На правах рукописи

МЕЛЬНИКОВ АЛЕКСАНДР ГЕННАДЬЕВИЧ

ПРОБЛЕМЫ КЛАССИФИКАЦИИ И КОНСТРУКТИВНЫЕ МОДЕЛИ

01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ

Диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Новосибирск — 2019

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном учреждении науки «Институт математики им. С. Л. Соболева» Сибирского отделения Российской академии наук.

Научный консультант:	доктор физико–математических наук, академик РАН, профессор Гончаров Сергей Савостьянович
Официальные оппоненты:	доктор физико–математических наук, профессор ФГБУН «Институт систем информатики им. А. П. Ершова СО РАН», г. Новосибирск главный научный сотрудник Селиванов Виктор Львович
	доктор физико–математических наук, профессор «Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева» г. Астана, Казахстан профессор кафедры «Информационные системы» Хисамиев Назиф Гарифуллинович
	доктор физико–математических наук, профессор «Stevens Institute of Technology», г. Хобокен, США заведующий кафедрой математических наук Мясников Алексей Георгиевич
Ведущая организация:	ФГАОУВПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет», г. Казань.

Защита состоится 23 августа 2019 года в 14 часов 00 минут на заседании диссертационного совета Д 003.015.02 в конференц-зале Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН по адресу: 630090, г. Новосибирск, пр. ак. Коптюга, 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН и на сайте math.nsc.ru.

Автореферат разослан “__” __________ 2019 г

Ученый секретарь
диссертационного совета
кандидат физико-математических наук,
доцент А.И. Стукачев

Диссертация содержит серию результатов структурного характера, в которых методами теории рекурсии доказывается или опровергается существование удобной классификации в естественных алгебраических классах. Мы будем рассматривать проблемы классификации с точки зрения наличия удобного перечисления элементов в классе, а также используя оценки сложности индексных множеств. Некоторые другие подходы подробно изложены в [16]. При помощи этих методов нам удастся оценить сложность некоторых проблем классификации как в конструктивной, так и в классической алгебре.

Актуальность темы. Многие задачи современной математики тесно связаны с проблемой классификации тех или иных алгебраических структур. Возникают естественные вопросы: Какую классификацию можно считать удобной, а какую - нет? Как можно *формально* сравнить сложности двух проблем классификации? Можно ли *доказать*, что у данного класса удобной классификации не существует? Эти вопросы оказываются тесно связанными с вопросами алгоритмического характера. Интуитивно, инвариант удобнее, если его проще «посчитать». Потому неудивительно, что в естественных классах эта проблематика соотносится с проблемой описания алгоритмически представимых (конструктивных) алгебраических структур относительно вычислимых изоморфизмов, которая впервые изучалась еще Мальцевым [26, 27]. Такие результаты тоже безусловно имеют характер классификаций, но в данном случае – это уже классификация с точки зрения конструктивной математики. Имеется и нетривиальная техническая связь – это роль оракульной релятивизации в получении результатов о классификациях *не обязательно конструктивных* структур.

В диссертации развивается систематический подход к подобным проблемам. Суть подхода состоит в применении вычислимости [35] и определимости [2] к проблемам классификации в современной математике. Заметим, что эта тематика и близкие к ней подходы на сегодняшний день являются весьма популярными, см. например [16] и книгу [14] .

Класс абелевых групп играет в диссертации особую роль, ведь именно на этом классе тестируются многие подходы к классификации. Проблема описания естественных классов коммутативных групп – это классическая и традиционная тематика [12, 23]. С другой стороны, теория конструктивных абелевых групп восходит к работам Мальцева [27, 26] и является хорошо развитой и технически глубокий отраслью современной математики, см. обзоры [20, 29]. В данной диссертации мы используем теоретико-рекурсивные методы для точной оценки проблем классификации как в конструктивной, так и в общей теории абелевых групп. В частности, получены точные оценки для проблем классификации автоустойчивых (вычислимо категоричных) периодических абелевых групп – эта проблема восходит к Мальцеву. Крое того, среди прочих результатов мы дадим неожиданную верхнюю оценку сложности инвариантов для счетных вполне разложимых групп [3]; заметим, что здесь уже конструктивность группы не играет никакой роли.

