

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский технологический университет «МИСиС»

Ионцев Михаил Анатольевич

Фазовые переходы в ансамбле джозефсоновских контактов, взаимодействующих с
электромагнитным полем в резонансной полости

01.04.07 Физика конденсированного состояния

Автореферат диссертации
на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Научный руководитель: д. ф.-м. н., проф. Мухин Сергей Иванович
Научный консультант: к. ф.-м. н., с.н.с. Фистуль Михаил Викторович

Москва, 2019

Общая характеристика работы.

В данной работе исследуются равновесные и неравновесные свойства ансамбля Джозефсоновских контактов, являющихся базовыми элементами сверхпроводящих квантовых двух-уровневых систем (кубитов - квантовых битов информации), взаимодействующих с электромагнитным полем в высокодобротном резонаторе. Исследование включает:

- рассмотрение равновесного состояния и изучение свободной энергии (потенциал Гельмгольца), энтропии и теплоёмкости этой системы, изучение фазовых переходов между когерентными (низкотемпературные фазы) и некогерентным (высокотемпературная фаза) состояниями электромагнитного поля, определение критической температуры фазового перехода;

- теоретическое изучение неравновесного состояния системы, а именно: резонансных частот, при которых наблюдается сильное подавление (увеличение) коэффициента прохождения электромагнитной волны, взаимодействующей с кубитом или цепочкой периодически расположенных кубитов; в резонансном режиме, когда частота электромагнитной волны близка по своим значениям к частоте кубитов, вывод дисперсионных соотношений для электромагнитной волны; в нелинейном режиме исследование солитонных решений индуцированных резонансным взаимодействием кубитов и электромагнитного поля.

В данной работе описывается новое низкотемпературное когерентное состояние фотонного поля. Данное состояние стабилизируется взаимодействием между электромагнитным полем и ансамблем кубитов и это взаимодействие описывается полем Хаббарда-Стратоновича в мнимом времени. Низкотемпературные фазы фотонного поля характеризуются с помощью квантового параметра порядка (КПП), также являющегося функцией мнимого времени. Выявить данное состояние можно с помощью эффекта «двойного резонанса», то есть двух близко расположенных резонансных минимумов в частотной зависимости коэффициента прохождения электромагнитной волны в передающей линии связанной с системой.

В работе исследован резонансный (частота резонатора близка к частоте двух-уровневых систем) режим прохождения электромагнитной волны через ансамбль двух-уровневых систем. Найдено эффективное нелинейное уравнение, описывающее распространение электромагнитных волн, резонансно взаимодействующих с цепочкой кубитов. В линейном режиме малых амплитуд электромагнитного поля найдены дисперсионные соотношения, а в нелинейном режиме- солитонные решения. Найдены резонансные особенности в коэффициенте прохождения электромагнитной волны.

Актуальность работы.

Актуальность и новизна исследования заключаются в том, что было обнаружено новое низкотемпературное состояние фотонного поля, которое проявляется в виде двух резонансных особенностей в частотной зависимости коэффициента прохождения электромагнитной волны через систему. Эти особенности были объяснены как характерные биения между двумя когерентными состояниями фотонного поля двух разных поляризаций.

Разработаны физические принципы и количественное описание прохождения электромагнитных волн через цепочку периодически расположенных кубитов, резонансно взаимодействующих с электромагнитным полем. В нелинейном режиме были найдены темные и серые солитонные решения, обнаружено узкополосное подавление (усиление) коэффициента прохождения как в линейном, так и нелинейном режимах.

Целью данной работы является разработка количественного описания равновесного и неравновесного состояний фотонного поля, взаимодействующего с ансамблем кубитов, а именно: температуры фазового перехода, законов дисперсии электромагнитных волн в системе,

нелинейных солитонных решений, частотной зависимости коэффициента прохождения электромагнитных волн через ансамбль квантовых Джозефсоновских контактов (кубитов).

Основные положения, выносимые на защиту.

1. Количественное описание фазового перехода первого рода между когерентным (низкотемпературная фаза) и некогерентным (высокотемпературная фаза) состояниями электромагнитного поля. Фазовый переход проявляется как результат нерезонансного взаимодействия электромагнитного поля и ансамбля квантовых Джозефсоновских контактов (кубитов). Найдена критическая температура фазового перехода и ее зависимость от числа кубитов, силы взаимодействия, частоты кубитов или расстояния между уровнями в двухуровневой системе.

2. Зависимость частоты когерентного фотонного поля, и частоты биений между двумя когерентными фотонными полями различной поляризации от параметров системы: силы взаимодействия, количества кубитов, частот резонатора и кубитов.

3. Низкотемпературная фаза фотонного поля проявляется в виде резонансных дублетов на частотной зависимости коэффициента прохождения электромагнитных волн, распространяющихся в передающей линии слабо связанной с фотонным полем. Высокотемпературная фаза (некогерентное состояние) фотонного поля показывает одиночное резонансное подавление коэффициента поглощения. Физической причиной таких резонансных дублетов являются квантовые колебания между двумя когерентными состояниями фотонов разных поляризаций.

4. Выведено эффективное нелинейное уравнение распространения электромагнитной волны, резонансно взаимодействующей с цепочкой периодически расположенных кубитов. В линейном режиме для одиночного кубита обнаружено сильное подавление коэффициента прохождения электромагнитной волны. В случае сильного взаимодействия с решеткой кубитов найдена область параметров, где наблюдается резонансное прохождение электромагнитной волны и резкое увеличение коэффициента прохождения.

5. В сильно нелинейном режиме больших амплитуд электромагнитного поля взаимодействие кубитов с электромагнитным полем сильно подавляется, и коэффициент прохождения электромагнитной волны восстанавливается как в случае одного кубита, так и цепочки кубитов.

6. Резонансное взаимодействие кубитов с электромагнитной волной приводит к появлению солитонных решений: в случае с аномальной дисперсией в системе наблюдаются солитоны, сохраняющие неизменной свою форму в пространстве в процессе распространения, а также оптические солитоны как с постоянной формой, так и периодически изменяющие ее.

7. В случае с нормальной дисперсией также наблюдаются как обычные постоянные гауссообразные солитоны, так и оптические: темные (при которых прозрачность системы становится равной нулю) и серые (частично «запирающие» прохождение).

Научная новизна:

Впервые были исследованы осцилляции между когерентными состояниями фотонного поля с разной поляризацией, и обнаружен эффект резонансного дублета в частотной зависимости коэффициента прохождения электромагнитной волны в присутствии такого когерентного состояния.

Впервые был исследован и получен в аналитическом виде коэффициент прохождения для линейных и нелинейных режимов взаимодействия в неравновесном состоянии, резонансное подавление и восстановление значений коэффициента прохождения, и вычислена его зависимость

от основных характеристик системы: частоты и мощности электромагнитных волн, частоты кубитов.

Впервые были обнаружены темные и серые виды оптических солитонов в системах квантовых джозефсоновских кубитов, резонансно взаимодействующих с электромагнитной волной.

Практическая значимость.

Во-первых, данная работа позволяет разрабатывать новые квантовые метаматериалы с перестраиваемыми показателями преломления.

Во-вторых, данная работа позволяет количественное описание сложных квантовых сверхпроводящих цепей, в которых реализовано сверхсильное взаимодействие ансамбля кубитов с электромагнитным полем. Такие сверхпроводящие квантовые сети являются уже в настоящее время центральным элементом квантовых информационных приборов.

В-третьих, большие изменения коэффициента прохождения, найденные в системе кубитов, сильно взаимодействующих с электромагнитным полем, могут быть использованы для разработки новых сверхточных квантовых измерительных систем.

Личный вклад. Автор принимал активное участие в постановке задач, разработке моделей, проведении аналитических расчётов, обработке результатов, написании статей.

Апробация работы.

Основные результаты работ докладывались на следующих конференциях: Международной конференции-конкурсе молодых физиков 05.03.2018г., 5-Международной Конференции по Квантовым Технологиям (ICQT-2019) 17.07.2019, семинарах, проводимых на кафедре Теоретической физики и квантовых технологий. Диссертация выполнена при поддержке гранта К2-2016-019.

Публикации. Основные материалы диссертационной работы изложены в статьях опубликованных в журналах международной реферативной базы данных Web of Science и Scopus.

Объем и структура работы. Работа изложена на 122 страницах, список источников включает 22 наименования.

Краткое содержание работы.

Во Введении описываются цели, актуальность и предмет исследования, основные положения, выносимые на защиту, и описана структура диссертации.

В Главе 1 описывается ансамбль джозефсоновских контактов, которые в квантовом режиме могут быть представлены в виде двух-уровневых макроскопических «атомов» (кубитов). В первой главе изучается решетка кубитов, встроенная в высокочастотный резонатор (Рис. – 1), при этом длина волны электромагнитного поля в резонаторе больше, чем расстояние между отдельными двухуровневыми системами, таким образом, можно положить, что амплитуда электромагнитного поля, взаимодействующего с кубитами постоянна. Теоретическое исследование равновесного состояния сводится к определению свободной энергии, энтропии, теплоемкости системы, а также вычислению критической температуры фазового перехода первого рода.

