного совета КФУ.01.04 № 01-03/803 на базе ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет» по адресу: 420008, Казань, ул. Кремлевская, 35.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке им. Н.И. Лобачевского ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет» по адресу: 420008, Казань, ул. Кремлевская, 35 и на сайте: https://kpfu.ru/validation/sobstvennye-sovety-kfu/obyavleniya-o-zaschitah-dissertacij

Автореферат разослан ________ 2021 г.

Учёный секретарь диссертационного совета
КФУ.01.04 № 01-03/803,
к.ф.-м.н., доцент Еникеев Арслан Ильясович

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследований. Начало современной теории алгоритмов положено в середине 1930-х годов опубликованием нескольких формализаций понятия алгоритма. Одно из них принадлежит А. Тьюрингу[1] и использует понятие машины — абстрактного вычислительного устройства, действия которого в целом напоминают действия реального вычислителя. Впоследствии было предложено много различных моделей машин, реализующих разные принципы работы с данными. Каждая машина при тех или иных ограничениях на сложность вычислений (время и объём памяти) задаёт различные классы функций, которые можно вычислить с её помощью.

Другой распространённый способ задания классов функций использует аппарат функциональных систем: класс определяется как множество всех функций, которые можно получить из небольшого набора исходных функций при помощи некоторого набора операций. Такое описание класса называется алгебраическим. В качестве операций обычно используются операция суперпозиции (подстановка функции на место переменной другой функции) и различные виды рекурсии.

Алгебраически заданным является класс частично рекурсивных функций[2]. Среди более узких алгебраически заданных классов наиболее известными являются классы $\mathcal{E}^n$ иерархии Гжегорчика[3], задаваемые с помощью операций суперпозиции и ограниченной примитивной рекурсии. Позднее определение этих классов было обобщено А. П. Бельтюковым[4].

Особый интерес представляет алгебраическое задание классов, использующее только операцию суперпозиции. Набор исходных функций при таком задании называется базисом класса по суперпозиции. При этом часто ставится целью максимально упростить функции в базисе. Так, в классе $\mathcal{E}^3$ построен

[1] Turing A. M. On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem // Proceedings of the London Mathematical Society, Ser. 2. 1937. Vol. 42, no. 1. P. 230–265.

[2] Kleene S. C. General recursive functions of natural numbers // Mathematische Annalen. 1936. Vol. 112, no. 1. P. 727–742.

[3] Grzegorczyk A. Some classes of recursive functions // Rozprawy Matematyzne. Vol. 4. Warzawa, 1953. Русск. пер.: Гжегорчик А. Некоторые классы рекурсивных функций // Проблемы математической логики: сложность алгоритмов и классы вычислимых функций. М.: Мир, 1970. С. 9–49.

[4] Бельтюков А. П. Машинное описание и иерархия начальных классов Гжегорчика // Записки научных семинаров ЛОМИ АН СССР. 1979. Т. 88. С. 30–46.

базис, состоящий только из простых арифметических функций[5].

Один из способов получения базисов по суперпозиции — это арифметизация абстрактных вычислительных устройств. Этот способ был использован С. С. Марченковым[6] для получения базиса в классе $\mathcal{E}^2$. Чуть позже метод был обобщён на другие классы А. А. Мучником[7]. Сложность функций в таких базисах зависит от конструкции арифметизируемой машины.

Для задания малых классов функций и проведения арифметизации удобно использовать машины со счётчиками, которые работают с числами, хранимыми в конечном наборе ячеек памяти (счётчиков). Типичным примером абстрактного вычислительного устройства на основе счётчиков являются машины Минского[8], допускающие независимое увеличение и уменьшение (на единицу) значений любых счётчиков, а также сравнение счётчиков с нулём. Путём арифметизации машин Минского С. А. Волков[9] получил сравнительно простой базис в классе $\mathcal{E}^2$.