На основании общих методов в диссертации предпринята попытка систематизации подхода к подобным проблемам классификации. В частности, выделена особая роль вычислимых отношений эквивалентности и динамических методов построения базиса или прямого разложения. Примечательно, что некоторые разработанные для этих целей методы оказались применимы к изучению таких непохожих на группы структур, как (например) рекурсивные системы эквивалентностей, дифференциально замкнутые поля и атомарные области целостности [51, 52, 53] – эти результаты мы тоже включим в обсуждение. Кульминацией диссертации будет последняя глава, где при помощи методов нового подхода к вычислимому анализу доказано, что некоторые естественные классы сепарабельных компактных топологических групп не имеют (и не могут иметь) удобной системы инвариантов. Будут также извлечены некоторые полезные и нетривиальные следствия о вычислимых топологических группах, в терминах современного вычислимого анализа. В частности, получим точную оценку для проблемы описания вычислимо категоричных рекурсивных ([24, 34]) проконечных абелевых групп. Отметим, что структурная теория топологических групп, основы которой заложил Понтрягин [31], является важным направлением современной математики, а вычислимый анализ – активно развивающаяся и весьма популярная теория, которая (в современном её виде) восходит к Тьюрингу [36, 37], см. книгу [38].

Объектом исследования в диссертации являются: счетные алгебраические системы, в частности счетные абелевы группы, также сепарабельные компактные группы, теоретико-рекурсивные представления этих алгебраических и топологических структур, вычислимые и оракульно-вычислимые изоморфизмы между представлениями, а также индексные множества таких представлений.

Целями исследования данной диссертации являются: построение Фридберговой нумерации структур эквивалентности, описание вычислимо категоричных периодических абелевых групп, получение оценки сложности инвариантов для вполне разложимых групп, построение примеров Δ^0_α-категоричных абелевых групп без кручения, точная оценка проблем классификации для связных и проконечных компактных сепарабельных групп.

Методы исследования. Результаты диссертации получены с использованием методов математической логики и теории вычислимости: метода приоритета с конечными нарушениями, бесконечными нарушениями, монстра Лахлана [35]. Использованы методы теории абелевых групп [12, 13, 23], конструктивных моделей [8, 2] и топологических групп [31]. Кроме того, разработаны новые методы динамического прямого разложения и кодирования в счетные абелевы группы, и предложен новый систематический подход к вычислимому анализу посредством рассмотрения «нестандартных» вычислимых плотных подмножеств сепарабельных пространств.

Научная новизна. На защиту выносятся следующие результаты:

1. Решена *проблема Гончарова-Найт* [16] о Фридберговой нумерации структур эквивалентности. (Результат получен в неразделимом соавторстве с Доуни и Нг, опубликован в [48].)

2. Решена *проблема Мальцева* описания вычислимо-категоричных периодических абелевых групп. (Результат получен в неразделимом соавторстве с Нг, опубликован в [63].)

3. Решена *проблема Гончарова* о построении примеров абелевых групп без кручения с оптимальными семействами Скотта. (Результат получен без соавторов, опубликован в [56].)

4. Получена (неожиданная) оценка Σ^0_7 проблемы классификации

для вполне разложимых групп. (Результат получен в неразделимом соавторстве с Доуни, опубликован в [44].)

5. Получены точные оценки для проблемы классификации связных компактных и проконечных групп. (Результат получен без соавторов, опубликован в [55].)

Все результаты, выносимые на защиту, являются новыми и получены автором самостоятельно либо в неразделимом соавторстве. По материалам диссертации опубликовано 25 научных работ [40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64] в ведущих международных математических журналах, все 25 из которых входят в список ВАК.

