

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»

Факультет математики

На правах рукописи

Сахарова Нина Евгеньевна
Ряды Загье для функции Грина

Резюме диссертации
на соискание ученой степени
кандидата математических наук
НИУ ВШЭ

Научный руководитель:
кандидат физико – математических наук, профессор
Левин Андрей Михайлович

Москва – 2019

Аннотация

Это исследование посвящено построению модулярных форм от двух переменных, являющихся гладкими представителями классов когомологий модулярных поверхностей. А именно, в работе рассматривается случай, когда в качестве многообразия выступает дополнение к кривой Гекке (графику N -соответствия Гекке) на произведении двух стандартных модулярных кривых $Y_0(1)^2$. Явные выражения для гладких представителей классов когомологий являются весьма эффективными при решении различных задач. Так, например, гладкий представитель класса соответствия позволяет описать действие этого соответствия на когомологиях в терминах интегрального оператора. Используя построенную явно дифференциальную форму с простым полюсом на кривой Гекке $\Xi_N(z_1, z_2)$ (модулярное ядро Коши), в первой главе доказывается обобщение результата Дона Загье об интегральном представлении операторов Гекке на случай параболических форм веса 2 произвольного уровня, а также приводится представление автоморфной функции Грина в виде регуляризованного интеграла по фундаментальной области конгруэнц-подгруппы Гекке. Во второй главе разобрана конструкция бимодулярных форм с заданными вычетами на кривую Гекке. Последняя глава посвящена изучению модулярного ядра Коши в случае модулярной поверхности Гильберта.

Глава 1

В 1975 году Дон Загье получил точную формулу следа операторов Гекке, действующего на пространстве параболических форм, в терминах интеграла по фундаментальной области модулярной группы $SL_2(\mathbb{Z})$ [11, 53-56]. Для этого в работе [16] Загье ввел ряд $\omega_m(z_1, z_2)$, который является бимодулярной формой от двух переменных и интегральным ядром преобразования Гекке, доказав что скалярное произведение Петерсона параболической формы $f(z_2)$ и функции $\omega_m(z_1, z_2)$, $f * \omega_m(z_1, z_2)$, можно отождествить с действием оператора Гекке $T(m)$ на параболическую форму f с точностью до константы, зависящей только от веса формы $k > 2$ и индекса оператора m .

Пусть $k > 2$. Рассмотрим ряд Загье:

$$\omega_m(z_1, \bar{z}_2, k) = \sum_{ad-bc=m} \frac{1}{(cz_1\bar{z}_2 + d\bar{z}_2 - az_1 - b)^k},$$

где суммирование производится по всем целочисленным матрицам $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ с определителем m .

Теорема 1. (*Don Zagier*) Обозначим через Φ_1 фундаментальную область для полной модулярной группы Γ в $\mathbb{H}$ и положим $C_k = \frac{(-1)^{k/2}\pi}{2^{k-3}(k-1)}$; тогда для всякой голо-

морфной параболической формы f веса $k > 2$ имеем

$$\int_{\Phi_1} f(z_1) \omega_m(z_1, \bar{z}_2, k) (\Im(z_1))^{k-2} dz_1 d\bar{z}_1 = f * \overline{\omega_m(z_1, \bar{z}_2)} = C_k m^{1-k} (T_k(m)f)(z_2),$$

где $f * g = \int_{\Phi} f(z) \overline{g(z)} (\Im(z))^{k-2} dz d\bar{z}$ – скалярное произведение Петерсона.

Дон Загье доказал эту теорему используя метод Ранкина-Сельберга. Другой подход к доказательству этой теоремы в случае, когда вес $k = 2$, подразумевает построение модулярного ядра Коши, которое в свою очередь является первым примером дифференциальной формы на произведении двух модулярных кривых с логарифмической особенностью на кривой Гекке.

В части 1.1 даны определения и некоторые теоремы, полезные для понимания формулировки задачи. Вторая и основная часть главы 1 посвящена изучению представителя кольца $H^1(Y^2, \Omega_{Y^2}^1 \langle \log \widetilde{T_N} \rangle)$ – модулярного ядра Коши.

Пусть z_1, z_2 – произвольные точки из верхней полуплоскости $\mathfrak{H} = \{z : \Im(z) > 0\}$ и

$$\mu_\gamma(z_1, z_2) = cz_1 z_2 + dz_2 + az_1 + b,$$

где $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ – целочисленная матрица с определителем m . Пусть $\Gamma_0(N)$ – конгруэнц-подгруппа Гекке группы $SL_2(\mathbb{Z})$ и $X_0(N) \simeq \Gamma_0(N) \backslash \mathbb{H}^*$, где $\mathbb{H}^* = \mathbb{H} \cup \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$.