Другим видом машин со счётчиками являются стековые регистровые машины (SRM), введённые А. П. Бельтюковым[10]. Эти машины могут только увеличивать содержимое счётчиков на единицу, при этом содержимое всех «младших» счётчиков становится равным нулю. Они также имеют рабочий регистр, в который могут записывать значение любого счётчика, и могут сравнивать счётчики друг с другом. SRM позволяют получить машинное описание класса $\mathcal{E}^1$ и доказать отсутствие базиса в классе одноместных функций из $\mathcal{E}^0$.

В 2010 году профессор С. С. Марченков предложил новый тип абстрактных вычислительных устройств — регистровые машины со счётчиками (RC-

---

[5] Марченков С. С. Суперпозиции элементарных арифметических функций // Дискретный анализ и исследование операций. 2006. Т. 13, № 4. С. 33–48.
Mazzanti S. Plain Bases for Classes of Primitive Recursive Functions // Mathematical Logic Quarterly. 2002. Vol. 48, no. 1. P. 93–104.

[6] Марченков С. С. Устранение схем рекурсий в классе $\mathcal{E}^2$ Гжегорчика // Математические заметки. 1969. Т. 5, № 5. С. 561–568.

[7] Мучник А. А. О двух подходах к классификации рекурсивных функций // Проблемы математической логики: сложность алгоритмов и классы вычислимых функций. М.: Мир, 1970. С. 123–138.

[8] Минский М. Л. Вычисления и автоматы. М.: Мир, 1971. 368 с.
Пер. по изд.: Minsky M. L. Computation: finite and infinite machines. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1967. 334 p.

[9] Волков С. А. Пример простой квазиуниверсальной функции в классе $\mathcal{E}^2$ иерархии Гжегорчика // Дискретная математика. 2006. Т. 18, № 4. С. 31–44.

[10] Бельтюков А. П. Машинное описание и иерархия начальных классов Гжегорчика // Записки научных семинаров ЛОМИ АН СССР. 1979. Т. 88. С. 30–46.

машины). От других типов устройств эти машины отличаются двумя особенностями. Во-первых, RC-машины не имеют полноценной внутренней памяти (состояний). Во-вторых, внешняя память RC-машин организована таким образом, что в процессе вычисления она изменяется «почти независимо» от программы RC-машины.

Внешняя память RC-машины состоит из рабочего регистра и произвольного количества счётчиков. Счётчики RC-машины изменяются независимо от программы, представляя собой цифры номера текущего такта в позиционной системе счисления с достаточно большим значением основания. RC-машина может сравнивать счётчики и рабочий регистр друг с другом (а также с неизменяемыми регистрами, хранящими входные значения), различая, какое из значений больше. Кроме того, машина может заносить значение любого регистра или счётчика в рабочий регистр. У RC-машины может быть конечная внутренняя память (несколько программ), но если машина вышла из некоторого состояния (программы), вернуться в него она уже не сможет, поэтому использование этой памяти очень ограничено.

Чтобы вычисление на RC-машине было возможным, ей, помимо обычных входных значений, требуется подать на вход значение ёмкости счётчиков — число, ограничивающее сверху значение каждого счётчика. Это значение обычно выбирается как функция от входов и является естественной мерой памяти, требуемой для вычисления. При этом для любых достаточно больших значений ёмкости машина должна выдавать один и тот же результат.

«Автономность» внешней памяти делает привычные приёмы программирования неприменимыми для RC-машин. Обычно вычисление представляет собой последовательность «активных» операций машины с данными. Вычисление RC-машины проходит иначе: машина ждёт, пока в счётчики сами собой не попадут нужные значения; она лишь «отлавливает» определённые моменты и сохраняет значение какого-либо счётчика в рабочем регистре.

Помимо необычного способа работы с данными, в RC-машинах представляет интерес возможность их арифметизации. При арифметизации большинства машин требуется определённым образом кодировать текущее состояние памяти (конфигурацию) машины и нужны громоздкие функции для работы с конфигурациями. В случае RC-машин имеется только одна ячейка памяти, которую может менять машина, все остальные же определяются по номеру текущего такта и фиксированным извне данным. Поэтому конфигурацию RC-машины не требуется специальным образом кодировать.