Практическая и теоретическая ценность. Работа носит теоретический характер. Результаты могут найти применение в дальнейших исследованиях в коммутативной алгебре и математической логике, а также могут быть использованы в учебном процессе и при чтении спецкурсов.

Связь работы с крупными научными программами. Работа была поддержана следующими грантами: Marsden Fund of New Zealand (2016-2019), Massey University Research Fund (2017), Massey University Early Career Research Medal (2018).

Апробация результатов диссертации. Результаты диссертации по мере их получения докладывались на следующих конференциях:

Computability and Complexity in Analysis (Дармштадт 2014),

International Conference on Algebra, Analysis and Geometry (Казань 2016),

Мальцевские Чтения (Новосибирск 2015, 2017),

New Zealand Congress of Mathematics (2016).

Computability in Europe (Турку, Финляндия, 2017),

ASL North American Annual Meeting (Боисе 2017),

AMS Sectional Meeting (Чарлстон 2017),

Computability and Complexity in Analysis (Кембридж 2012),

Computability Theory (Дагштуль 2017).

Результаты докладывались на семинарах:

Midwest Computability Seminar (Чикаго 2014, 2017), Логический Семинар (Беркли 2015),

Massey INMS Seminar (Окленд 2017).

В целом работа доложена на семинаре Алгебра и Логика (рук. – акад. Ю.Л. Ершов).

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, пяти глав (каждая из которых которых разбита на параграфы), заключения, и списка литературы. Общий объем диссертации составляет 201 страниц. Список литературы содержит 105 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Введение содержит подробное обсуждение основных результатов и некоторые основные понятия, необходимые для последующего изложения. Приведем некоторые из этих сведений.

Напомним, что алгебраическая структура в конечном языке конструктивна (вычислима) [8, 2], если ее носитель, все операции и отношения вычислимы. Многие естественные счетные алгебраические структуры оказываются конструктивными. Все (частично) вычислимые структуры в данном конечном языке могут быть эффективно перечислены:

$$A_0, A_1, A_2, \ldots.$$

Для некоторого свойства P, рассмотрим индексное множество

$$\{i : A_i \text{ удовлетворяет } P\}.$$

Сложность индексного множества P обычно измеряется с использованием арифметической, гиперарифметической или аналитической иерархии [2]. Например, набор индексов вычислимо перечислим относительно проблемы остановки, если существует вычислимый предикат R такой, что индексный набор равен $\{i : \exists x \forall y R(x, y, i)\}$, то есть – если он принадлежит классу сложности Σ^0_2 арифметической иерархии. Такие оценки наиболее полезны, если их можно беспрепятственно релятивизовать относительно любого оракула. Дальнейшие понятия будут определены по мере необходимости.

Первая глава посвящена решению проблемы Гончарова-Найт. Следуя [16], можно считать классификацию в некотором классе «хорошей», если имеется алгоритмическое перечисление конструктивных представителей из каждого типа изоморфизма в данном классе, причем *без повторений*. Такое перечисление называется Фридберговой нумерацией класса. Отметим, что наличие Фридберговой нумерации – очень сильное условие, и весьма немногие естественные классы обладают такой нумерацией [16, 25]. Но даже несмотря на это, с первого взгляда проблема Гончарова-Найт [16] может показаться легко разрешимой:

Проблема 1. [16] Существует ли Фридбергова нумерация вычислимых структур эквивалентности?

Однако у *вычислимых* эквивалентностей есть тонкие теоретико-рекурсивные свойства, связанные с предельно-монотонными функциями [54, 4], а некоторые их деликатные свойства оказываются применимы в изучении конструктивных абелевых групп, линейных порядков и булевых алгебр [20, 29, 17, 18]. Авторами [16] было предложено частичное позитивное решение для естественного подкласса. В последующей работе [25] Лэнг, Миллер и Стейнер получили похожую нумерацию для всего класса, но с использованием проблемы остановки. Только при помощи *неравномерной* версии $0'''$-метода приоритета, или $0^{(3\frac{1}{2})}$-метода приоритета, удается такую Фридбергову нумерацию построить.