В разделе 1.2 получено обобщение Теоремы 1. А именно, доказано, что имеется аналогичное интегральное представление для операторов Гекке на пространстве параболических форм веса 2 относительно группы $\Gamma_0(N)$. Положим

$$M(m, N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid ad - bc = m, \quad (a, N) = 1, \quad c \equiv 0 \pmod{N} \right\}.$$

Рассмотрим ряд

$$\omega_{m,N}(z_1, z_2) = \frac{1}{2} \sum_{\gamma \in M(m,N)} \frac{1}{\mu_\gamma(z_1, -z_2)^2}.$$

Ряд $\omega_{m,N}(z_1, z_2)$ не сходится абсолютно, но при помощи трюка Гекке можно рассмотреть аналитическое продолжение этого ряда и определить его в терминах предела.

Теорема 2. Пусть Φ_N – фундаментальная область для модулярной группы $\Gamma_0(N)$ в $\mathbb{H}$. Предположим, что род $X_0(N)$ больше нуля. Тогда для всякой голоморфной параболической формы f веса 2 верно, что

$$\int_{\Phi_N} f(z_1) \omega_{m,N}(z_1, \bar{z}_2) dz_2 d\bar{z}_2 = f * \overline{\omega_{m,N}(z_1, \bar{z}_2)} = 2\pi i m^{-1} (T_2(m)f)(z_1).$$

Модулярное ядро Коши $\Xi_N(z_1, z_2)$ – это модулярно инвариантная функция от двух переменных, имеющая асимптотику $\Xi_N(z_1, z_2) \sim \frac{1}{z_1 - z_2}$ при $z_1 \rightarrow z_2$. Наивно, ядро Коши задается следующим рядом:

$$\Xi_{N,k}(z_1, z_2) = \frac{1}{2} \sum_{\gamma \in \Gamma_0(N)} \frac{1}{\mu_\gamma(z_1, -z_2)^k \mu_\gamma(z_1, -\bar{z}_2)^k}.$$

При $k = 1$ ряд $\Xi_{N,k}(z_1, z_2)$ не сходится абсолютно; однако точка $k = 1$ лежит на границе сходимости. Далее с помощью трюка Гекке, введен ряд [12]:

$$\Xi_N(z_1, z_2, s) = \frac{1}{2} \sum_{\gamma \in \Gamma_0(N)} \frac{\overline{\mu_\gamma(z_1, -z_2)} \overline{\mu_\gamma(z_1, -\bar{z}_2)}}{|\mu_\gamma(z_1, -z_2)|^{2s} |\mu_\gamma(z_1, -\bar{z}_2)|^{2s}},$$

где s – комплексный параметр. В разделе 1.2 показано, что ряд $\Xi_N(z_1, z_2, s)$ может быть аналитически продолжен в точку $s = 1$, после этого определена функция $\Xi_N(z_1, z_2) = \lim_{s \rightarrow 1} \Xi_N(z_1, z_2, s)$ и доказана Теорема 2.

Раздел 1.3 посвящен случаю, когда род модулярной кривой $X_0(N)$ равен нулю. Пусть

$$E_{2,N}^\infty(z, s) = \frac{1}{2} \sum_{\Gamma_\infty \backslash \Gamma_0(N)} \frac{(c\bar{z} + d)^2}{|cz + d|^{4s}}$$

неголоморфный ряд Эйзенштейна с комплексным параметром s для параболической точки $i\infty$. Ряд Пуанкаре в параболической точке $i\infty$ с комплексным параметром s задается следующей формулой [15]:

$$P_{N,r'}^\infty(z, s) = \frac{1}{2} \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma_0(N)} \frac{e^{-2\pi i r' \gamma z_1}}{(cz + d)^2 |cz + d|^{2s-2}}.$$

Теорема 3. Пусть $p = e^{2\pi i z_1}$, $q = e^{2\pi i z_2}$, $\tilde{q} = e^{2\pi i \bar{z}_2}$, тогда

$$\frac{1}{2\pi i} \Xi_N(z_1, z_2)(z_2 - \bar{z}_2) = 2\pi i \lim_{s \rightarrow 1} \left(E_N^\infty(z_1, s) + \sum_{r' > 0} P_{N,r'}^\infty(z_1, s) q^{r'} + \sum_{r' < 0} P_{N,r'}^\infty(z_1, s) \tilde{q}^{r'} \right).$$

Обозначим за $J_{\Gamma_0(N)}(p)$ нормализованную образующую кольца модулярных функций относительно группы $\Gamma_0(N)$. В части 1.3 доказана теорема:

Теорема 4. Пусть $g(X_0(N)) = 0$, тогда

$$(\Xi_N(z_1, z_2)(z_2 - \bar{z}_2) - 2\pi i E_{2,N}^\infty(z_1)) dz_1 = d_{z_1} \log |J_{\Gamma_0(N)}(p) - J_{\Gamma_0(N)}(q)|^2.$$