Цель исследований:

1. Описать сложностные классы функций, строго вычислимых RC-машинами.

2. Определить сложность некоторых алгоритмических проблем, формулируемых для RC-машин.

3. Исследовать различные вычислительные устройства, которые можно получить с помощью модификации RC-машин.

4. Применить результаты о вычислениях на RC-машинах для построения простых базисов по суперпозиции в «малых» классах рекурсивных функций.

Методы исследований. В диссертационной работе используются методы теории алгоритмов, в частности методы моделирования и арифметизации вычислений.

Научная новизна. Все основные результаты диссертации являются новыми.

Основные результаты. Автору лично принадлежат следующие основные результаты:

1. Построены RC-машины для вычисления простых арифметических функций $x + y$, $x \dot{-} y$, xy, $\lfloor x/y \rfloor$.

2. Доказана универсальность RC-машин. Описаны связанные с ними сложностные классы функций.

3. Описан класс функций, задаваемых RC-машинами без ограничений на выбор ёмкости счётчиков (с учётом, что в качестве ёмкости может быть выбрана невычислимая функция).

4. В терминах иерархии Клини-Мостовского определена сложность ряда алгоритмических проблем, связанных с RC-машинами.

5. Исследованы некоторые модификации RC-машин в сторону упрощения конструкции. Доказано, что эти модификации не сужают вычислительные возможности RC-машин.

6. С помощью арифметизации RC-машин получены новые базисы по суперпозиции в классах $\mathcal{E}^2$ и $\mathcal{F}_{\mathrm{PSPACE}}$.

В диссертацию включены совместные результаты, полученные в соавторстве:

7. Вычисления RC-машин промоделированы на счётчиковых машинах с сумматором (CS-машинах). Доказана универсальность CS-машин, описаны связанные с ними сложностные классы.

Конфликт интересов с соавтором отсутствует.

Теоретическая и практическая ценность. Полученные в диссертации результаты имеют теоретическое значение и могут найти применение в теории рекурсивных функций, в том числе при построении машинных и алгебраических описаний классов функций.

Апробация работы. Результаты диссертации излагались на конференции «Алгебра и теория алгоритмов» (Иваново, 2018 г.), XIII Международном семинаре «Дискретная математика и ее приложения» (Москва, 2019 г.), конференции «Ломоносовские чтения» (Москва, 2016 г.) и конференции «Тихоновские чтения» (Москва, 2017 г.), а также на объединенном заседании семинара кафедры алгебры и математической логики и семинара «Теория вычислимости» Казанского федерального университета (Казань, 2021 г.) и на научно-исследовательском семинаре «Математические вопросы кибернетики» (Москва, 2021 г.)

Публикации. По теме диссертации опубликовано 11 научных работ, отражающих основное содержание диссертации, из них 5 статей в рецензируемых изданиях, рекомендованных ВАК РФ и входящих в международные базы данных (в том числе, 2 статьи в журналах, включённых в базы данных SCOPUS и Web of Science).

Структура и объём работы. Диссертация изложена на 144 страницах и состоит из введения, четырёх глав, заключения и списка литературы, содержащего 49 наименований, включая работы диссертанта.

Содержание работы

Во **введении** даётся обоснование актуальности темы исследований и краткая характеристика работы, вводятся основные понятия и приводится обзор результатов. Выпишем некоторые из основных определений.

Положим $\mathbb{N}_0 = \{0,\, 1,\, 2,\, \ldots\}$. Считаем, что операция суперпозиции включает в себя отождествление и перестановку переменных, подстановку функции на место переменной другой функции, введение и удаление фиктивных переменных.

