Козеренко Сергій Олександрович, тимчасово не пра&shy;цює: &laquo;Графи Маркова одновимірних динамічних систем&raquo; (01.01.08 - математична логіка, теорія алгоритмів і дис&shy;кретна математика). Спецрада Д 26.001.18 у Київському національному університеті імені Тараса Шевченка

Київський нацiональний унiверситет iменi Тараса Шевченка

Мiнiстерство освiти i науки України

Київський нацiональний унiверситет iменi Тараса Шевченка

Мiнiстерство освiти i науки України

Квалiфiкацiйна наукова

праця на правах рукопису

Козеренко Сергiй Олександрович

УДК 519.172, 517.938

ДИСЕРТАЦIЯ

ГРАФИ МАРКОВА ОДНОВИМIРНИХ ДИНАМIЧНИХ

СИСТЕМ

01.01.08 – математична логiка, теорiя алгоритмiв i дискретна математика

Подається на здобуття наукового ступеня

кандидата фiзико-математичних наук

Дисертацiя мiстить результати власних дослiджень. Використання iдей,

результатiв i текстiв iнших авторiв мають посилання на вiдповiдне джерело

С. О. Козеренко

Науковий керiвник

Кириченко Володимир Васильович

доктор фiзико-математичних наук, професор

Київ – 2017

ЗМIСТ

ВСТУП 13

Роздiл 1. ПОПЕРЕДНI ВIДОМОСТI 35

1.1. Неорiєнтованi графи . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 35

1.2. Орiєнтованi графи . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 40

1.3. Типи вiдображень мiж графами . . . . . . . . . . . . . . . . . . 43

1.4. Графи Маркова вiдображень топологiчних та комбiнаторних

дерев в себе . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 48

Висновки до роздiлу 1 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 51

Роздiл 2. ВIДОБРАЖЕННЯ ДЕРЕВ В СЕБЕ 53

2.1. Кiлькiсть дуг в графах Маркова . . . . . . . . . . . . . . . . . . 53

2.2. Опис вiдображень iз заданими графами Маркова . . . . . . . . 60

2.3. Побудова гомоморфiзму з Tn у Matn−1(F2) . . . . . . . . . . . . 66

2.4. Ребернi розмiтки i блукання на деревах . . . . . . . . . . . . . . 68

2.5. Передпорядок Маркова . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 76

2.6. Лiнiйнi та метричнi вiдображення . . . . . . . . . . . . . . . . . 81

2.7. Розтягуючi та антирозтягуючi вiдображення . . . . . . . . . . . 90

2.8. Кiлькiсть дуг в графах Маркова для блукань . . . . . . . . . . . 104

2.9. Орiєнтацiї дерев та помiченi графи Маркова . . . . . . . . . . . 111

Висновки до роздiлу 2 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 118

Роздiл 3. ПОБУДОВА ДЕРЕВ ДЛЯ ЗАДАНИХ ВIДОБРАЖЕНЬ 121

3.1. Вiдображення з малими перiодами . . . . . . . . . . . . . . . . . 121

3.2. Iснування дерев для розтягуючих перестановок . . . . . . . . . 131

3.3. Iснування дерев для лiнiйних та метричних вiдображень . . . . 133

3.4. Слабка та сильна зв’язнiсть графiв Маркова . . . . . . . . . . . 138

12

Висновки до роздiлу 3 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 144

Роздiл 4. М-ГРАФИ 146

4.1. Перiодичнi орграфи як М-графи . . . . . . . . . . . . . . . . . . 146

4.2. Нижня оцiнка на кiлькiсть дуг в перiодичних орграфах . . . . . 147

4.3. Деякi властивостi М-графiв . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 151

4.4. Операцiї над M-графами . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 162

4.5. Турнiри як М-графи . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 169

4.6. M-графи з трьома вершинами . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 173

Висновки до роздiлу 4 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 176

ВИСНОВКИ 179

Список використаних джерел 181

ДОДАТОК 188

Список опублiкованих праць . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 188

Апробацiя результатiв дисертацiї . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 190

13

ВСТУП

Актуальнiсть теми. Одним iз основних аспектiв комбiнаторної динамiки є дослiдження iснування перiодичних точок топологiчних динамiчних

систем та опис структури вiдповiдних їм орбiт. Центральним результатом

даної тематики є вiдома теорема Шарковського [12] (доведена О. М. Шарковським у 1964 роцi), яка повнiстю описує спiвiснування перiодiв перiодичних точок неперервного вiдображення одиничного вiдрiзку в себе. У 1978

роцi Ф. Страффiним [69] було запропоноване чисто комбiнаторне доведення теореми Шарковського, яке було завершене Ч-В. Хо та Ч. Моррiсом [43]

у 1981 роцi (див. також роботу [31]). Це доведення базувалося на розглядi циклiв деякого орiєнтованого графа, який будується за даною перiодичною точкою. А саме, нехай f : [0, 1] → [0, 1] – неперервне вiдображення, а

x ∈ [0, 1] – його перiодична точка перiоду n. Розглянемо орбiту цiєї точки

orbf (x) = {x, f(x), . . . , f n−1

(x)} = {x1 < · · · < xn} та її природнiй порядок.