В 1980-х годах Койк, Нортон и Загье независимо друг от друга доказали, что имеет место следующее бесконечное произведение для разности двух образующих кольца модулярных функций относительно полной модулярной группы Γ :

$$J_\Gamma(p) - J_\Gamma(q) = p^{-1} \prod_{\substack{r > 0 \\ r' \in \mathbb{Z}}} (1 - p^r q^{r'})^{c(rr')},$$

где $J_\Gamma(p) = j(p) - 744 = \frac{1}{p} + \sum_{n>0} c(n)p^n$. Как следствие Теоремы 3 и Теоремы 4, в разделе 1.3 получена формула бесконечного произведения для разности двух нормализованных образующих кольца модулярных функций группы $\Gamma_0(N)$ (в случае, когда род группы равен 0). Пусть $p_{r',N}(r)$ – r -ый коэффициент Фурье ряда Пуанкаре с параметром $r' > 0$, тогда

Теорема 5.

$$J_{\Gamma_0(N)}(p) - J_{\Gamma_0(N)}(q) = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) \prod_{\substack{r>0 \\ r'>0}} \prod_{d|(r,r',N)} \left(1 - p^r q^{r'}\right)^{p_{1,N}(rr'/d^2) \cdot d^2/rr'}.$$

Отметим, что логарифмическая производная и логарифм разности двух j -инвариантов является достаточно интересной функцией с изящными арифметическими приложениями. Логарифмическая производная разности двух образующую кольца модулярных функций относительно полной модулярной группы является центральным объектом изучения в статье [1], в которой Асаи, Канеко и Ниномия доказали, что для всякой точки $z_2 \in \mathbb{H}$ верно, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} j_n(z_2) e^{2\pi i n z_1} = \frac{E_{4,1}^2(z_1) E_{6,1}(z_1)}{\Delta(z_1)} \cdot \frac{1}{J_1(z_1) - J_1(z_2)} = -\frac{1}{2\pi i} \frac{J_1'(z_1)}{J_1(z_1) - J_1(z_2)}, \quad (1)$$

где функции $j_r(z) = r j_1(z)|T(r)$, $T(r)$ – оператор Гекке индекса r , образуют систему Гекке. К примеру:

$$\begin{aligned} j_0(z_1) &= 1, \\ j_1(z_1) &= J_1(z_1) - 744 = q^{-1} + 196884q + \dots, \\ j_2(z_1) &= J_1(z_1)^2 - 1488J_1(z_1) + 159768 = q^{-2} + 42987520q + \dots, \\ j_3(z_1) &= J_1(z_1)^3 - 2232J_1(z_1)^2 + 1069956J_1(z_1) - 36866976 = q^{-3} + 2592899910q + \dots \end{aligned}$$

Для функции $\sum_{n=0}^{\infty} j_n(z_2) e^{2\pi i n z_1}$ в работе [1] используется обозначение $H_{z_2}(z_1)$. Таким образом, введенная нами функция $\Xi_1(z_1, z_2)$ связана с функцией $H_{z_2}(z_1)$ следующим соотношением: $\Xi_1(z_1, z_2) = -H_{z_2}(z_1) + 2\pi i E_{2,1}^\infty(z_1)$.

В статье [8] Брунье, Конен и Оно получили много арифметических следствий из формулы (1). Например, была доказана следующая теорема:

Теорема 6. (*Brunier, Kohnen, Ono*) Пусть $f = \sum_{n=h}^{\infty} a_n q^n$ – ненулевая мероморфная модулярная форма веса k относительно группы Γ , такая, что $a_h = 1$. Пусть, как и ранее, Φ_1 – фундаментальная область группы Γ , и

$$e_z = \begin{cases} 1/2, & z = i \\ 1/3, & z = \omega = \frac{1+\sqrt{-3}}{2} \\ 1, & z \neq i, \omega \end{cases}$$

Тогда имеется следующее выражение для тэта-оператора Рамануджана:

$$\Theta(f) := \sum_{n=h}^{\infty} n a_n e^{2\pi i n z_1} = \frac{k E_{2,1}(z_1) f(z_1)}{12} - f(z_1) f_{\Theta}(z_1),$$

где

$$f_{\Theta} := \sum_{z_2 \in \Phi_1} e_{z_2} \text{ord}_{z_2}(f) H_{z_2}(z_1)$$

Эта теорема дает некоторую алгебраическую информацию о функциях $H_{z_2}(z_1)$ и $j_n(z)$, вычисленных в конечном наборе точек дивизора мероморфной модулярной формы. Шнейдер доказал, что если число z алгебраично и имеет степень большую 2, то $J_1(z)$ трансцендентно (1937). Следующее следствие [8] из Теоремы 6 в свою очередь обобщает классический факт о том, что, если z – точка Хегнера, то $J_1(z)$ алгебраично:

Следствие 1. (*Brunier, Kohnen, Ono*) Пусть $f = \sum_{n=h}^{\infty} a_n q^n$ – мероморфная модулярная форма веса k относительно группы Γ , такая, что $a_h = 1$. Если z^0 – точка, для которой $\text{ord}_{z^0}(f) \neq 0$, и коэффициенты f лежат в числовом поле K , то $J_1(z^0)$ – алгебраично.