Функция $f(\bar{x}, y)$ получается из функций $g(\bar{x})$, $h(\bar{x}, y, z)$, $j(\bar{x}, y)$ с помощью операции ограниченной примитивной рекурсии, если для любого $\bar{x} \in \mathbb{N}_0^n$ и любого $y \in \mathbb{N}_0$ выполняются соотношения

$$\begin{cases} f(\bar{x},\, 0) = g(\bar{x}), \\ f(\bar{x},\, y+1) = h(\bar{x},\, y,\, f(\bar{x}, y)), \\ f(\bar{x},\, y) \leqslant j(\bar{x},\, y). \end{cases}$$

Класс функций $\mathcal{C}$ называется замыканием системы функций S относительно набора операций $\mathcal{O}$, если $\mathcal{C}$ содержит те и только те функции, которые можно получить из функций системы S с помощью последовательного применения операций из $\mathcal{O}$.

Система функций S называется базисом по суперпозиции в классе функций $\mathcal{C}$, если $\mathcal{C}$ является замыканием системы S относительно суперпозиции.

Класс $\mathcal{E}^0$ иерархии Гжегорчика — это замыкание системы 0, $x+1$ относительно операций суперпозиции и ограниченной примитивной рекурсии.

Класс $\mathcal{E}^1$ иерархии Гжегорчика — это замыкание системы 0, $x+1$, $x+y$ относительно операций суперпозиции и ограниченной примитивной рекурсии.

Класс $\mathcal{E}^2$ иерархии Гжегорчика — это замыкание системы 0, $x+1$, $x \cdot y$ относительно операций суперпозиции и ограниченной примитивной рекурсии.

Класс $\mathcal{E}^3$ иерархии Гжегорчика — это замыкание системы 0, $x+1$, x^y относительно операций суперпозиции и ограниченной примитивной рекурсии.

Регистровая машина со счётчиками (RC-машина) состоит из входных регистров $x_1, \ldots, x_n$, счётчиков $t_1, \ldots, t_m$, рабочего регистра r, нулевого регистра 0 и набора программ $P_1, \ldots, P_s$. Каждый регистр и счётчик, за исключением регистра 0, может содержать любое число из $\mathbb{N}_0$. Каждая программа есть отображение вида

$$\{=, <, >\}^l \to \{x_1, \ldots, x_n, t_1, \ldots, t_m, r, 0;\ P_1, P_2, \ldots, P_s\},$$

где $l = \binom{m+n+2}{2}$.

Пусть $x_1, \ldots, x_n, t \in \mathbb{N}_0$. При $t \geqslant 1$ вычисление RC-машины $\mathcal{M}$ на входе $\bar{x}$ со значением ёмкости счётчиков t производится следующим образом. Входные регистры постоянно содержат значения входа, а нулевой регистр — число 0. В начальный момент активна программа P_1, а счётчики и регистр r содержат 0. На каждом такте активная программа имеет возможность сравнить текущие значения всех регистров и счётчиков, и в зависимости от полученных соотношений $=, <, >$ она детерминированно выбирает регистр или счётчик, значение которого заносится в r (в этом случае активная программа не меняется) или программу, которая будет активирована вместо текущей (в этом случае значение в r сохраняется). Затем счётчики меняются по принципу прибавления единицы к числу

$$t_1 + t_2 \cdot t + \ldots + t_{m-1} \cdot t^{m-2} + t_m \cdot t^{m-1}$$

в позиционной системе счисления с основанием t, после чего происходит переход к следующему такту. Если $t = 1$, то изменения счётчиков не происходит и машина завершает работу после первого такта. Иначе вычисление заканчивается через t^m тактов, когда очередное изменение счётчиков по указанному правилу станет невозможным. Результат вычисления в момент окончания работы содержится в r, обозначим его $\mathcal{M}(\bar{x};\ t)$. Считаем, что $\mathcal{M}(\bar{x};\ 0) = 0$.

Любая RC-машина подчиняется *ограничению на переходы*: если в процессе вычисления RC-машина изменила активную программу, то она уже не сможет вернуться к предыдущей до конца вычисления.