Вiдповiдний перiодичний граф є орграфом з множиною вершин {1, . . . , n−1}

та множиною дуг {(i, j) : min{f(xi), f(xi+1)} 6 xj < max{f(xi), f(xi+1)}}.

Кожне число 1 6 i 6 n − 1 вiдповiдає мiнiмальному вiдрiзку [xi

, xi+1], а

iснування дуги i → j в перiодичному графi означає, що вiдрiзок [xi

, xi+1] “накриває” [xj

, xj+1] пiд дiєю f. Дослiджуючи цикли перiодичного графа, можна

отримати iнформацiю про iснування перiодичних точок iз заданими перiодами. Схожа конструкцiя переноситься й на вiдображення скiнченних топологiчних дерев, а також комбiнаторних дерев (зв’язних ациклiчних графiв) в

себе. Вiдповiднi орграфи називаються графами Маркова. Таким чином, перiодичнi графи є частковим випадком графiв Маркова для дерев-ланцюгiв та

їхнiх циклiчних перестановок.

За допомогою графiв Маркова можна отримати аналоги теореми Шарковського для дерев загального вигляду [20]. При цьому, ентропiя кусковолiнiйного вiдображення, побудованого за орбiтою даної перiодичної точки,

може бути обчислена через спектральний радiус матрицi сумiжностi вiдпо-

14

вiдного графа Маркова [26]. Також за допомогою графiв Маркова будується “майже iн’єктивний” гомоморфiзм iз напiвгрупи Tn всiх вiдображень

n-елементної множини в себе у матричну напiвгрупу Matn−1(Z) (а також i

у Matn−1(F2)), звуження якого на групу перестановок Sn є точним та незвiдним зображенням останньої [20, 21, 37].

Абстрактнi властивостi перiодичних графiв вивчалися в роботах В. А. Павленка [8, 9, 10]. Зокрема, у роботi [8] було пiдраховано кiлькiсть попарно неiзоморфних перiодичних графiв iз заданим числом вершин. Теоретико-графовi

критерiї перiодичних графiв та їх породжених пiдграфiв було отримано в

роботах [9] та [10] вiдповiдно.

В данiй дисертацiйнiй роботi вивчаються як вiдображення комбiнаторних

дерев в себе, так i самi дерева за допомогою графiв Маркова та дослiджуються теоретико-графовi властивостi графiв Маркова.

Зв’язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконана у рамках державної бюджетної науково-дослiдної теми №11БФ

038-03 “Застосування алгебро-геометричних методiв в теорiях груп, напiвгруп, кiлець, зображень до задач прикладної алгебри та захисту iнформацiї”

(номер державної реєстрацiї 0111U005264) i №16БФ038-01 “Якiсний аналiз

та керування еволюцiйними системами складної структури” (номер державної реєстрацiї 0116U004752) кафедри геометрiї, топологiї i динамiчних систем механiко-математичного факультету Київського нацiонального унiверситету iменi Тараса Шевченка, що входить до комплексного тематичного плану науково-дослiдних робiт “Сучаснi математичнi проблеми природознавства,

економiки та фiнансiв”.

Мета i завдання дослiдження. Метою дисертацiї є вивчення властивостей вiдображень комбiнаторних дерев в себе за допомогою вiдповiдних

їм графiв Маркова та дослiдження теоретико-графових властивостей графiв

Маркова. Завданням дослiдження є опис вiдображень дерев iз заданими графами Маркова, отримання точних формул та оптимальних оцiнок на кiлькiсть дуг та кiлькiсть дуг в середньому в графах Маркова для деяких класiв

вiдображень, опис структури лiнiйних, метричних, розтягуючих, антирозтягуючих вiдображень, блукань та автоморфiзмiв дерев, отримання критерiїв

15

iснування дерев для заданих вiдображень скiнченної множини в себе, на яких

цi вiдображення мають наперед задану властивiсть, опис структури класу Мграфiв.

Об’єктом дослiдження є вiдображення скiнченних комбiнаторних дерев та орiєнтованi графи.

Предметом дослiдження є властивостi вiдображень дерев в себе, якi

виражаються через вiдповiднi їм графи Маркова та теоретико-графова структура графiв Маркова.