Теорема 1 ([48]). *Существует Фридбергова нумерация вычислимых структур эквивалентности.*

Доказательство содержится в §1.1, а следствия теоремы – в §1.2. Например, как элементарное следствие получаем, что существует Фридбергова нумерация (конструктивных) абелевых p-групп Ульмовой длины 1.

Отметим, что Теорема 1 является частью единой обширной программы исследований свойств предельной монотонности [54, 45, 46, 47, 17, 4, 10, 39, 9]). Из наших результатов по этой тематике в диссертацию как основной результат войдет лишь еще один – это теорема из следующей главы.

Вторая глава посвящена решению проблемы Мальцева для периодических абелевых групп.

В начале 60-х Мальцев поставил проблему описания абелевых групп, обладающих единственным вычислимым представлением относительно вычислимых изоморфизмов. Такие группы (более общо – модели) называются *вычислимо категоричными* или *автоустойчивыми*.

Замечание 1. Доуни и Реммель [5] ошибочно приписывают авторство вопроса Гончарову, который, возможно, первым ставил вопрос за пределами СССР. Согласно Назифу Гарифуллиновичу Хисамиеву, проблема восходит к Мальцеву. Этот вопрос и его авторство подробнее обсуждается в [57].

Несмотря на то, что понятие вычислимой категоричности возникло из изучения вычислимых абелевых групп, *полное описание вычислимо категоричных абелевых групп являются открытой проблемой уже более 50 лет.* Тем не менее, мы имеем удовлетворительные описания вычислимой категоричности в нескольких широких подклассах абелевых групп [30, 33, 15]. Оставшиеся два случая - это периодические группы (описаны только p-группы), а также смешанные группы конечного ранга. Как подробно объяснено во введении, надеяться на алгебраическое описание – «ясное» или нет – не приходится. Решение оказалось неожиданным.

Теорема 2 ([61])**.** *Вычислимая периодическая абелева группа вычислимо категорична тогда и только тогда, когда Тьюрингова машина ее представляющая удовлетворяет* Π^0_4 *предикату, который описывает неудачную попытку локальной диагонализации.*

Первый параграф главы (§2.1) имеет вводный характер и содержит некоторые специфические понятия и соглашения, необходимые в доказательстве. Второй параграф (§2.2) содержит доказательство основного результата главы. Наконец, в третьем параграфе (§2.3) будет доказано, что описание *оптимально* в том смысле, что имеется полнота: *индексное множество вычислимо категоричных периодических абелевых групп* Π^0_4*-полно.*

Доказательство теоремы использует сведение задачи к теоретико-рекурсивной проблеме *для структур эквивалентности.* В рассуждениях также используется техника динамического полного расщепления группы на прямые слагаемые.

Третья глава посвящена изучению сложности инвариантов вполне разложимых групп. Группа называется вполне разложимой, если она расщепляется в прямую сумму подгрупп рациональных чисел по сложению [12]. Впервые систематическое изучение таких групп было предпринято Бэром [3]. Отметим, что изучение конструктивных вполне разложимых групп было впервые предпринято Хисамиевым и его учениками [21, 22].

Множественные применения теоремы Бэра указывают на ее крайнюю полезность [12, 13]. Риггс [32] доказал, что индексное множество прямо разложимых абелевых групп Π^1_1 -полно. Совершенно неочевидно, почему существование прямого разложения – аналитически полная проблема, а нахождение полного разложения – проблема более простая. Формально объяснить этот феномен удалось при помощи теоремы:

Теорема 3 ([44])**.** *Индексное множество вполне разложимых групп имеет сложность* Σ^0_7. *Результат полностью релятивизуем.*

В первом параграфе §3.1 главы 3 изложены некоторые элементарные основы теории абелевых групп без кручения, которые пригодятся также в следующей главе. Во втором параграфе §3.2 содержится ключевой шаг доказательства, который заключается в установлении *относительной* Δ^0_5*-категоричности* любой такой группы. Это значит, что любая изоморфная (не обязательно вычислимая) копия B вычислимой структуры A изоморфна A при помощи $\Delta^0_5(B)$ -вычислимого изоморфизма [2] (Δ^0_α-категоричность определяется аналогично). В третьем параграфе §3.3 будет показано, что Δ^0_5 для категоричности - оценка оптимальная.