Пусть $T(\bar{x})$ — частичная функция. Частичная функция $f(\bar{x})$ *вычислима на* RC-*машине* $\mathcal{M}$ *с ёмкостью счётчиков* $T(\bar{x})$, если $f(\bar{x}) = \mathcal{M}(\bar{x};\ T(\bar{x}))$ (не определена в точках неопределённости $T(\bar{x})$). Частичная функция $f(\bar{x})$ *строго вычислима на* RC-*машине* $\mathcal{M}$ *с ёмкостью счётчиков* $T(\bar{x})$, если она вычислима на машине $\mathcal{M}$ с любой ёмкостью счётчиков $T'(\bar{x})$, имеющей ту же область определения, что и $T(\bar{x})$, и такой, что $T'(\bar{x}) \geqslant T(\bar{x})$ на области определения.

RC-*машина с константами* $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ получается из RC-машины добавлением регистров $T_1, \ldots, T_k$, которые при вычислении на входе $\bar{x}$ со значением ёмкости счётчиков t постоянно содержат значения $\varphi_1(\bar{x}, t), \ldots, \varphi_k(\bar{x}, t)$ соответственно (эти значения могут быть разными в разных вычислениях, но в течение одного вычисления они неизменны).

Первая глава посвящена вычислительным возможностям RC-машин. В ней строятся RC-машины, строго вычисляющие простые арифметические функции. Далее с помощью RC-машин моделируются вычисления SRM, благодаря чему доказывается универсальность RC-машин и характеризуются связанные с ними сложностные классы. Помимо этого, анализируются вычислительные возможности RC-машин при отсутствии ограничений на ёмкость счётчиков (т. е. в случае, когда в качестве ёмкости допускаются невычислимые функции).

1. Для функций $x + y$, $x \dot{-} y$, xy, $\lfloor x/y \rfloor$ построены строго вычисляющие их RC-машины, каждая из которых имеет только одну программу.

2. Верны следующие утверждения:

   (a) Класс функций, строго вычислимых на RC-машинах с вычислимыми функциями ёмкости счётчиков, совпадает с классом вычислимых функций.

(b) Любая функция из класса $\mathcal{E}^1$ строго вычислима на RC-машине с линейной ёмкостью счётчиков.

(c) Любая функция из класса $\mathcal{E}^2$ строго вычислима на RC-машине с полиномиальной ёмкостью счётчиков.

(d) Любая функция из класса $\mathcal{E}^3$ строго вычислима на RC-машине с ёмкостью счётчиков вида $2^{2^{\cdots^{2^{\max(\bar{x})}}}}$, где высота степенной башни не зависит от $\bar{x}$.

3. Класс всюду определённых предикатов, характеристические функции которых строго вычислимы на RC-машинах (без ограничений на ёмкость счётчиков), совпадает с классом Δ_2 иерархии Клини-Мостовского.

4. Класс функций, строго вычислимых на RC-машинах (без ограничений на ёмкость счётчиков), совпадает с классом функций, получающихся применением операции минимизации к частичным предикатам, имеющим доопределения в Σ_2 и в Π_2 (необязательно одинаковые).

Во **второй главе** рассматриваются алгоритмические проблемы, связанные с RC-машинами. Поскольку RC-машины универсальны, содержательные алгоритмические проблемы, связанные с ними, являются неразрешимыми. В главе определено положение некоторых из них в иерархии Клини-Мостовского.

1. Проблема абсолютной эквивалентности «*Даны* RC-*машины* $\mathcal{M}_1$ *и* $\mathcal{M}_2$. *Верно ли, что при любых значениях входа и ёмкости счётчиков эти машины выдадут одинаковый результат*?» m-полна в классе Π_1.

2. Слабая проблема эквивалентности «*Пусть даны* RC-*машины* $\mathcal{M}_1$ *и* $\mathcal{M}_2$. *Верно ли, что существует функция* $T(x) \geqslant 1$ *такая, что при любом значении* x *выполняется* $\mathcal{M}_1(x;\ T(x)) = \mathcal{M}_2(x;\ T(x))$?» m-полна в классе Π_2.