Отметим, что функция $H_{z_2}(z_1)$ также занимает центральную роль в работе Дона Загье [17]. В работе [3] (2017) Брингманн, Кейн, Лобрич, Оно и Ролен построили полярную гармоническую форму Мааса веса 2, $H_{N,z_2}^*(z_1)$, обобщающую функцию $H_{z_2}(z_1)$ на случай произвольной конгруэнц-подгруппы $\Gamma_0(N)$. В наших обозначениях:

$$H_{N,z_2}(z_1) = -\Xi_N(z_1, z_2) + 2\pi i E_{2,N}^{\infty}(z_1)$$

и $H_{N,z_2}^*(z_1) = -\Xi_N(z_1, z_2)$. Напомним, что гармонической формой Мааса целого веса k называется вещественно-аналитическая функция f веса k : $\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$, которая под действием модулярного преобразования преобразуется как модулярная форма веса k , в параболической точке имеет не более чем экспоненциальный рост (существует константа $C > 0$, такая что $f(z) = O(e^{Cy})$, $y \rightarrow \infty$) и аннулируется гиперболическим оператором Лапласа веса k :

$$\Delta_k = -y^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + 2iky \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

В случае если такая функция f имеет полюса на верхней полуплоскости, f называется полярной гармонической формой Мааса. В работе [2] было показано, что функция $H_{N,z_2}^*(z_1)$ как функция переменной z_2 является полярной гармонической формой Мааса веса 0, и как функция переменной z_1 – полярной гармонической формой Мааса веса 2.

Кроме того, в работе [3] было получено непосредственное обобщение Теоремы 6 для случая произвольной конгруэнц-подгруппы Гекке $\Gamma_0(N)$:

Теорема 7. (*Bringmann, Kane, Lobjrich, Ono, Rolin*) Пусть $f = \sum_{n=h}^{\infty} a_n q^n$ – ненулевая мероморфная модулярная форма веса k относительно группы $\Gamma_0(N)$, такая, что $a_h = 1$. Пусть Φ_N – фундаментальная область группы $\Gamma_0(N)$. Определим дивизор полярной гармонической формы Мааса:

$$f^{\text{div}}(z_1) = \sum_{z_2 \in \Phi_N} e_{N, z_2} \text{ord}_{z_2}(f) H_{N, z_2}^*(z_1).$$

Тогда

$$\Theta(f) = \frac{k f(z_1)}{4\pi \Im(z_1)} - f(z_1) f^{\text{div}}(z_1).$$

Раздел 1.4 посвящен изучению связи модулярного ядра Коши и автоморфной функции Грина или резольвенты ядра. Автоморфной функцией Грина $G_{\Gamma_0(N) \backslash \mathbb{H}}$ или резольвентой ядра называется $\Gamma_0(N)$ -инвариантная функция на $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$, гармоническая по обоим переменным и имеющая логарифмическую особенность на $D_N = \{(z, \gamma z) \mid \gamma \in \Gamma_0(N)\}$. Естественно предположить, что функция $G_{\Gamma_0(N) \backslash \mathbb{H}}(z_1, z_2)$ – есть ряд $\sum_{\gamma \in \Gamma_0(N)/\pm 1} \log \left| \frac{z_1 - \gamma z_2}{z_1 - \gamma \bar{z}_2} \right|$, однако данная функция расходится как $\sum 1/n$. Поэтому в качестве автоморфной функции Грина была предложена следующая функция, введенная в [10]:

$$G_{\Gamma_0(N) \backslash \mathbb{H}}(z_1, z_2, s) = -2 \sum_{\gamma \in \Gamma_0(N)/\pm 1} Q_{s-1} \left(1 + \frac{|z_1 - \gamma z_2|^2}{2\Im(z_1)\Im(\gamma z_2)} \right), \quad (z_1, z_2 \in \mathbb{H}, z_2 \neq \Gamma_0(N)z_1),$$