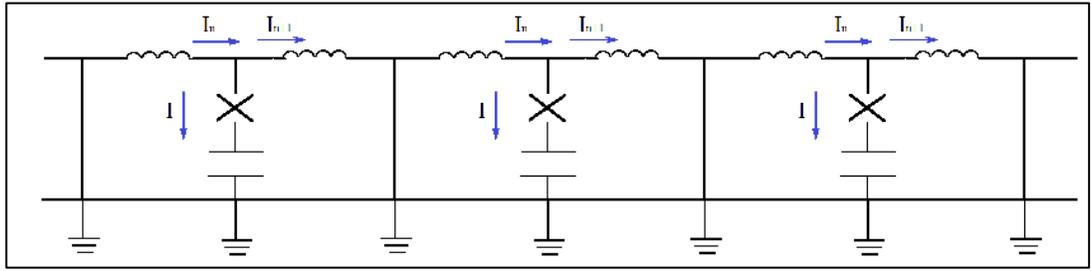


Рисунок 1– Передающая линия с двух-уровневыми системами.

Джозефсоновский контакты можно представить в виде электромагнитного контура с конденсатором и нелинейной индуктивностью, обладающими следующими параметрами $E_J = \frac{\hbar I_c}{2e}$, $E_{C_j} = \frac{(2e)^2}{2C_j}$, $L_J = \frac{\hbar}{2eI_c \cos \varphi}$, где I_c ток перехода, C_j – емкость контакта. Далее будем полагать, что $I = I_c \sin \varphi$, и $\hbar = 1$, $e = 1$. С учетом вышесказанного получим следующее:

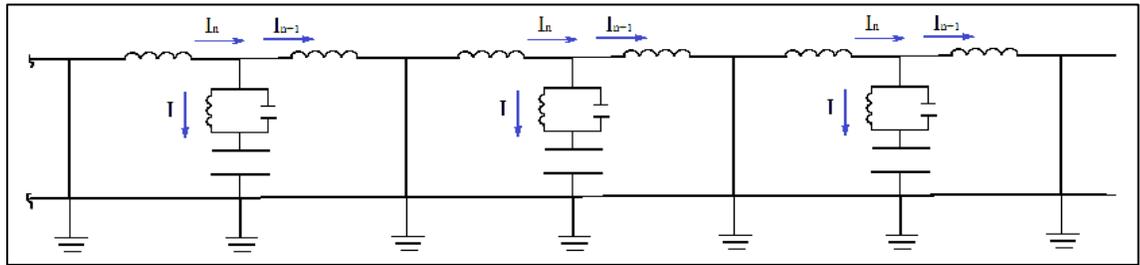


Рисунок 2 – Преобразованная схема передающей линии.

Лагранжиан всей системы состоит из трех частей, а именно: лагранжиана фотонного поля, ансамбля кубитов и лагранжиана взаимодействия между кубитами и полем:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{ph} + \mathcal{L}_{TLS} + \mathcal{L}_{int}. \quad (1)$$

Лагранжиан всей системы может быть получен путем интегрирования уравнений Кирхгофа, составляющие лагранжиана будут иметь следующий вид:

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{ph} = \frac{m}{2} (\dot{Q}^2 - \omega_0^2 Q^2), \\ \mathcal{L}_J = \sum_i \left(\frac{E_{C_j}}{2\omega_p^2} (\dot{\varphi}_i + \mu_i)^2 - E_j (1 - \cos \varphi_i) \right), \\ H_{int} = Q\gamma \sum_i (\hat{\mathcal{P}} + \mu_F). \end{cases} \quad (2)$$

Здесь принято, что $Q=Q(x_i, t)$ – зависящее от координаты и времени распределение заряда, ω_0 – частота электромагнитной волны, γ – параметр, характеризующий силу взаимодействия между фотонным полем и ансамблем кубитов, μ_F – внешний электрический потенциал, подаваемый на решетку с кубитами.

Квантовая динамика зарядовых кубитов описывается с помощью эффективного гамильтониана двух-уровневых системе:

$$H_{TLS} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{C_j} + \varepsilon_J & 0 \\ 0 & \varepsilon_{C_j} - \varepsilon_J \end{bmatrix}, \quad (3)$$

где приняты следующие обозначения: зарядовая энергия $\varepsilon_{C_J} = \frac{9}{24} E_{C_J} \left(\frac{\omega_{C_J}}{\omega_p} \right)^2$, Джозефсоновская энергия $\varepsilon_J = \frac{E_J}{2}$.

Как было показано в описании системы и постановке задачи в Главе 1, равновесные свойства в квантовом режиме можно изучить с помощью следующей статистической суммы:

$$Z = \int DQD\{\varphi_i\} \exp(-S(Q, \varphi_i)). \quad (4)$$

В этом выражении S - действие, описывающее взаимодействие электромагнитной волны и кубитов в мнимом времени. Интегрируя уравнение (4) по $\{\varphi_i\}$, квантовой переменной, мы получим эффективное значение действия S_{eff} в следующей форме:

$$S_{eff} = \int_0^{\frac{1}{T}} d\tau (\dot{Q}^2 + \omega_0^2 Q^2) - TN \ln \cosh \left(\frac{\sqrt{\gamma Q^2 + \varepsilon_J^2}}{2T} \right). \quad (5)$$

В данном разделе мы будем работать с эффективной формой действия (5).

Рассмотрим случай, когда амплитуда заряда является функцией, зависящей от мнимого времени, причем при усреднении по отрезку времени, равному периоду этой функции, она равняется нулю. Таким образом, найденный параметр порядка будет носить «скрытый» характер.

Эффективное действие в случае, когда амплитуда заряда зависит от мнимого времени, имеет вид:

$$S_{eff}(Q) = \int_0^{\frac{1}{T}} \partial\tau \left\{ \frac{m}{2} (\dot{Q}^2 + \omega_0^2 Q^2) - T \left(N \ln(2) + N \frac{\varepsilon_J}{T} + \sum_{i=1}^N \ln \left[\cosh \left\{ \frac{\sqrt{Q^2 \gamma^2 + 4\varepsilon_J^2}}{2T} \right\} \right] \right) \right\}. \quad (6)$$

Сущность уравнений самосогласования сводится к минимизации действия по параметрам $Q(\tau)$, достигаемой взятием вариации с дальнейшим использованием теории возмущения для определения значения вариации индекса Флоке по $Q(\tau)$. Итак, действие имеет вид:

$$\int_0^{h/k_B T} \frac{d\tau}{4U} [\gamma^2 Q^2] - T \sum_i \ln \left[\cosh \left\{ \frac{\alpha_i \{Q\}}{2T} \right\} \right] = S. \quad (7)$$

Варьируя действие по полю Хаббарда-Стратоновича (параметру порядка исследуемой системы), получим следующее тождество:

$$\frac{\gamma^2 Q(\tau)}{2UT} - \sum_i \frac{\delta \alpha_i}{\delta Q(\tau)} \tanh \left\{ \frac{\alpha_i \{Q\}}{2T} \right\} = 0, \quad (8)$$

здесь принято, что U — энергия взаимодействия системы с полем, которая точно определяется в работе [19].

При исследовании уравнения самосогласования можно устремить значение параметра k_1 к его пределам, а именно к 0 или 1 . Так в случае, когда $k_1 \rightarrow 0$, уравнение преобразуется в уравнение самосогласования для амплитуды, независимой от времени, то есть осуществляется переход в классический случай. Таким образом, очевидным является вывод о том, что случай, когда параметр порядка зависит от времени, является более общим и включает в себя тот, когда он не зависит от времени.

$$m\omega_0^2 = \sum_{i=1}^N \frac{\gamma_i^2}{4\sqrt{\frac{1}{4}Q^2\gamma_i^2 + \varepsilon_{ji}^2}} \tanh \left\{ \frac{\sqrt{Q^2\gamma^2 + 4\varepsilon_j^2}}{2T} \right\}. \quad (9)$$

Устремив теперь параметр к другому пределу $k_1 \rightarrow 1$, получим следующую зависимость:

$$\frac{1}{U} - \sum_i \tanh \left\{ \frac{\varepsilon_{ji}}{2T} \right\} \frac{\varepsilon_{ji}}{\varepsilon_{ji}^2 + (\pi n T)^2} = 0. \quad (10)$$

Рассмотрим случай, когда $\frac{\varepsilon_j}{2T} \ll 1$, тогда можно воспользоваться разложением в ряд, и предполагая также, что все системы являются идентичными, в итоге получим:

$$\frac{1}{U} - \frac{\varepsilon_j}{2T} \frac{N\varepsilon_j}{\varepsilon_j^2 + (\pi n T)^2} = 0. \quad (11)$$

Данное уравнение преобразуется в кубическое:

$$T^3(\pi n)^2 + \varepsilon_j^2 T - 2UN\varepsilon_j^2 = 0. \quad (12)$$

Напомним, что данное уравнение является уравнением самосогласования, то есть оно с одной стороны позволяет найти функциональный вид параметра порядка, а с другой, значение критической температуры, а именно, разрешая уравнение (12), получим:

$$T_c^{QOP} \approx \left(\frac{\varepsilon_j^2 UN}{\pi^2} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (13)$$

Параметр порядка меняется скачком при данной критической температуре (этот результат получается, если подставить это значение температуры в выражение для параметра порядка), из чего следует, что фазовый переход, происходящий в точке фазового перехода, является фазовым переходом первого рода. Температура в обычных обозначениях имеет вид:

$$T_c^{QOP} \approx \left(\frac{E_j E_c^2 N}{16\pi^2} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (14)$$

Фазовая диаграмма фазового перехода первого рода имеет следующий вид:

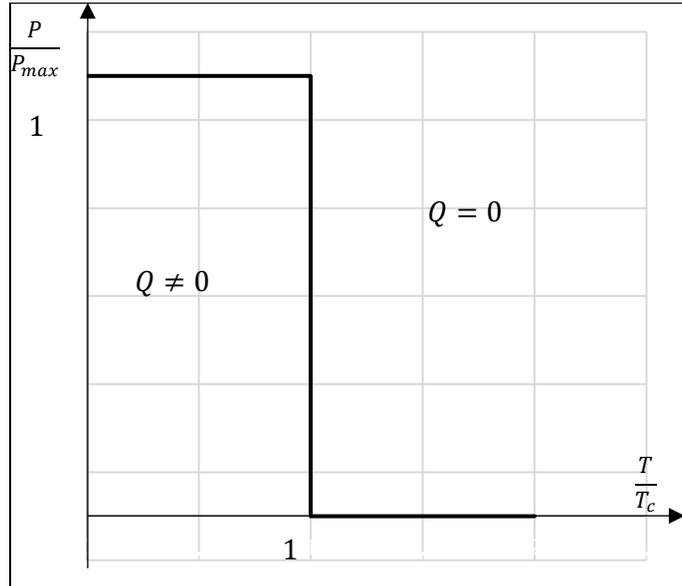


Рисунок 3 – Фазовая диаграмма фазового перехода первого рода.