Методи дослiдження. Основними методами, якi використовуються

при дослiдженнях в дисертацiйнiй роботi, є методи теорiї графiв та комбiнаторики.

Наукова новизна одержаних результатiв. Усi результати, отриманi

в дисертацiї, є новими. Основнi з них наступнi:

— отримано оптимальнi верхнi та нижнi оцiнки на кiлькiсть дуг в графах

Маркова i описано вiдображення, на яких цi оцiнки досягаються;

— пораховано кiлькiсть дуг в графах Маркова в середньому для класiв загальних вiдображень, перестановок, циклiчних перестановок та

блукань на деревах;

— описано вiдображення, графи Маркова яких є повними, повними двочастковими, диз’юнктними об’єднаннями циклiв та кожна дуга яких

є петлею;

— введено поняття передпорядку Маркова та дослiджено його максимальнi елементи;

— отримано критерiї для лiнiйних та метричних вiдображень в термiнах

графiв Маркова;

— доведено, що кожне дерево з не менше нiж трьома вершинами допускає розтягуюче вiдображення зi слабко зв’язним (сильно зв’язним,

якщо дерево мiстить досконале парування) графом Маркова а також

антирозтягуюче вiдображення iз сильно зв’язним графом Маркова;

— пораховано кiлькiсть слабких компонент та кiлькiсть дуг в графах

Маркова для блукань на деревах та отримано оптимальнi оцiнки на

цю кiлькiсть в термiнах самих дерев;

16

— описано вiдображення скiнченної множини в себе, для яких iснують

дерева, на яких цi вiдображення є лiнiйними, метричними, розтягуючими, антирозтягуючими, блуканнями, автоморфiзмами дерев та зi

слабко або сильно зв’язними графами Маркова;

— отримано оптимальну нижню оцiнку на кiлькiсть дуг в перiодичних

орграфах;

— доведено, що частково функцiональнi та оберненi до них орграфи є

М-графами;

— доведено гiпотези Сеймура та Кассетти-Хаггквiста для М-графiв;

— наведено достатнi умови того, що диз’юнктне об’єднання М-графiв

також є М-графом;

— доведено, що орграф, який отримується iз М-графа подвоєнням або

оберненим подвоєнням довiльної вершини, також є М-графом;

— описано всi М-графи, якi є турнiрами та наведено повний список Мграфiв з трьома вершинами.

Практичне значення одержаних результатiв. Отриманi в роботi

результати мають теоретичний характер i можуть бути застосованi у подальших дослiдженнях з комбiнаторної динамiки та теорiї графiв. А також можуть бути використанi при читаннi спецкурсiв з теорiї динамiчних систем та

теорiї графiв.

Особистий внесок здобувача. Усi результати дисертацiйної роботи

отриманi здобувачем самостiйно. За результатами дисертацiї опублiковано

п’ять наукових робiт у фахових виданнях та одна стаття в електронному

виданнi.

Апробацiя результатiв дисертацiї. Результати дисертацiйного дослiдження доповiдались на:

1. XIII Мiжнароднiй науково-практичнiй конференцiї студентiв, аспiрантiв та молодих вчених “Шевченкiвська весна – 2015” (м. Київ, 1-3 квiтня 2015 р.);

2. IV Всеукраїнськiй науковiй конференцiї молодих вчених з математики

та фiзики (м. Київ, 23-25 квiтня 2015 р.);

3. XIV Мiжнароднiй науково-практичнiй конференцiї студентiв, аспiран-

17

тiв та молодих вчених “Шевченкiвська весна – 2016” (м. Київ, 6-8 квiтня 2016 р.);

4. V Всеукраїнськiй науковiй конференцiї молодих вчених з математики

та фiзики (м. Київ, 25-26 квiтня 2016 р.);

5. XVII Мiжнароднiй науковiй конференцiї iм. акад. Михайла Кравчука

(м. Київ, 19-20 травня 2016 р.);

6. Мiжнароднiй конференцiї “Геометрiя i топологiя в Одесi – 2016” (м.