где $Q_{s-1} = \int_0^\infty (t + \sqrt{t^2 - 1} \cosh u)^{-s} du$ ($t > 1, s > 0$) – функция Лежандра второго рода. Более точно:

$$G_{\Gamma_0(N) \backslash \mathbb{H}}(z_1, z_2) = \lim_{s \rightarrow 1} (G_{\Gamma_0(N) \backslash \mathbb{H}}(z_1, z_2, s) - e_s(z_1, z_2)).$$

Здесь функция $e_s(z_1, z_2)$ является некоторой комбинацией рядов Эйзенштейна и элементарных функций (см. [19]). Автоморфная функция Грина играет ключевую роль в работе [19] Бенедикта Гросса и Дона Загье, в которой авторы обнаружили замечательное соотношение между высотой классов дивизоров Хегнера на якобиане J_N модулярной кривой $X_0(N)$ и первой производной в точке $s = 1$ L -функций определенных модулярных форм. В этой работе значение функции Грина было связано с высотой дивизоров степени 0 на J_N : если x, x' – две различные не параболические точки на $X_0(N)$ (z и z' представляют x, x' на $\mathbb{H}$), то (см. [19])

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 1} \left[G_{\Gamma_0(N) \backslash \mathbb{H}}(z, z', s) + 4\pi E_N(w_N z, s) + 4\pi E_N(z', s) + \frac{\kappa_N}{s-1} \right] + C_N = \\ = \langle (x) - (\infty), (x') - (\infty) \rangle_{\mathbb{C}}, \end{aligned}$$

где $\kappa_N = -12N^{-1} \prod_{p|N} (1 + 1/p)^{-1}$, C_N – некоторая константа ([19], 241), $E_N(z, s) = \sum_{\gamma \in \Gamma_0(N)} \Im(\gamma z)^s$ и $w_N : z \rightarrow -1/Nz$ – инволюция на $X_0(N)$, и аддитивная по обоим переменным, симметричная форма $\langle \cdot, \cdot \rangle$ определяет глобальное спаривание (the

height pairing) на $J_N \times J_N$ над глобальным полем H , так что соответствующая квадратичная форма $\langle a, a \rangle = \hat{h}(a)$ является канонической высотой Нерона-Тейта.

Модулярное ядро Коши $\Xi_N(z_1, z_2)$ является первообразной автоморфной функции Грина по одной из переменных. Мы представим разницу двух автоморфных регуляризованных функций Грина в виде регуляризованного интеграла:

Теорема 8. Пусть u, v, w – некоторые точки на верхней комплексной полуплоскости $\mathbb{H}$, Φ_N – фундаментальная область группы $\Gamma_0(N)$. Тогда

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 1} (G_{\Gamma_0(N) \backslash \mathbb{H}}(w, u, s) + 4\pi E_{0,N}^\infty(u) - G_{\Gamma_0(N) \backslash \mathbb{H}}(w, v, s) + 4\pi E_{0,N}^\infty(v)) = \\ = (2\pi i)^{-1} \int_{\Phi_N}^{reg} (\Xi_N(z, u)(u - \bar{u}) - \Xi_N(z, v)(v - \bar{v})) \overline{\Xi_N(z, w)}(\bar{w} - w) dz d\bar{z} \end{aligned}$$

Глава 2

В вводной части 2.1 приведены базовые утверждения о вычетах Лере и логарифмических дифференциальных формах. В части 2.2 приводится конструкция дифференциальных форм на поверхности $Y_0(1)^2 \setminus T_N$ с заданными вычетами.

Глава 3

В заключительной главе основным объектом изучения является модулярное ядро Коши на модулярной поверхности Гильберта, то есть дифференциальная 1-форма на поверхности Гильберта с простым полюсом вдоль дивизора Хирцебруха-Загье. В работах [5, 6] Ричард Борчердс построил подъем из эллиптических модулярных форм веса $1 - n/2$ с полюсами в параболических точках в автоморфные формы относительно ортогональной группы $O(2, n)$ с известными нулями и полюсами вдоль дивизоров Хегнера, которые можно записать в виде бесконечного произведения, так называемого произведения Борчердса. В статье [7] Брунье, мотивированный обратным вопросом: верно ли, что всякий главный дивизор Хегнера получается как дивизор произведения Борчердса в случае $O(2; 2)$ (модулярных форм Гильберта), построил ряд Пуанкаре $\Phi_m(z_1, z_2, s)$ – функцию с логарифмической особенностью на дивизоре Хирцебруха-Загье. При помощи данной функции Брунье для всякого дивизора Хегнера H построил «обобщенное произведение Борчердса» и определил явно классы Черна дивизора H .