Таким образом, изучив равновесные свойства системы, состоящей из кубитов, взаимодействующих с электромагнитным полем, были обнаружены когерентные низкотемпературные фазы фотонного поля.

В Главе 2 исследован коэффициент прохождения для вышеописанной системы, а также его изменение до и после фазового перехода, для случая, когда параметр порядка не зависит от мнимого времени. В этом случае получаем фазовый переход первого рода по своему типу являющимся аналогичным фазовому переходу из парамагнитной в ферромагнитную фазу. При этом был получен результат, согласно которому при высоких температурах коэффициент прохождения электромагнитной волны через такую систему имеет один узкий минимум, а при низких температурах – два. Каждый экстремум возникает только в случае резонанса, таким образом, можно сделать вывод о наличии двойного резонанса, характеризующего состояние фотонного поля при низких температурах. Возникновение двойного резонанса может быть объяснено наличием квантовых осцилляций между двумя состояниями фотонного поля, различающимися поляризацией.

Для изучения коэффициента прохождения электромагнитной волны, мы подключим передающую линию к резонатору со встроенным ансамблем кубитов индуктивным способом, и динамические уравнения имеют следующий вид:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = k\delta(x - x_0)Q(t) . \quad (15)$$

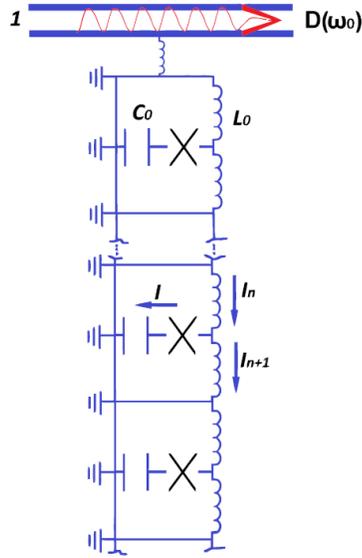


Рисунок 4 – Резонатор, подключенный к передающей линии.

$$H = H_0 - kq(t)Q(t) , \quad (16)$$

где $kq(t)Q(t)$ сила взаимодействия между резонатором и передающей линией. Уравнение движения, получаемое из гамильтониана (16) запишем в Фурье-представлении. Положим, что $q(x, t) = q(x)e^{i\omega t}$, тогда:

$$-\frac{\omega^2}{c^2}q(x) - \frac{d^2q}{dx^2} = k\delta(x - x_0)\langle Q(t) \rangle , \quad (17)$$

при этом считаем, что:

$$\langle Q(t) \rangle = \int_0^t ds \chi_{QQ}(t - s)q(s) , \quad (18)$$

где $\chi_{QQ}(t, s)$ временная корреляционная функция, которая определяется как

$$\chi_{QQ}(t, s) = \frac{i}{\hbar} \langle [Q(t), Q(s)] \rangle . \quad (19)$$

Рассмотрим несколько возможных решений этого уравнения. Положим в первом случае, что амплитуда не зависит от мнимого времени: $\dot{Q} = 0$ и нет ансамбля кубитов в резонаторе. Этот случай является наиболее простым, так как нет взаимодействия между ансамблем кубитов и электромагнитной волной. Эффективное действие принимает вид:

$$S = \int_0^{\frac{1}{T}} d\tau (\dot{Q}^2 + \omega_0^2 Q^2). \quad (20)$$

Временная корреляционная функция может быть переписана в следующей форме:

$$\chi_{QQ}(t - s) = \frac{i}{2\omega_0} e^{-i\omega_0(s-t)}. \quad (21)$$

При этом уравнение движения принимает вид:

$$\frac{d^2 q}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c^2} q(x) + b(\omega)q(x) = 0, \quad (22)$$

$$\text{где } b(\omega) = \frac{k}{2\omega_0(\omega - \omega_0)}.$$

Это уравнение аналогично уравнению Шредингера с δ -образным потенциалом. Решение данного уравнения известно и имеет следующий вид:

$$\begin{cases} q(x) = e^{i\omega x/c} + R e^{-i\omega x/c}, x < x_0; \\ q(x) = T e^{i\omega x/c}, x > x_0. \end{cases} \quad (23)$$

Известны также решения для сдвига фазы волны и коэффициента прохождения волны:

$$D(\omega) = |T|^2 = \frac{2i\omega/c}{b(\omega) + 2i\omega/c}. \quad (24)$$

$$\Phi(\omega) = \arctan\left(\frac{k}{4\omega_0\omega(\omega - \omega_0)c}\right). \quad (25)$$

Мы можем также определить положение резонансного минимума из уравнения:

$$2\omega_0(\omega - \omega_0) = 0, \quad \omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Таким образом, когда резонатор не взаимодействует с ансамблем кубитов, наблюдается один минимум на частоте равной частоте резонатора.

Рассмотрим теперь случай, когда резонатор взаимодействует с ансамблем кубитов, но амплитуда по-прежнему не зависит от мнимого времени $\dot{Q} = 0$. В таком случае действие будет равно:

$$S = \int_0^{\frac{1}{T}} d\tau \omega_0^2 Q^2 - TN \ln \cosh\left(\frac{\sqrt{\gamma Q^2 + E^2}}{2T}\right), \quad (26)$$

где $E = 2\varepsilon_j$.

Имея действие, мы можем получить формулу для свободной энергии системы путем интегрирования:

$$F = \omega_0^2 Q^2 - TN \ln \cosh\left(\frac{\sqrt{\gamma Q^2 + E^2}}{2T}\right). \quad (27)$$

В высокотемпературной фазе можно использовать простое приближение, в котором $\frac{Q}{E} \sim 0$, и мы можем разложить в ряд Тейлора правую часть уравнения (27) и получить эффективную формулу для свободной энергии :

$$F_{eff} = Q^2 \left(\omega_0^2 - \gamma \frac{N}{4E} \tanh \left(\frac{E}{2T} \right) \right). \quad (28)$$

Введем понятие резонансной частоты:

$$\omega_R = \pm \sqrt{\omega_0^2 - \gamma \frac{N}{4E} \tanh \left(\frac{E}{2T} \right)}. \quad (29)$$

Таким образом, эффективное действие:

$$S = \int_0^{\frac{1}{T}} d\tau \omega_R^2 Q^2. \quad (30)$$

Уравнение движения принимает следующую форму:

$$\frac{d^2 q}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c^2} q(x) - \frac{k\delta(x-x_0)q(x)}{2\omega_R(\omega-\omega_R)} = 0. \quad (31)$$

Так в высокотемпературной фазе фотонного поля резонансная особенность в коэффициенте прохождения должна наблюдаться при $\omega \rightarrow \omega_R$.

Рассмотрим теперь случай, когда $\dot{Q} \neq 0$, но $\frac{Q}{E} \sim 0$. Тогда эффективное действие принимает следующую форму:

$$S = \int_0^{\frac{1}{T}} \frac{d\tau 1}{2} (\dot{Q}^2 + \omega_0^2 Q^2) - TN \ln \cosh \left(\frac{\sqrt{\gamma Q^2 + E^2}}{2T} \right) \quad (32)$$

и эффективная функция свободной энергии принимает следующий вид:

$$F_{eff} = P^2 - U(Q), \quad U(Q) = \frac{|\omega_R^2|}{2} Q^2 + Q^4 \frac{\lambda}{4!}, \quad (33)$$

где

$$\frac{\omega_R^2}{2} = \frac{\omega_0^2}{2} - \gamma \frac{N}{4E} \tanh \left(\frac{E}{2T} \right) \quad (34)$$

и

$$\frac{\lambda}{4!} = -N \left(\frac{\gamma}{4E} \right)^2 \left(\frac{1}{2T} - \frac{1}{E} \tanh \left(\frac{E}{2T} \right) - \frac{1}{2T} \tanh^2 \left(\frac{E}{2T} \right) \right). \quad (35)$$

Необходимо отметить, что $\lambda(T) > 0$, этот факт продемонстрирован на нижеследующем графике, положив, что $K(x) = \frac{1}{E} \tanh(x) - \frac{1}{2T} \tanh^2(x)$, $E = \delta$.