3. Сильная проблема эквивалентности «*Даны* RC-*машины* $\mathcal{M}_1$ *и* $\mathcal{M}_2$. *Верно ли, что существует функция* $T(x)$ *такая, что при любом значении* x *и любом* $t \geqslant T(x)$ *выполнено* $\mathcal{M}_1(x;\ t) = \mathcal{M}_2(x;\ t)$?» m-полна в классе Π_3.

4. Проблема строгой вычислимости «*Дана* RC-*машина. Верно ли, что эта машина строго вычисляет некоторую всюду определённую функцию?*» m-полна в классе Π_3.

5. У перечисленных ниже алгоритмических проблем существуют доопределения, принадлежащие Σ_3, и любой предикат из Σ_3 m-сводится к каждой из этих проблем.

   (a) Проблема рекурсивности ёмкости счётчиков:

   Пусть дана RC-*машина, строго вычисляющая всюду определённую функцию. Можно ли задать для этой машины вычислимую ёмкость счётчиков, с которой она строго вычисляла бы эту функцию?*

   (b) Проблема рекурсивности строго вычислимой на RC-машине функции:

   Пусть дана RC-*машина, строго вычисляющая некоторую всюду определённую функцию. Является ли эта функция вычислимой?*

   (c) Проблема рекурсивности ёмкости счётчиков для RC-машины, строго вычисляющей общерекурсивную функцию:

   Дана RC-*машина, строго вычисляющая общерекурсивную функцию. Можно ли определить для этой машины общерекурсивную ёмкость счётчиков, с которой она строго вычисляла бы эту функцию?*

В **третьей главе** исследуются различные модификации RC-машин. Одна из этих модификаций арифметизируется, что позволяет получить новые базисы по суперпозиции в классах $\mathcal{E}^2$ и $\mathcal{F}_{\mathrm{PSPACE}}$.

Будем называть RC-*машинами без неравенств* RC-машины, программы которых проверяют значения регистров и счётчиков только на совпадение или несовпадение, не различая, какое из значений больше или меньше.

RC-*машина с ограниченным числом сравнений* устроена аналогично RC-машинам с константами, но вместо программ имеет набор команд $(g_1, \ldots, g_s)$. Каждая команда g_j имеет вид $(r = a_j,\ b_j = c_j \to d_j)$, где a_j, b_j, c_j, d_j — любые регистры/счётчики машины, кроме регистра r.

Во время вычисления машина $\mathcal{M}$ на такте i выполняет команду $g_{\mathrm{rm}(i,s)+1}$. При выполнении команды g_j, если $r = a_j$ и $b_j = c_j$, то в регистр r заносится d_j. Иначе значение регистра r не меняется. Таким образом, команды выполняются одна за другой «по кругу» и на каждом такте машина производит лишь два сравнения. В остальном RC-машина с ограниченным числом сравнений работает так же, как RC-машина с константами.

1. Верны следующие утверждения:

   (a) Существует такое натуральное число d_1, что любую вычислимую функцию можно строго вычислить на RC-машине с не более чем d_1 счётчиками с вычислимой функцией ёмкости счётчиков.

   (b) Существует такое натуральное число d_2, что любую вычислимую функцию можно строго вычислить на RC-машине с не более чем d_2 программами с вычислимой функцией ёмкости счётчиков.

2. Для любой функции $f(\bar{x})$, строго вычислимой на RC-машине с ёмкостью счётчиков $T(\bar{x})$, существуют натуральное число u и RC-машина $\mathcal{M}$ без неравенств, строго вычисляющая функцию $f(\bar{x})$ с ёмкостью $T(\bar{x})+u$.

3. Верны следующие утверждения:

   (a) Класс функций, строго вычислимых на RC-машинах с ограниченным числом сравнений и константами вида $c_1 \cdot \lfloor t/h \rfloor + c_2$ и $t - 1$ с вычислимыми функциями ёмкости счётчиков, совпадает с классом вычислимых функций.