Конструкция рядов Пуанкаре-Брунье аналогична конструкция функции Грина для $SL_2(\mathbb{Z})$ [7]:

$$\Phi_n(z_1, z_2, s) = \sum_{\substack{a, b \in \mathbb{Z} \\ \lambda \in \mathfrak{o}_K^{-1} \\ ab - N(\lambda) = n/D}} Q_{s-1} \left(1 + \frac{|az_1z_2 + \lambda z_1 + \lambda' z_2 + b|^2}{2\Im(z_1)\Im(z_2)n/D} \right).$$

В этой главе представлено другое выражение для значений ряда Пуанкаре, соответствующего дивизору Хирцебруха-Загье T_n , в точках другого дивизора T_m в случае, когда $D = p$ простое, $p \equiv 1 \pmod{4}$ и $\left(\frac{m}{p}\right) = +1$. В этом случае дивизор T_m неприводим и изоморфен модулярной кривой $X_0(m)$. Задача этой главы – определить ограничение ряда Пуанкаре-Брунье в терминах интеграла по фундаментальной области группы $\Gamma_0(m)$ от двух рациональных функций, модулярных ядер Коши в гильбертовом случае. Модулярное ядро Коши, соответствующее дивизору Хирцебруха-Загье, определяется аналогично модулярному ядру Коши, данному в главе 1. В случае модулярной поверхности Гильберта, ядро Коши $\Xi_{\text{Hil},m}(z_1, z_2)(z_2 - \bar{z}_2)$ является функцией, инвариантной относительно действия модулярной группы Гильберта, с полюсом первого порядка на дивизоре Хирцебруха-Загье T_m .

Определение 1. Пусть $n \neq 0$,

$$\mathcal{A}(n) = \left\{ A = \begin{pmatrix} \theta & b\sqrt{D} \\ -a\sqrt{D} & \theta' \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathcal{O}) \mid \theta \in \mathcal{O}_K, a, b \in \mathbb{Z}, A^* = A'; \det(A) = n \right\}$$

и $\mu_M = az_1z_2 + \lambda z_1 + \lambda' z_2 + b$, где $M = \begin{pmatrix} \lambda & b \\ a & \lambda' \end{pmatrix} \in (\sqrt{D})^{-1}\mathcal{A}(n)$. Тогда

$$\Xi_{\text{Hil},n}(z_1, z_2)(z_2 - \bar{z}_2) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{M = \begin{pmatrix} \lambda & b \\ a & \lambda' \end{pmatrix} \\ ab - N(\lambda) = n/D}} \frac{(z_2 - \bar{z}_2)}{\mu_M(z_1, z_2)\mu_M(z_1, \bar{z}_2)}.$$

Как и функцию Грина $\Phi_n(z_1, z_2)$, ядро Коши можно представить как сумму двух функций (как в [7]), $n/D \Xi_{\text{Hil},n}(z_1, z_2) = \psi_n(z_1, z_2) + v_n(z_1, \bar{z}_2)$, где функция $v_n(z_1, \bar{z}_2)$ не имеет особенностей, а функция $\psi_n(z_1, z_2)$ имеет простой полюс на дивизоре T_n ,

$$v_n(z_1, \bar{z}_2) = \lim_{s \rightarrow 1} \sum_{M \in \mathcal{A}(n)/\sqrt{D}} \frac{n/D}{az_1 + \lambda'} \frac{\overline{\mu_M(z_1, \bar{z}_2)}}{|\mu_M(z_1, \bar{z}_2)|^{2s}},$$

$$\psi_n(z_1, z_2) = - \lim_{s \rightarrow 1} \sum_{M \in \mathcal{A}(n)/\sqrt{D}} \frac{n/D}{az_1 + \lambda'} \frac{\overline{\mu_M(z_1, z_2)}}{|\mu_M(z_1, z_2)|^{2s}}.$$

В части 3.1 приведены основные определения, связанные с модулярными поверхностями Гильберта и дивизорами Хирцебруха-Загье. В части 3.2 рассмотрены некоторые свойства модулярного ядра Коши, связанного с дивизорами Хирцебруха-Загье, его связь с функцией $\omega_{\text{Hil},n}(z_1, \bar{z}_2, k)$, введенной Доном Загье в работе [15] в связи с изучением поднятия Дои-Наганумы, и функцией Пуанкаре-Брунье $\Phi_m(z_1, z_2)$. В работе [15] Дон Загье доказал, что для любой пары фиксированных точек z_1 и z_2 следующая функция (по переменной τ)

$$\Omega_{\text{Hil},n}(z_1, z_2, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} \omega_{\text{Hil},n}(z_1, \bar{z}_2, k) e^{2\pi i n \tau}$$

является параболической формой веса k относительно действия группы $\Gamma_0(D)$ с характером $\varepsilon = (D/)$. Используя разложение функции $\Xi_{\text{Нил},m}(z_1, z_2)(z_2 - \bar{z}_2)$, можно получить аналогичный результат для «голоморфной части», $v_n(z_1, \bar{z}_2)$, ядра Коши.