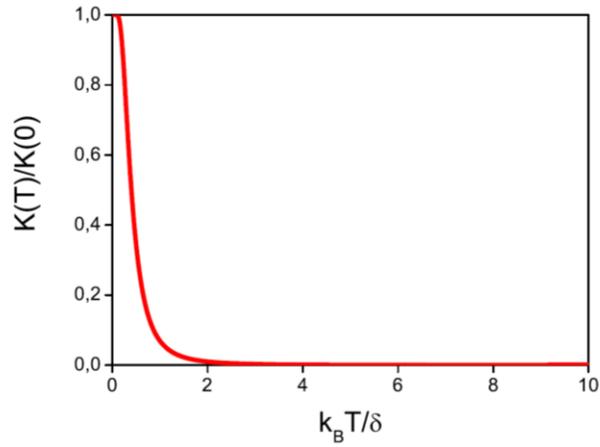


Рисунок 5 – Функция, показывающая зависимость параметра нелинейности от температуры .

Изучим теперь зависимость резонансной частоты от температуры $\omega_R(T)$. Известно, что в нашей системе есть фазовый переход с критической температурой $\frac{2T_c}{E} = \frac{1}{\operatorname{arctanh}\left(\frac{2\omega_0^2 E}{\gamma N}\right)}$. Этот фазовый переход был исследован в Главе 1.

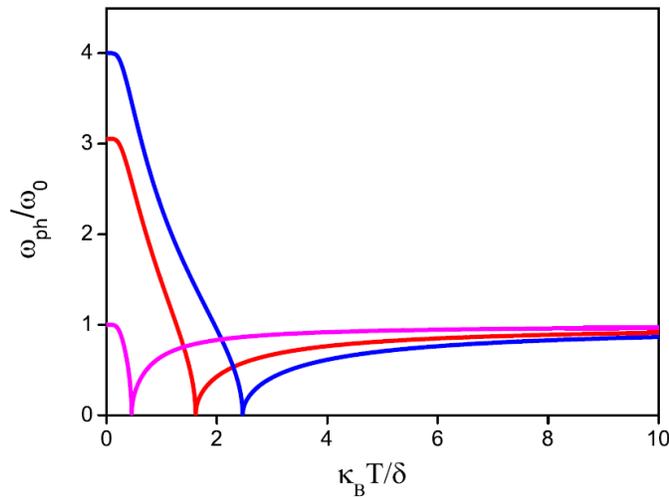


Рисунок 6 – Зависимость $\frac{|\omega_R|}{\omega_0} \left(\frac{2T}{E}\right)$

Поведение системы не может быть описано с помощью уравнения, в котором частота принимает комплексные значения при температурах ниже температуры фазового перехода, таким образом ниже фазового перехода описание должно быть иным. Частоты фотонов вблизи минимума потенциала $U(q)$ имеют следующее значение:

$$\omega_{ph} = \sqrt{\hbar} = \sqrt{2|\omega_R^2|} = \sqrt{2}|\omega_R|, \quad (36)$$

Разница между энергетическими уровнями, созданными в виду расщепления низших уровней в системе, равна:

$$\Delta_0 = \omega_{ph} e^{-D}, \quad (37)$$

здесь принято, что $D = \int_{-a}^a |P| dQ \approx 2\sqrt{\frac{|\omega_R^2|}{\lambda}}$.

Корреляционная функция может быть получена в следующем виде:

$$C(t) = \langle Q(t)Q(0) \rangle = \sum_n \rho_n \sum_m e^{i(E_n - E_m)t} |\langle m|Q|n \rangle|^2. \quad (38)$$

Мы будем считать только самые низкие уровни и следующие первые за ними, так как необходимо определение разницы в энергии между ними. Имея в виду, что $\omega_{ph} Q_0^2 \gg 1$, получим:

$$\Delta_1 = -\frac{Q_0^4 \omega_{ph}^3 \sqrt{\pi}}{4} e^{-\omega_{ph} Q_0^2}. \quad (39)$$

Имея все необходимые данные, мы можем получить полное определение корреляционной функции:

$$\begin{aligned} C(t) = & \left(\frac{1}{2} Q_0^2 e^{-i\Delta_0 t} + 4\omega_{ph} Q_0^4 e^{i\omega_{ph} t} \right) e^{-\frac{\Delta_0}{2T}} + \left(\frac{1}{2} Q_0^2 e^{i\Delta_0 t} + 4\omega_{ph} Q_0^4 e^{i\omega_{ph} t} \right) e^{\frac{\Delta_0}{2T}} + \\ & + \left(4\omega_{ph} Q_0^4 e^{-i\omega_{ph} t} + 2^7 \omega_{ph}^2 Q_0^6 e^{i\Delta_1 t} \right) e^{\frac{\Delta_1 - 2\omega_{ph}}{2T}} + \left(4\omega_{ph} Q_0^4 e^{-i\omega_{ph} t} + \right. \\ & \left. 2^7 \omega_{ph}^2 Q_0^6 e^{-i\Delta_1 t} \right) e^{-\frac{\Delta_1 + 2\omega_{ph}}{2T}}, \end{aligned} \quad (40)$$

здесь полагаем, что $Q_0 = \pm \sqrt{\frac{6|\omega_R^2|}{\lambda}}$.

В итоге, зависимость коэффициента прохождения от частоты будет иметь следующий вид

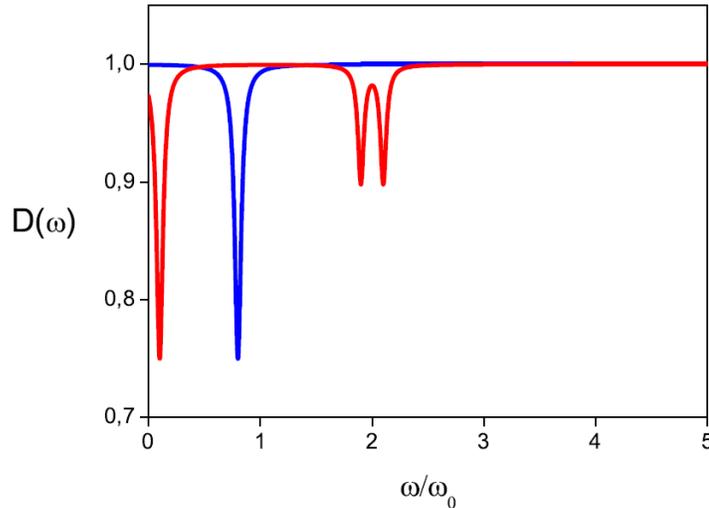


Рисунок 7 зависимость коэффициента прохождения от частоты. При низких температурах (красная линия) виден двойной резонанс.

¹ MA Iontsev, SI Mukhin, and MV Fistul, Double resonance response of a superconducting quantum metamaterial: Manifestation of nonclassical states of photons, Physical Review B 94, 174510 (2016).

В низкотемпературной когерентной фазе фотонного поля наблюдается двойной резонанс, проявляющийся в виде двух близко расположенных резких минимумов на зависимости коэффициента прохождения от частоты, это явление обусловлено биениями фотонного поля между двумя состояниями с разной поляризацией.

В Главе 3 изучено резонансное взаимодействие электромагнитной волны с единичным кубитом и ансамблем кубитов, построены дисперсионные соотношения для фотонного поля. В нелинейном режиме обнаружены серые и темные солитоны.

Было получено эффективное уравнение распространения электромагнитной волны в среде, состоящей из ансамбля кубитов, которое имеет следующий вид:

$$\ddot{M} - v^2 M'' - \frac{\beta}{m} \sum_k \delta(x - x_k) \int dt_1 K(t - t_1) M(x, t_1) = 0. \quad (41)$$

В данном выражении ядро имеет следующий вид:

$K(t - t_1) = \pi \sin(E_J(t - t_1)) \operatorname{sgn}(t - t_1) e^{-\left| (t-t_1) \sqrt{\frac{1}{\tau^2} + 4M^2} \right|}$, а $M(x, t)$ определяет пространственную и временную зависимость распределенного заряда в резонаторе.

Рассмотрим систему, в которой соблюдаются условия: $lk \ll 1$ и $\tau M \ll 1$, причем расположение кубитов неупорядоченное, то есть можно предположить, что они сосредоточены в одной точке.

Из уравнения движения получается следующее уравнение дисперсии:

$$\omega^2 - k^2 v^2 + \frac{\beta N}{ml} \int dt_1 K(t - t_1) e^{i\omega t_1} = 0, \text{ где } K(t - t_1) = \pi \sin(E_J(t - t_1)) \operatorname{sgn}(t - t_1) e^{-\left| \frac{t-t_1}{\tau} \right|}. \quad (42)$$

Интегрируя уравнение по t_1 , получим финальную форму:

$$\omega^2 - k^2 v^2 + \pi \frac{\beta N}{ml} \left(\frac{\omega + E_J}{(\omega + E_J)^2 + \frac{1}{\tau^2}} - \frac{\omega - E_J}{(\omega - E_J)^2 + \frac{1}{\tau^2}} \right) = 0. \quad (43)$$

Далее будем полагать, что диссипация равна $\frac{1}{E_J \tau} = 0,1$, где τ – время релаксации в системе.