   (b) Любая функция из класса $\mathcal{E}^1$ строго вычислима на RC-машине с ограниченным числом сравнений и константами вида $c_1 \cdot \lfloor t/h \rfloor + c_2$ и $t - 1$ с линейной ёмкостью счётчиков.

   (c) Любая функция из класса $\mathcal{E}^2$ строго вычислима на RC-машине с ограниченным числом сравнений и константами вида $c_1 \cdot \lfloor t/h \rfloor + c_2$ и $t - 1$ с полиномиальной ёмкостью счётчиков.

   (d) Любая функция из класса $\mathcal{E}^3$ строго вычислима на RC-машине с ограниченным числом сравнений и константами вида $c_1 \cdot \lfloor t/h \rfloor + c_2$

и $t-1$ с ёмкостью счётчиков вида $2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2^{\max(\bar{x})}}}}}}$, где высота степенной башни не зависит от $\bar{x}$.

4. Верны следующие утверждения:

   (a) Система функций $\{Q_2(x,T,t),\ x+1,\ x+y,\ x\cdot y\}$ образует базис по суперпозиции в классе $\mathcal{E}^2$ иерархии Гжегорчика.

   (b) Система функций $\{Q_2(x,T,t),\ x+1,\ x+y,\ x\cdot y,\ x^{\mathrm{len}_2(x)}\}$ образует базис по суперпозиции в классе $\mathcal{F}_{\mathrm{PSPACE}}$.

Указанная функция $Q_2(x,T,t)$ задаётся соотношениями

$$\begin{cases} Q_2(x,T,0)=0, \\ Q_2(x,T,t+1)=(x+t)[x\{4t+3\}_T]_T, \\ \qquad\qquad\quad \text{если } Q_2(x,T,t)=(x+t)[x\{4t+2\}_T]_T \\ \qquad\qquad\quad \text{и } \ (x+t)[x\{4t\}_T]_T=(x+t)[x\{4t+1\}_T]_T, \\ Q_2(x,T,t+1)=Q_2(x,T,t) \text{ иначе.} \end{cases}$$

Здесь через $x[y]_T$ обозначаем y-ю по старшинству цифру (0 соответствует младшей цифре) числа x в позиционной системе счисления с основанием T; а через $x\{y\}_T$ — значение $x[\mathrm{rm}(y,\mathrm{len}_T(x))]_T$, где $\mathrm{len}_T(x)$ — число цифр в x в системе счисления с основанием T, а $\mathrm{rm}(x,y)$ — остаток от деления x на y.

Четвёртая глава посвящена рассмотрению счётчиковых машин с сумматором (CS-машин). С помощью этих машин моделируются вычисления RC-машин, благодаря чему доказывается универсальность CS-машин и характеризуются связанные с ними сложностные классы.

Счётчиковая машина с сумматором отличается от RC-машины тем, что вместо рабочего регистра r машина имеет регистр-сумматор s. Как и RC-машина, CS-машина имеет несколько программ, каждая из которых состоит из команд вида

$$a_1\dots a_l \to d, P_j,$$

где $a_1, \ldots, a_l \in \{=, <, >\}$ имеют тот же смысл, что и для RC-машин, и $d \in \mathbb{N}_0$. Под действием команды CS-машина добавляет число d к содержимому сумматора s и выбирает программу P_j (она может совпадать с программой P_i), которая будет активна в следующий момент времени. Значения счётчиков на каждом такте изменяются по тому же принципу, что и у RC-машин. Добавление чисел к сумматору происходит по модулю t, равному значению ёмкости счётчиков.

Для CS-машин действует ограничение на переходы. Понятия вычислимости и строгой вычислимости вводятся так же, как и для RC-машин.

1. Пусть функция $f(\bar{x})$ строго вычислима на RC-машине с ёмкостью счётчиков $T_0(\bar{x})$. Тогда существуют натуральные числа h, u и CS-машина, строго вычисляющая функцию $f(\bar{x})$ с ёмкостью счётчиков $h \cdot T_0(\bar{x}) + u$.