Напомним несколько необходимых обозначений (за деталями можно обратиться к [15], [7]).

Для всякой параболической точки D_1 группы $\Gamma_0(D)$ ($D_1 D_2 = D$) можно определить r -ый ряд Пуанкаре веса 2 и индекса r как предел:

$$G_{r,2}^{D_1}(z) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{2} \sum_{\substack{A \in \Gamma_{D_1} \backslash A_{D_1} \Gamma_0(D) \\ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}} \chi_D(A_{D_1}^{-1} A) \frac{e^{2\pi i r / D_2 A z}}{(cz + d)^2} \frac{\Im(z)^s}{|cz + d|^{2s}},$$

где χ_D – примитивный характер по модулю D , заданный символом Кронекера $x \mapsto \left(\frac{D}{x}\right)$, для $pD_1 + qD_2 = 1$, $A_{D_1} = \begin{pmatrix} D_2 & -p \\ 0 & q \end{pmatrix}$ и $\Gamma_{D_1} = A_{D_1} \Gamma_0(D) A_{D_1}^{-1} \cap \Gamma_\infty$.

Для $r \in \mathbb{Z} - \{0\}$ и

$$\psi(D) = \begin{cases} \left(\frac{D_1}{D_2}\right) \sqrt{D_2} & \text{if } D_1 \equiv 1 \pmod{4} \\ -i \left(\frac{D_1}{D_2}\right) \sqrt{D_2} & \text{if } D_1 \equiv 3 \pmod{4} \end{cases},$$

определим следующую линейную комбинацию рядов Пуанкаре $G_{r,2}^{D_1}(z)$:

$$P_r(z) = \sum_{\substack{D_2 | r, D_2 > 0 \\ D_1 D_2 = D}} \frac{\bar{\psi}(D_2)}{D_2^2} G_{r/D_2, 2}^{D_1}(z).$$

Пусть $P_r(z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} p_r(m) e^{2\pi i m z}$ – разложение Фурье функции $P_r(z)$ (для $r > 0$ его можно найти в статье [15], §3, и для $r < 0$ в [7], §2.2). Заметим, что в случае отрицательного веса $r < 0$, ряд $P_r(z)$ не является голоморфным, но все еще инвариантен относительно действия группы $\Gamma_0(D)$. Имеется следующее Утверждение:

Утверждение 1. Пусть $\kappa_n(z_1) = i\pi^2 \sum_{a>0} H_a(0, -n) a^{-1} (\Im(z_1))^{-1}$.

Для $(z_1, z_2) \in \mathbb{H} \times \mathbb{H} - S(n)$, $\Im z_1 \Im z_2 > n/D$ и $n \neq 0$, функция $\tilde{\psi}_n(z_1, z_2) = \psi_n(z_1, z_2) - \kappa_n(z_1) n/2D$, имеющая простой полюс на T_n , имеет следующее представление в виде бесконечного произведения:

$$\tilde{\psi}_n(z_1, z_2) = \frac{d}{dz_1} \log \prod_{\nu > 0, \nu' > 0} \left| 1 - e^{2\pi i (\nu z_1 + \nu' z_2)} \right|^{p_{-D\nu\nu'}(n)}.$$

Для голоморфной на $\mathbb{H}^2$ функции $\tilde{v}_n(z_1, \bar{z}_2) = v_n(z_1, \bar{z}_2) - \kappa_n(z_1) n/2D$ верно, что функция

$$\Upsilon(z_1, z_2, \tau) = \sum_{n>0} \tilde{v}_n(z_1, \bar{z}_2) e^{2\pi i n \tau} = \sum_{\substack{\nu \in \mathfrak{o}_K^{-1} \\ \nu > 0, \nu' < 0}} P_{-D\nu\nu'}(\tau) \frac{d}{dz_1} \log \left| 1 - e^{2\pi i (\nu z_1 + \nu' \bar{z}_2)} \right|$$

является параболической формой относительно действия группы $\Gamma_0(D)$ относительно переменной τ .

В части 3.3. приведено доказательство следующей Теоремы:

Теорема 9. Пусть $D = p$ и $p \equiv 1 \pmod{4}$, тогда

$$2\pi i \Phi_n(z, w)|_{T_m} = \frac{m}{D} \int_{F_{\Gamma_0(m)}}^{reg} (\Xi_{\text{Hil},n}(z, w) dz + \Xi_{\text{Hil},n}(w, z) dw) \Big|_{T_m} \overline{\Xi_m(z, u)} d\bar{z} + 2\pi i A,$$

где $F_{\Gamma_0(m)}$ – фундаментальная область для конгруэнц-подгруппы Гекке $\Gamma_0(m)$,
 $\Xi_{\text{Hil},n}(z, w)|_{T_m}$ – ограничение модулярного ядра Коши на дивизор Хирцебруха-Загье

$$T_m = \bigcup_{M \in A(m)} \{(z, w) \in \mathbb{H}^2; w = -Mz\},$$

и $A = \pi/(2i) \sum \hat{\lambda} - \text{константа}$, где $\hat{\lambda} = |\lambda|$, если $\lambda \in \mathfrak{d}_K^{-1}$, $\lambda\lambda' = -m/D$ и $|\lambda\Im z| \leq |\lambda\Im w|$ или $|\lambda\Im w| \leq |\lambda\Im z|$.