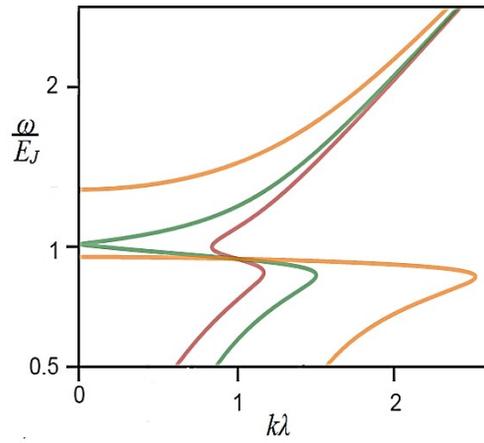


Рисунок 8 – Дисперсионная картина для совокупности потоковых кубитов, собранных в одной точке, взаимодействующих с электромагнитной волной $\theta = 0,1$ (красный) $\theta = 0,2641053$ (зеленый) $\theta = 1$ (желтый), $\frac{v}{E_J} = \lambda$, $\frac{\pi\beta N}{mlE_J^3} = \theta$.

В модели потоковых кубитов верно следующее соотношение $E_J = \sqrt{u^2 + p_0^2}$, а дисперсионная картина с таким соотношением принимает следующий вид:

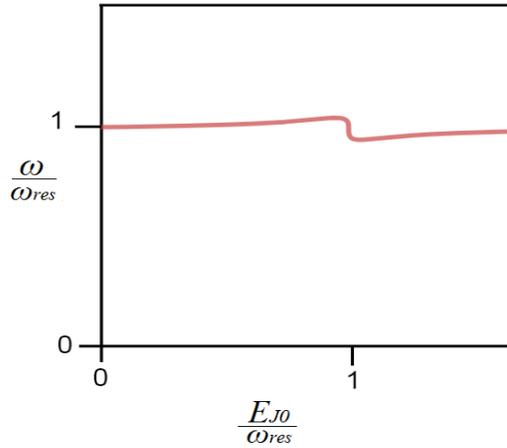


Рисунок 9 – Дисперсионная картина для совокупности зарядовых кубитов, собранных в одной точке, взаимодействующих с электромагнитной волной $\theta = 0.02$, $\frac{p_0}{kv} = 0.1$, $\pi \frac{\beta N}{mlk^3v^3} = \theta$.

Для сравнения дисперсионного соотношения в линейном случае мы также рассмотрим трансмонные кубиты, для которых верно следующее соотношение: $E_J = E_{J0} \left| \cos \left(\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} \right) \right|$. Таким образом, дисперсионная картина примет вид:

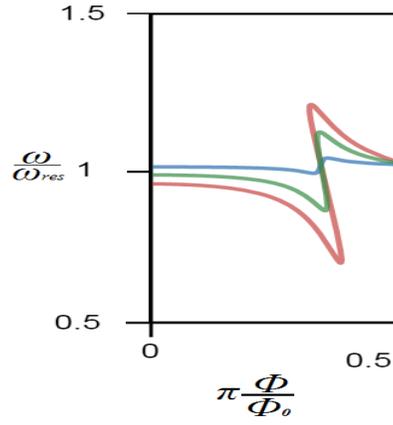


Рисунок 10 – Дисперсионная картина для совокупности трансмонных кубитов, собранных в одной точке, взаимодействующих с электромагнитной волной $\theta = 0.01$ (голубой), $\theta = 0.07$ (красный), $\theta = 0.05$ (зеленый) $\pi \frac{\beta N}{mlk^3v^3} = \theta$,

$$\frac{E_{J0}}{kv} = 2.$$

Аналогичный результат получается и в модели компактно периодически расположенных кубитов. Уравнение движения имеет вид:

$$\ddot{M} - v^2 M'' - \frac{\beta}{m} \sum_n \delta(x + ln) \int dt_1 K(t - t_1) M(x, t_1) = 0. \quad (44)$$

Дисперсионное соотношение получается из решения трансцендентного уравнения: $\cos(kl) = \frac{u(\omega)}{v\omega} \sin(v\omega l) + \cos(v\omega l)$, где $u = -\beta K(\omega) = -\frac{\beta}{m} \frac{E_J - \omega}{\frac{1}{\tau^2} + (E_J - \omega)^2}$.

В случае, когда $kl \ll 1$, получим:

$$\left(\frac{\omega}{E_J}\right)^2 - \left(\frac{kv}{E_J}\right)^2 - \frac{v^2 \beta}{ml^2 E_J^3} \frac{E_J}{\omega} \frac{\frac{\omega}{E_J} - 1}{\left(1 - \frac{\omega}{E_J}\right)^2 + \frac{1}{E_J^2 \tau^2}} = 0. \quad (45)$$

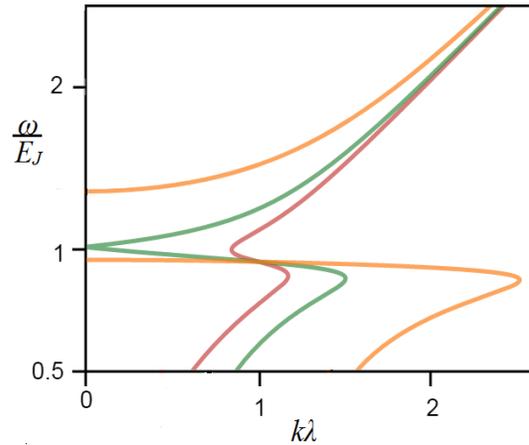
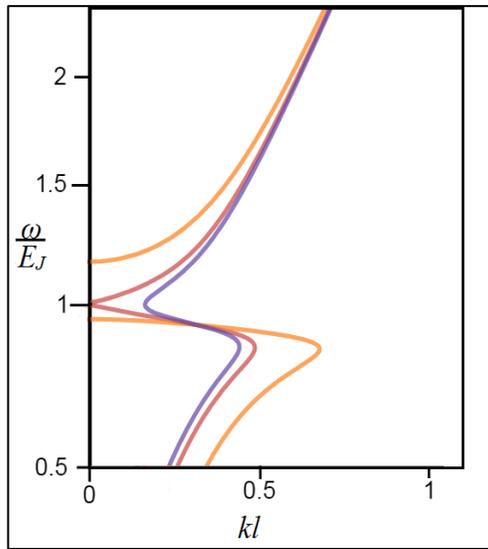


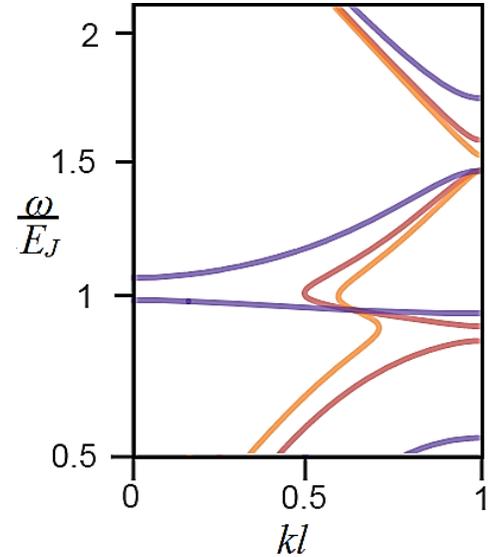
Рисунок 11 – Дисперсионная картина для совокупности потоковых кубитов, расположенных периодически, взаимодействующих с электромагнитной волной $\theta = 0,1$ (красный) $\theta = 0,26$ (зеленый) $\theta = 1$ (жёлтый) $\frac{v^2 \beta}{ml^2 E_J^3} = \theta$.

Сравнивая графические результаты, находим совпадение дисперсионных соотношений, полученных в моделях концентрированного расположения кубитов и компактно периодически расположенных кубитов.

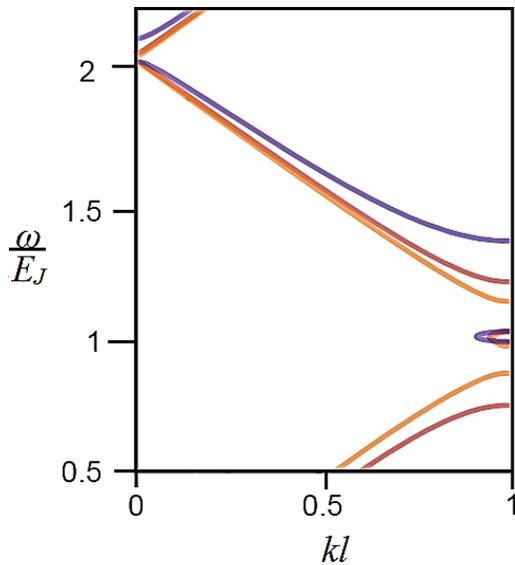
Рассмотрим теперь приближение, в котором $kl \gg 1$, тогда графические результаты будут выглядеть так при следующих параметрах: $\frac{v}{E_J} = \lambda$ и $l \cdot \frac{\beta}{mE_J} = \theta = 1$.



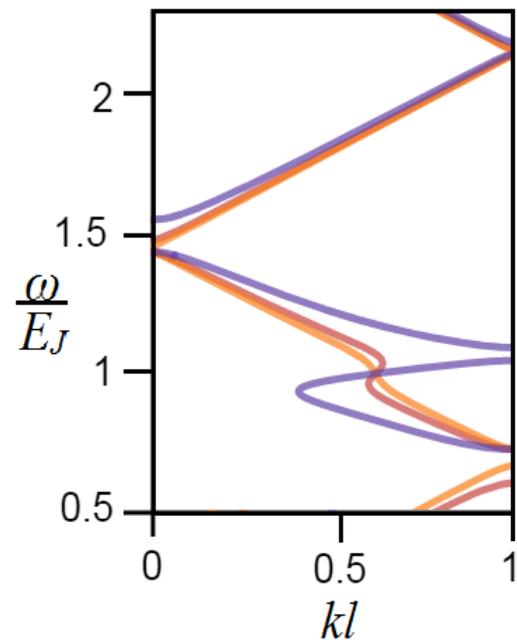
(a) $l/\lambda = 1$



(b) $l/\lambda = 2$



(c) $l/\lambda = 3$



(d) $l/\lambda = 4$

Рисунок 12 – Дисперсионная картина для совокупности потоковых кубитов, расположенных периодически, взаимодействующих с электромагнитной волной

Рассмотрим теперь нелинейный случай, в котором появляются серые и темные солитоны.