Одеса, 25-31 травня 2016 р.);

7. XV Мiжнароднiй науково-практичнiй конференцiї студентiв, аспiрантiв та молодих вчених “Шевченкiвська весна – 2017” (м. Київ, 4-6 квiтня 2017 р.);

8. VI Всеукраїнськiй конференцiї молодих вчених з математики та фiзики (м. Київ, 21-22 квiтня 2017 р.);

9. Мiжнароднiй науковiй конференцiї “Алгебраїчнi та геометричнi методи аналiзу” (м. Одеса, 31 травня - 5 червня 2017 р.);

10. Мiжнароднiй конференцiї молодих математикiв, присвяченiй 100-рiччю

з дня народження академiка Ю. О. Митропольського (м. Київ, 7-10

червня 2017 р.);

11. XI Мiжнароднiй алгебраїчнiй конференцiї в Українi, присвяченiй 75-

рiччю В. В. Кириченка (м. Київ, 3-7 липня 2017 р.);

12. XVIII Мiжнароднiй науковiй конференцiї iм. акад. Михайла Кравчука, присвяченiй 125-рiччю вiд дня народження М. Кравчука (м.

Луцьк-Київ, 7-10 жовтня 2017 р.);

13. Засiданнi наукового семiнару вiддiлу топологiї Iнституту математики

НАН України (м. Київ, 2013 р.);

14. Засiданнях наукового семiнару кафедри геометрiї, топологiї i динамiчних систем механiко-математичного факультету Київського нацiонального унiверситету iменi Тараса Шевченка (м. Київ, 2015-2017 рр.).

Публiкацiї. За результатами дисертацiйної роботи опублiковано 18 наукових публiкацiй. З них

— 6 статей [48]–[53] у фахових виданнях, серед яких двi статтi [48], [53] у

науковому фаховому виданнi України включеному до наукометричної

18

бази Scopus, три статтi [49], [50], [52] у фахових iноземних виданнях

та одна стаття [51] в електронному журналi;

— 12 тез доповiдей на наукових конференцiях [1]–[7], [54]–[58].

Структура та обсяг роботи. Дисертацiя складається з анотацiї, вступу, 4 роздiлiв, якi мiстять пiдроздiли, висновкiв, списку використаних джерел,

який мiстить 74 найменування та додатку. Повний обсяг роботи складає 191

сторiнку, в тому числi 168 сторiнок основного тексту.

У вступi обґрунтовано актуальнiсть теми, вказано зв’язок роботи з науковими програмами, планами, темами, встановлено мету i завдання, об’єкт,

предмет та методи дослiдження, наведено наукову новизну та практичне значення отриманих результатiв, особистий внесок здобувача та короткий змiст

роботи.

Перший роздiл носить допомiжний та систематизуючий характер i мiстить основнi означення понять та деякi твердження, якi будуть використовуватися в роботi.

ВИСНОВКИ

Дисертацйнароботаприсвяченадослдженнювластивостейвдображень

комбнаторнихдереввсебезадопомогоювдповднихїмграфвМаркова

тадослдженнютеоретикографовихвластивостейсамихграфвМаркова

Зокремаудисертацїотриманонаступнновнауковрезультати

—отриманооптимальнверхнтанижноцнкинаклькстьдугвграфах

Марковаописановдображеннянаякихцоцнкидосягаються

—порахованоклькстьдугвграфахМарковавсередньомудлякласвзагальнихвдображеньперестановокциклчнихперестановокта

блуканьнадеревах

—описановдображенняграфиМарковаякихєповнимиповнимидвочастковимидиз’юнктнимиоб’єднаннямициклвтакожнадугаяких

єпетлею

—введенопоняттяпередпорядкуМарковатадослдженойогомаксимальнелементи

—отриманокритерїдлялнйнихтаметричнихвдображеньвтермнах

графвМаркова

—доведенощокожнедеревознеменшенжтрьомавершинамидопускаєрозтягуючевдображеннязслабкозв’язнимсильнозв’язним

якщодеревомститьдосконалепаруванняграфомМарковаатакож

антирозтягуючевдображеннязсильнозв’язнимграфомМаркова

—порахованоклькстьслабкихкомпоненттаклькстьдугвграфах

Марковадляблуканьнадеревахтаотриманооптимальноцнкина

цюклькстьвтермнахсамихдерев

—описановдображенняскнченноїмножинивсебедляякихснують

дереванаякихцвдображенняєлнйнимиметричнимирозтягуючимиантирозтягуючимивдображеннямиблуканнямиавтоморфзмамидеревтазслабкоабосильнозв’язнимиграфамиМаркова

—отриманооптимальнунижнюоцнкунаклькстьдугвперодичних



орграфах

—доведенощочастковофункцональнтаобернендонихорграфиє

Мграфами

—доведеногпотезиСеймуратаКассеттиХаггквстадляМграфв

—наведенодостатнумовитогощодиз’юнктнеоб’єднанняМграфв

такожєМграфом

—доведенощоорграфякийотримуєтьсязМграфаподвоєннямабо

оберненимподвоєннямдовльноївершинитакожєМграфом

—описановсМграфиякєтурнрамитанаведеноповнийсписокМграфвзтрьомавершинами