Апробация работы

Основные результаты диссертации докладывались на следующих конференциях и семинарах:

1. Доклад «Modular Cauchy kernel for the Hecke curve» («Модулярное ядро Коши для кривой Гекке») (Россия, г. Санкт-Петербург, конференция «Modular Forms and Beyond», май 2018);
2. Доклад «Бимодулярные формы с заданными вычетами» (Россия, г. Москва, НИУ ВШЭ, семинар «Автоморфные формы и их приложения 2», апрель 2017);
3. Доклад «Bimodular forms with given residues» («Бимодулярные формы с заданными вычетами») (Россия, г. Москва, НИУ ВШЭ, конференция «Workshop: motives, Periods and L-functions», апрель 2017)

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в двух статьях:

1. N. Sakharova, *Modular Cauchy kernel corresponding to the Hecke curve*. Arnold Mathematical Journal, 4(3), 301-313 (2019).
2. N. Sakharova, *The integral representation of automorphic Green's functions associated with Hirzebruch-Zagier divisors*. European Journal of Mathematics, 5(2), 528-539 (2019)

Список литературы

- [1] T. Asai, M. Kaneko, and H. Ninomiya, *Zeros of certain modular functions and an application*. Comm. Math. Univ. Sancti Pauli, **46**, 93-101. (1997)
- [2] K. Bringmann and B. Kane, *A problem of Petersson about weight 0 meromorphic modular forms*. Research in Mathematical Sciences. (2016)

- [3] K. Bringmann, B. Kane, S. Lobjrich, K. Ono, L. Rolin, *On divisors of modular forms*, submitted for publication. (2017)
- [4] K. Bringmann, B. Kane, S. Lobjrich, K. Ono, L. Rolin, *Number theoretic generalization of the monster denominator formula*, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, accepted for publication. (2017)
- [5] R. E. Borcherds, *Automorphic forms on $O_{s+2,2}(\mathbb{R})$ and infinite products*. Invent. Math. **120**, 161-214 (1995).
- [6] R. E. Borcherds, Automorphic forms with singularities on Grassmannians, Invent. Math. 132 (1998).
- [7] J. H. Bruinier, *Borcherds products and Chern classes of Hirzebruch-Zagier divisors*. Invent. Math. **138**, 51-83 (1999).
- [8] J. H. Bruinier, W. Kohnen, K. Ono, *The arithmetic of the values of modular functions and the divisors of modular forms*. Compositio Math. 140 (3) (2004).
- [9] B. H. Gross, *Heegner points and the modular curve of prime level*. J. Math. Soc. Japan Vol. **39**, No. 2, 345-362 (1987).
- [10] D. A. Hejhal, *The Selberg Trace Formula for $PSL(2, \mathbb{R})$* . Lecture Notes in Mathematics **1001**, Springer-Verlag, (1983).
- [11] S. Lang, *Introduction to modular forms*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1995).
- [12] N. Sakharova, *Convergence of the Zagier type series for the Cauchy kernel*. Cornell University. Series "Working papers by Cornell University". No. 1503.05503 (2015).
- [13] N. Sakharova, *Modular Cauchy kernel corresponding to the Hecke curve*. Arnold Mathematical Journal, 4(3), 301-313 (2019).
- [14] N. Sakharova, *The integral representation of automorphic Green's functions associated with Hirzebruch-Zagier divisors*. European Journal of Mathematics, 5(2), 528-539 (2019)
- [15] D. Zagier, *Modular forms associated to real quadratic fields*. Invent. Math. **30**. (1975).
- [16] D. Zagier, *Traces des operateurs de Hecke*. Seminaire Delange-Pisot-Poitou , Expose' No. **23**. (1975-1976).
- [17] D. Zagier, *Traces of singular moduli*. Motives, Polylogarithms, and Hodge Theory (Ed. F. Bogomolov and L. Katzarkov), Lect. Ser. **3** Intl. Press, Somerville, 209-244. (2002).

- [18] D. Zagier, B. Gross, *On singular moduli*. J. reine Angew. Math., **355**, 191-220. (1985).
- [19] D. Zagier, B. Gross, *Heegner points and derivative of L -series*. Invent. Math., **85**, 225-320. (1986).