Ядро уравнения движения имеет вид:

$$K(t - t_1) = \int d\omega \frac{E_J - \omega}{\frac{1}{\tau^2} + 4\omega_{ph} E_{CJ} M^2 + (E_J - \omega)^2} \cos(\omega(t - t_1)). \quad (46)$$

В нелинейном случае ядро зависит от амплитуды электромагнитной волны M в следующем виде:

$$\frac{E_J - \omega}{\frac{1}{\tau^2} + 4\omega_0 E_{CJ} M^2 + (E_J - \omega)^2} \approx \frac{E_J - \omega}{(E_J - \omega)^2 + \frac{1}{\tau^2}} - \omega_{ph} E_{CJ} \frac{4(E_J - \omega) M^2}{((E_J - \omega)^2 + \frac{1}{\tau^2})^2}. \quad (47)$$

В таком случае уравнение движения примет следующую форму:

$$\ddot{M} - v^2 M'' - \frac{\beta N}{m} \int dt_1 (K^0 M(x, t_1) - K^1 M^3(x, t_1)) = 0 \quad (548)$$

Нелинейный член может быть определён как:

$$\kappa_{nl}(\omega) = -\frac{\zeta}{2\omega v} |\tilde{M}_0|^2 K^1(\omega), \quad (49)$$

где приняты следующие обозначения: $\zeta = \frac{\beta}{m} N = \frac{\omega_0 \omega_J}{8Lm}$.

Подставляя значения волновых векторов в уравнение движения, и применяя Фурье-преобразования, получим:

$$iM_0' = -ik_1 M_0 + \frac{k_2}{2} \ddot{M}_0 - k_{nl} M_0 |M_0|^2. \quad (50)$$

В силу того, что нас интересует только эволюция формы солитона, можно осуществить следующее преобразование: $T = t - k_1 x$, что преобразует уравнение динамики в следующую форму:

$$iM_0' - \frac{k_2}{2} \ddot{M}_0 + k_{nl} M_0 |M_0|^2 = 0. \quad (51)$$

Решения можно искать для двух различных случаев, а именно: для ситуации с нормальной дисперсией $k_2 > 0$, и аномальной $k_2 < 0$.

Рассмотрим случай с аномальной дисперсией. В случае с аномальной дисперсией уравнение динамики примет следующий вид:

$$iM_0' + \frac{|k_2|}{2} \ddot{M}_0 + k_{nl} M_0 |M_0|^2 = 0. \quad (52)$$

Это уравнение для временных солитонов. Введем следующие обозначения:

$L_d = \frac{T_0^2}{k_2}$ - расстояние, распространившись на которое вдоль оси x , необходимо учитывать линейные эффекты эволюции солитона д; $L_{nl} = \frac{1}{k_{nl}}$ - длина, на которой необходимо учитывать также и нелинейные эффекты; T_0 - ширина солитона; $\tau = \frac{t}{T_0}$; $\chi = \frac{x}{L_d}$; $N^2 = \frac{L_d}{L_{nl}}$ - порядок солитона.

Уравнение динамики может быть переписано в вышеуказанных обозначениях:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 M_0}{\partial \tau^2} + i \frac{\partial M_0}{\partial \chi} + N^2 M_0 |M_0|^2 = 0, \quad (53)$$

Солитоны могут быть решениями этого уравнения в трех разных случаях, описываемых ниже.

А) Когда $N \ll 1$, $l \approx L_d$, $l \ll L_{nl}$, то нелинейными эффектами можно пренебречь, а Фурье-образ решения для среды длиной l имеет вид:

$$\tilde{M}_0(\chi, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int d\omega \tilde{M}_0(0, \omega) \exp\left(i\omega \left(\frac{\omega T_0^2}{2} \chi - \tau\right)\right). \quad (54)$$

$$\tilde{M}_0(0, \omega) = \int d\tau M_0(0, \tau) \exp(i\omega\tau). \quad (55)$$

Если предположить, что изначально солитон имел гауссову форму $M_0(0, \tau) = \exp\left(-\frac{\tau^2}{2T_0^2}\right)$, то решение динамического уравнения принимает вид:

$$M_0(\chi, \tau) = \sqrt{\frac{1}{1-i\chi}} \exp\left(\frac{\tau^2}{2T_0^2(1-i\chi)}\right). \quad (56)$$

Этот солитон сохраняет неизменной свою форму в пространстве в процессе распространения, но его ширина становится увеличивается:

$$W(\chi) = T_0 \sqrt{1 + \chi^2}. \quad (57)$$

Другая форма решения может быть описана как:

$$M_0(\chi, \tau) = |M_0(\chi, \tau)| \exp(i\phi(\chi, \tau)) \quad , \quad (58)$$

$$\phi(\chi, \tau) = \frac{\chi}{1+\chi^2} \frac{\tau^2}{T_0^2} + \frac{1}{2} \tan^{-1}(\chi) \quad . \quad (59)$$

Б) Когда $N \gg 1$, $l \ll L_d$, $l \approx L_{nl}$ и начальная форма солитона имеет гауссову форму $M_0(0, \tau) = \exp\left(-\frac{\tau^2}{2T_0^2}\right)$, то уравнение принимает следующий вид:

$$i \frac{\partial M_0}{\partial \chi} + \frac{1}{L_{nl}} M_0 |M_0|^2 = 0. \quad (60)$$

А решение:

$$M_0(\chi, \tau) = M_0(0, \tau) \exp(i\phi_{nl}(\chi, \tau)). \quad (61)$$

$$\phi_{nl}(\chi, \tau) = N^2 |M_0(0, \tau)|^2 \chi. \quad (62)$$

В) Когда $l > L_d$, $l > L_{nl}$, то необходимо учитывать как линейные, так и нелинейные эффекты. Решение будет стабильным только, если $L_l \approx L_{nl}$. Решение уравнения для $N^2 = 1$ имеет следующую форму:

$$M_0(\chi, \tau) = \operatorname{sech}(\tau) e^{\frac{i\chi}{2}}. \quad (63)$$

Этот вид солитона называется оптическим, так как не изменяет свою форму в процессе распространения. В случае $N^2 = 2$, решение принимает следующую форму:

$$M_0(x, t) = \frac{4(\cosh(3\tau) + 3e^{4i\chi} \cosh(\tau)) e^{\frac{i\chi}{2}}}{\cosh(4\tau) + 4 \cosh(2\tau) + 3 \cos(4\chi)} \quad . \quad (64)$$

Этот солитон изменяет свою форму периодически с периодом: $\chi = \frac{\pi}{2}$.

Рассмотрим случай с нормальной дисперсией. Уравнение принимает форму:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 M_0}{\partial \tau^2} - i \frac{\partial M_0}{\partial \chi} - N^2 M_0 |M_0|^2 = 0, \quad (65)$$

А) Когда $N \ll 0, l \approx L_d, l \ll L_{nl}$ и изначальная форма солитона гауссова $M_0(0, \tau) = \exp\left(-\frac{\tau^2}{2T_0^2}\right)$, то решение имеет вид:

$$M_0(\chi, \tau) = \sqrt{\frac{1}{1+i\chi}} \exp\left(\frac{\tau^2}{2T_0^2(1+i\chi)}\right). \quad (66)$$

Его можно переписать в следующей форме:

$$M_0(\chi, \tau) = |M_0(\chi, \tau)| \exp(i\phi(\chi, \tau)). \quad (67)$$

$$\phi(\chi, \tau) = -\frac{\chi}{1+\chi^2} \frac{\tau^2}{T_0^2} - \frac{1}{2} \tan^{-1}(\chi). \quad (68)$$

Б) Когда $N \gg 1, l \ll L_d, l \approx L_{nl}$, а изначальная форма солитона гауссова $M_0(0, \tau) = \exp\left(-\frac{\tau^2}{2T_0^2}\right)$, то решение имеет вид:

$$M_0(\chi, \tau) = M_0(0, \tau) \exp(i\phi_{nl}(\chi, \tau)). \quad (69)$$

$$\phi_{nl}(\chi, \tau) = -N^2 |M_0(0, \tau)|^2 \chi. \quad (70)$$

В) Когда $l > L_d, l > L_{nl}$, то возникают как линейные, так и нелинейные эффекты.

Решение для $N^2 = 1$ принимает форму $M_0(\chi, \tau) = \tanh(\tau) \exp(i\chi)$ и находится в случае, если параметры принимают следующие значения:

$$v''(\infty) = 0, v'(\infty) = 0; v(\infty) = v_0 = 1. \quad (71)$$

Темные солитоны высших порядков $M_0(\chi, \tau) = \tanh(N\tau) \exp(i\chi N^2)$ не стабильны в процессе распространения². Серые же стабильны и выражаются в качестве следующего решения:

$$M_0(\chi, \tau) = \exp(i\alpha\chi) v(\tau) \exp(ig(\tau)), \quad (72)$$

При этом полагаем, что $v = \sqrt{1 - B^2 \operatorname{sech}^2(N\tau)}$, $g = \beta B^2 \left(\tau - \frac{B \operatorname{atanh}\left(B \tanh\left(\frac{N\tau}{\sqrt{1-B^2}}\right)\right)}{N\sqrt{1-B^2}} \right)$ ³.