2. Верны следующие утверждения:

   (a) Класс функций, строго вычислимых на CS-машинах с вычислимыми функциями ёмкости счётчиков, совпадает с классом вычислимых функций.

   (b) Любая функция из класса $\mathcal{E}^1$ строго вычислима на CS-машине с линейной ёмкостью счётчиков.

   (c) Любая функция из класса $\mathcal{E}^2$ строго вычислима на CS-машине с полиномиальной ёмкостью счётчиков.

   (d) Любая функция из класса $\mathcal{E}^3$ строго вычислима на CS-машине с ёмкостью счётчиков вида $2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2^{\max(\bar{x})}}}}}}$, где высота степенной башни не зависит от $\bar{x}$.

Заключение

В диссертации рассматривался особый тип абстрактных вычислительных устройств — регистровые машины со счётчиками (RC-машины). Эти машины не имеют полноценной внутренней памяти, а их внешняя память (за исключением единственной ячейки) изменяется независимо от программы.

Были исследованы вычислительные возможности RC-машин, охарактеризованы связанные с ними сложностные классы, рассмотрены алгоритмические проблемы для RC-машин. Был изучен ряд модификаций RC-машин, проведена их арифметизация и получены новые базисы по суперпозиции в некоторых классах рекурсивных функций.

Полученные в диссертации результаты и методы их доказательства можно применить для решения других задач подобного рода в теории вычислимых функций, рассматривая, например, ограничения разного вида на ёмкость счётчиков или на значение рабочего регистра RC-машин и подобных им устройств. Есть основания полагать, что при этом могут получиться новые машинные и алгебраические описания хорошо известных сложностных классов.

Работы автора по теме диссертации

1. Савицкий И. В. Вычисления на регистровых машинах со счетчиками // Дискретная математика. 2017. Т. 29, № 1. С. 95–113.
2. Савицкий И. В. Регистровые машины со счётчиками // Доклады Академии Наук. 2017. № 4. С. 387–388.
3. Савицкий И. В. Устранение неравенств в регистровых машинах со счетчиками // Вестник Московского Университета. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика. 2019. № 3. С. 45–51.
4. Савицкий И. В. Арифметизация регистровых машин со счетчиками // Вестник Московского Университета. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика. 2020. № 3. С. 30–42.
5. Марченков С. С., Савицкий И. В. Вычисления на счетчиковых машинах с сумматором // Вестник Московского Университета. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика. 2018. № 1. С. 31–39.
6. Марченков С. С., Савицкий И. В. Машины в теории вычислимых функций. М.: МАКС Пресс, 2018. 88 с.
7. Савицкий И. В. Некоторые алгоритмические проблемы, связанные с регистровыми машинами со счётчиками // Сборник статей молодых ученых ВМК МГУ. Т. 14. М.: МАКС Пресс, 2017. С. 18–48.

8. Савицкий И. В. Регистровые машины со счётчиками // Алгебра и теория алгоритмов: Всероссийская конференция, посвященная 100-летию факультета математики и компьютерных наук Ивановского государственного университета: сборник материалов (Иваново, 21–24 марта 2018 г.). Иваново: Иван. гос. ун-т, 2018. С. 148–149.

9. Савицкий И. В. Арифметизация регистровых машин со счётчиками // Материалы XIII Международного семинара «Дискретная математика и ее приложения» имени академика О. Б. Лупанова (Москва, 17–22 июня 2019 г.). М.: Изд-во механико-математического факультета МГУ, 2019. С. 178–181.

10. Марченков С. С., Савицкий И. В. Функции, вычислимые регистровыми машинами со счётчиками // Ломоносовские чтения: научная конференция: тезисы докладов (Москва, 18–27 апреля 2016 г.). М.: МАКС Пресс, 2016. С. 86.

11. Савицкий И. В. Регистровые машины со счётчиками и невычислимые функции // Тихоновские чтения: научная конференция: тезисы докладов (Москва, 23–27 октября 2017 г.). М.: МАКС Пресс, 2017. С. 61–62.