Коэффициент «темноты» солитона может быть найден из системы уравнений:

² I.V. Barashenkov *Stability Criterion for Dark Solitons*, Physical Review letters, Volume 77, 12 August 1996 Number 7

³ H. Hasegawa and Y. Kodama, *Solitons in Optical Communications* (Oxford University Press, New York, 1995).

$$\left\{ \begin{array}{l} B^2 = \frac{3N^2}{2\alpha + N^2}; \\ c = \frac{2\alpha - N^2}{12}; \\ \beta = 2 \frac{\left(\frac{2\alpha}{N^2} + 1\right)^2 (\alpha - N^2)}{27}; \\ v_0 = \frac{1}{B}. \end{array} \right. \quad (73)$$

Решение системы может быть найдено только, когда

$$v''(\infty) = 0, v'(\infty) = 0; v(\infty) = v_0. \quad (74)$$

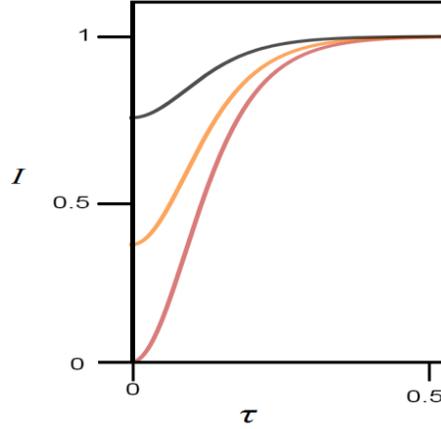


Рисунок 13 – Зависимость интенсивности солитона $I = |M_0|^2$ от τ для разных солитонов $B=1$ (красный), $B=0.8$ (желтый), $B=0.5$ (серый)

В Главе 4 был изучен коэффициент прохождения электромагнитных волн в случае резонансного взаимодействия кубитов с полем резонатора. Как в случае одного кубита, так и в случае ансамбля кубитов, было обнаружено резонансное уменьшение значения коэффициента прохождения. Однако для определенных значениях частот и в случае сильно взаимодействия между кубитами и резонатором было найдено резкое увеличение коэффициент прохождения. Увеличение коэффициента прохождения было также найдено в нелинейном случае, когда мощность падающей волны больше критической.

Уравнение динамики, которое будем исследовать в случае одного кубита, имеет следующий вид:

$$v^2 M_0'' + M_0 \left(\omega_f^2 + \delta(x) \frac{\alpha \left((2\varepsilon_j - \omega_f) + \frac{i}{T_2} \right)}{\gamma^2 |M|^2 + (2\varepsilon_j - \omega_f)^2 + \frac{1}{T_2^2}} \right) = 0. \quad (75)$$

Рассмотрим линейный случай.

В данном случае ядро не зависит от квадрата модуля амплитуды электромагнитной волны,

Для коэффициента прохождения было получено следующее выражение:

$$|d|^2 = \frac{1}{\left(1 + i \frac{f}{2kv^2}\right) \left(1 - i \frac{f^*}{2kv^2}\right)} = \frac{1}{1 + \frac{|f|^2}{4\omega_f^2 v^2}}, \quad (76)$$

где параметр f определяется как:

$$f = \alpha^2 \frac{\left((2\varepsilon_j - \omega_f) + \frac{i}{T_2} \right) \left((2\varepsilon_j - \omega_f) - \frac{i}{T_2} \right)}{\left((2\varepsilon_j - \omega_f)^2 + \frac{1}{T_2^2} \right)^2} = \frac{\alpha^2}{(2\varepsilon_j - \omega_f)^2 + \frac{1}{T_2^2}} . \quad (77)$$

Таким образом, окончательный вид коэффициента прохождения имеет вид:

$$D = |d|^2 = \frac{1}{1 + \frac{\alpha^2}{4v^2 \omega_f^2 (E_j - \omega_f)^2 + \frac{1}{T_2^2}}} . \quad (78)$$

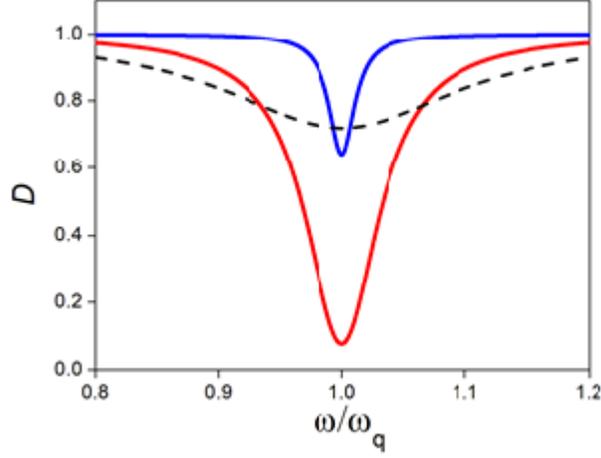


Рисунок 14 – Зависимость коэффициента прохождения от частоты электромагнитной волны в линейном случае для одного кубита, встроенного в линию передачи, $D \left(X = \frac{\omega}{\omega_q} \right) \theta = 0,01$ (синий), $\theta = 0,001$ (красный), $\theta = 0,005$ (штрих)

Рассмотрим нелинейный случай.

В нелинейном случае ядро уравнения движения зависит от квадрата модуля амплитуды электромагнитной волны:

$$v^2 M_0'' + M_0 \left(\omega_f^2 + \delta(x) \frac{\alpha \left((2\varepsilon_j - \omega_f) + \frac{i}{T_2} \right)}{(2\varepsilon_j - \omega_f)^2 + \gamma^2 |M|^2 + \frac{1}{T_2^2}} \right) = 0 . \quad (79)$$

Окончательная зависимость коэффициента прохождения от частоты имеет следующий вид:

$$D = |d|^2 = \frac{P_0}{\left(1 + \frac{\alpha^2}{2\omega_f^2 v^2} \frac{(2\varepsilon_j - \omega_f)^2 + \frac{1}{T_2^2}}{\left((2\varepsilon_j - \omega_f)^2 + \gamma^2 |d|^2 + \frac{1}{T_2^2} \right)^2} \right)} . \quad (80)$$

Исследуя зависимость $D(P_0)$, получим следующую безразмерную функцию:

$$\frac{D}{P_0} = \frac{1}{\left(1 + \frac{\theta}{X^2} \frac{(1-a)^2 + \delta^2}{\left((1-a)^2 + \gamma^2 \frac{D}{P_0} P_0 + \delta^2 \right)^2} \right)} , \quad (81)$$

здесь приняты следующие обозначения: $\delta = \frac{1}{E_j T_2}$.

Типичные зависимости коэффициента прохождения от мощности сигнала для разных значений параметров (сила взаимодействия и диссипация) представлены на рисунках 15-16.

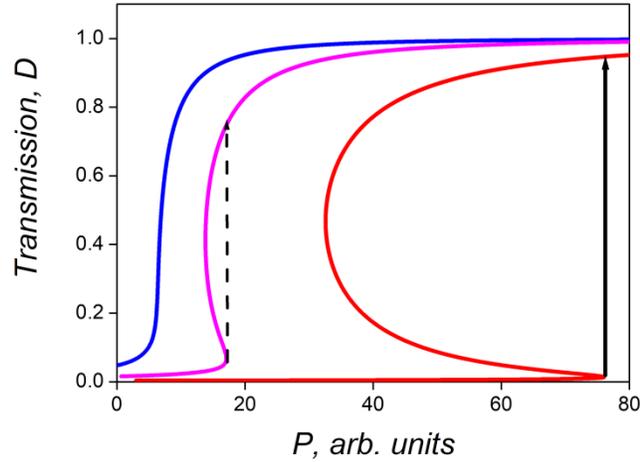


Рисунок 15 – Зависимость коэффициента прохождения от мощности электромагнитной волны для различных значений силы взаимодействия: $D(P_0)$, $\theta=0.09$ (синяя линия), $\theta=0.16$ (лиловая линия), $\theta=0.35$ (красная линия).

Также был найден коэффициент прохождения электромагнитной волны через цепочку периодически расположенных кубитов. В узельном представлении уравнение движения можно записать в следующей форме:

$$M_{0_{l+1}} + M_{0_{l-1}} - 2 \left(M_{0_l} \cos(kl) - \frac{f(M_{0_l})}{2vk^2} \sin(kl) \right) = 0. \quad (82)$$

Рассмотрим модель плотно расположенных кубитов, когда:

$$kl \ll 1. \quad (83)$$

В линейном режиме получим коэффициент прохождения:

$$D = \left| \frac{M_0(Nl)}{M_0(0)} \right| = \left| \cos \left(\frac{\omega_f}{v} L \sqrt{\alpha K(\omega_f)} \right) + i \frac{\sqrt{\alpha K(\omega_f)}}{2} \sin \left(\frac{\omega_f}{v} L \sqrt{\alpha K(\omega_f)} \right) \right|^{-1} \quad (84)$$

Здесь приняты следующие обозначения: $K(\omega_f) = \alpha \frac{((2\varepsilon_j - \omega_f) + \frac{i}{T_2})}{(2\varepsilon_j - \omega_f)^2 + \frac{1}{T_2^2}}$, $\frac{\alpha}{E_j} = p$, $\frac{E_j L}{v} = q$, $\lambda = \frac{v}{E_j}$.

В общем случае коэффициент прохождения показывает резонансный минимум но при больших значениях силы взаимодействия было найдено узкополосное увеличение коэффициента прохождения (Рис. 16). Количество резонансных пиков на зависимости коэффициента прохождения от частоты возрастает с увеличением длины резонатора и уменьшением длины волны (показано на Рис. 17).

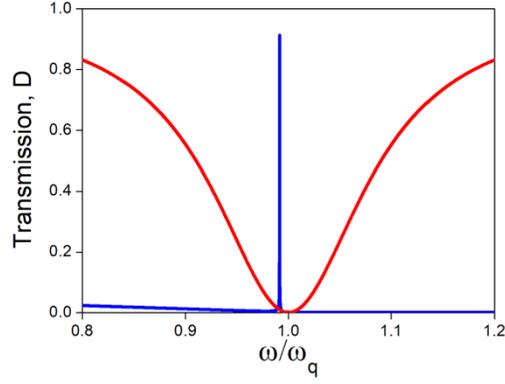


Рисунок 16 – Зависимость коэффициента прохождения от частоты электромагнитной волны $D\left(X = \frac{\omega}{\omega_q}\right)$ $\delta = 0.01, p = 9$ (красный), $p = 900$ (синий).

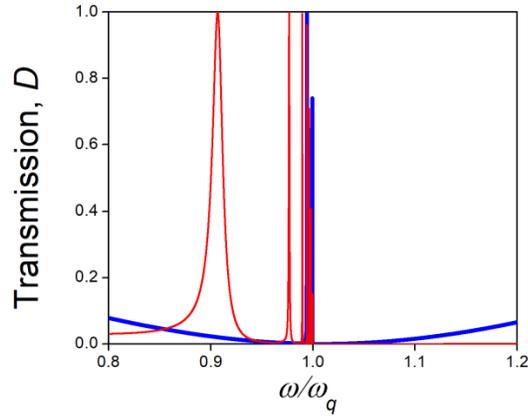


Рисунок 17 – Зависимость коэффициента прохождения от частоты электромагнитной волны $D\left(X = \frac{\omega}{\omega_q}\right)$ $p = 10, kl = 0.32$ (красный), $kl = 0.08$ (синий).

Рассмотрим случай, когда ядро уравнения зависит от квадрата модуля амплитуды электромагнитной волны. Уравнение движения в таком случае примет вид:

$$v^2 M_0'' + M_0 \left(\omega_f^2 + \delta(x) \frac{\alpha \left((2\varepsilon_j - \omega_f) + \frac{i}{T_2} \right)}{\gamma^2 |M|^2 + (2\varepsilon_j - \omega_f)^2 + \frac{1}{T_2^2}} \right) = 0. \quad (85)$$

Из уравнения (85) примем, что $M_0 = r(x)e^{i\phi(x)}$, а $|M_0| = r$, пространственное распределение фазы электромагнитного поля определяется уравнением:

$$r^2 \frac{d\phi}{dx} = C, \quad (86)$$

а пространственное распределение амплитуды электромагнитного поля уравнением:

$$\frac{d}{dx} \left(r'^2 + \frac{C^2}{r^2} + r^2 (k^2 + R(r)) \right) = 0. \quad (87)$$

В уравнении (87) введена функция:

$$R(M_0) = \frac{\alpha}{v^2} \frac{2\varepsilon_j - \omega_f}{\gamma^2 |r|^2 + (2\varepsilon_j - \omega_f)^2 + \frac{1}{T_2^2}}, \quad (88)$$

а C – константа, определяемая из граничных условий:

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \ln q(l) = ik, \\ A + B = q(0), \\ A - B = \frac{q'(0)}{ik}. \end{cases} \quad (89)$$

Здесь считается, что $A \propto \sqrt{P}$, а P – мощность падающей электромагнитной волны. Коэффициент прохождения определяется, как $D = \left| \frac{q(l)}{A} \right|^2$. Решение уравнения (88) принимает следующий вид:

$$\int_{r(0)}^{r(l)} \frac{du}{\sqrt{E - \frac{C^2}{u^2} - u^2 k^2 - a \ln(u^2 + b^2)}} = l, \quad (89)$$

где $a = \frac{\alpha}{v^2} (2\varepsilon_j - \omega_f)$, $b^2 = (2\varepsilon_j - \omega_f)^2 + \frac{1}{T_2^2}$, а $C = kr^2(l)$.

Рассмотрим случай не очень сильного взаимодействия электромагнитной волны с кубитами, и достаточно большой длины системы, $kl \gg 1$. Принимая приближение: $|r_l - r_0| \ll r_0$, получим выражение для коэффициента прохождения:

$$\frac{1}{D} = 1 + \left(\frac{al}{2k^2 b^2 (PD+1)} \right)^2. \quad (90)$$

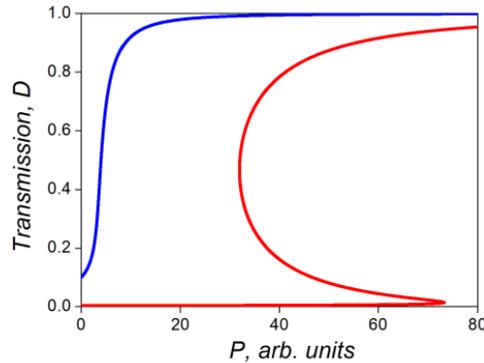


Рисунок 18 – Зависимость коэффициента прохождения от мощности электромагнитной волны для цепочки кубитов - нелинейный режим: $\frac{al}{2k^2 b^2} = 4$ (синий), $\frac{al}{2k^2 b^2} = 17$ (красный).

В Заключение описаны основные выводы, касающиеся видов дисперсионных соотношений и поведения коэффициента прохождения в зависимости от частоты электромагнитного поля.

Публикации автора по теме диссертации:

Из списка ВАК, WoS:

1. М.А. Iontsev, М. V. Fistul, Electromagnetic waves propagation through an array of superconducting qubits: manifestations of non-equilibrium steady states of qubits, *Phys. Rev. A* **100**, (2019)

2. MA Iontsev, SI Mukhin, and MV Fistul, Double-resonance response of a superconducting quantum metamaterial: Manifestation of nonclassical states of photons, *Phys. Rev. B* **94**, 174510 (2016).

Список литературы

1 Mukhin S.I Instanton Sector of correlated electron systems as the origin of populated pseudo-gap and flat “Band” Behavior: analytic solution // Springer Science + Business Media. - 2009.

2 Jerger M Ustinov A. V, Spectroscopy of a Qubit Array via a Single Transmission Line // PACS numbers: 03.67.Lx 85.25 - 2011.

3 Шмидт В.В. Введение в физику сверхпроводимости. - М.: МЦНМО, 2000.

4 Кравченко В.Ф. Электродинамика сверхпроводящих структур. Теория, алгоритмы и методы вычислений. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006.

5 Де-Жен П. Сверхпроводимость металлов и сплавов. - М.: МИР, 1968.

6 Лифшиц И.М. Кирпиченков В.Я, О туннельной прозрачности неупорядоченных систем. - М.: Наука, 1979.

7 Shevchenko S.N., Omelyanchouk A.N. Multiphoton transitions in Josephson-junction qubits //Low Temperature Physics.Fizika Nizkikh Temperatur - 2012.

8 Пайерлс Р. Точное решение модели Пайерлса с произвольным числом электронов на элементарную ячейку. - М.: Издательство иностранной литературы, 1965.

9 Смолянов О.Г, Шавгулидзе Е.Т. Континуальные интегралы. - М.: МГУ 1990.

10 Зинн-Жюстен Ж. Континуальный интеграл в квантовой механике. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010.

11 Маслов В.П. Комплексные Марковские цепи и континуальный интеграл в квантовой механике. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007.

12 Шестакова Т.П. Метод континуального интеграла в квантовой теории поля. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001.

13 Брагута В.В. Континуальный интеграл в физике. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009.

14 Свидзинский А.В. Пространственно-неоднородные задачи теории сверхпроводимости. - М.: Наука, 1982.

15 Ландау Л.Д, Лифшиц Е.М. Теоретическая физика том V: Статистическая физика, часть I. - М.: Наука, 1976.

16 Ландау Л.Д, Лифшиц Е.М. Теоретическая физика том IX: Статистическая физика, часть II, теория конденсированного состояния. - М.: Наука 1976.

17 Квасников И.А, Термодинамика и статистическая физика. Том 4: квантовая статистика. - М.: Наука, 2005.

18 Fradkin E. Field theories of condensed matter systems. - М.: Наука, 1991.

19 S. I. Mukhin¹ and M. V. Fistul, “Generation of non-classical photon states in superconducting quantum metamaterials”, *Superconductor Science and Technology*, vol. 26, 084003 (2013).

20. Богуш А.А. Введение в калибровочную полевую теорию электрослабых взаимодействий. - М.: Наука 2003.

21. S. I. Mukhin, «Spontaneously broken Matsubara's time invariance in fermionic system: macroscopic quantum ordered state of matter», *J. Supercond. Nov. Magn.*, vol. 24, 1165-1171 (2011).

22 Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. Том 2. - М.: Наука, 1973.