Четвертая глава посвящена решению проблемы Гончарова. В 2007 году Гончаров ставил вопрос о построении бесконечной серии примеров (строго) относительно Δ^0_α-категоричных абелевых групп без кручения, для сколь угодно больших конструктивных α. Как будет объяснено во введении (и как уже было отмечено выше), вопрос имеет прямое отношение к иерархиям абелевых групп и проблеме классификации. Таких примеров среди вполне разложимых групп найти не получится уже для $\alpha > 5$ (см. выше). В отсутствие подходящих алгебраических техник, значительных усилий потребовало доказательство:

Теорема 4. *Для всякого конструктивного непредельного ординала α вида $\delta + 2k$ существует вычислимая абелева группа G без кручения такая, что она относительно Δ^0_α–категорична, но не Δ^0_β-категорична для любого $\beta < \alpha$.*

Доказательство разделено на несколько параграфов. Первый параграф §4.1 содержит описание древовидных и коренных групп. Второй параграф §4.2 содержит громоздкое определение группы, удовлетворяющей теореме. Третий параграф §4.3 посвящен подробному анализу определимости на древовидных группах. Четвертый параграф §4.4 содержит важную для доказательства теорему об обращении двух скачков для специальных древовидных групп, и также верхнюю оценку категоричности для основной теоремы. Пятый параграф §4.5 описывает пошаговое построение автоморфизма по данной формуле, а в параграфе §4.6 доказывается, что построение действительно имеет нужные свойства. Наконец, в последнем параграфе §4.7 главы приводится анализ синтаксической сложности используемых формул.

Разработанные автором методы нашли несколько дальнейших применений [40, 11, 59].

Пятая глава посвящена изучению проблемы классификации компактных сепарабельных топологических групп. В коммутативном случае нам поможет замечательная теорема двойственности, доказанная Понтрягиным [31]. Пусть G – (хаусдорфова) сепарабельная компактная или счетная дискретная абелева группа. Тогда двойственной группой для G назовем $\widehat{G} = \{\chi \mid \chi$ непрерывный гомоморфизм G в $\mathbb{T}\}$, где $\mathbb{T}$ группа комплексных чисел нормы 1. Теорема двойственности утверждает, что $\widehat{\widehat{G}} \cong G$, причем G счетная дискретная тогда и только тогда, когда $\widehat{G}$ сепарабельная компактная, и наоборот.

Первый параграф §5.1 главы содержит дальнейшие необходимые понятия.

Во втором параграфе §5.2 будет доказано, что: *(1) переход от дискретных счетных абелевых к двойственным польским группам вычислим, но вычислим неравномерно*; *(2) существует компактная вычислимая группа, чья двойственная группа не имеет конструктивизации* ([55]).

Таким образом, с точки зрения теории рекурсии, хорошего сведения теории компактных абелевых групп к дискретным группам нет, а (2) и неравномерность (1) объясняют, почему подсчет двойственной группы обычно требует усилий – нет чисто механической общей процедуры. Конструкция (2) дает первый известный пример вычислимой польской компактной группы, в которой мера Хаара невычислима, тем самым отвечая на вопрос Вильяма Фуше. Несмотря на то, что пункт (1) технического результата выше неравномерный, удается применить его для доказательства основного результата главы, которое содержится в третьем параграфе §5.3:

Теорема 5 ([55])**.**

1. *Индексные множества проконечных и связных компактных групп оба арифметические.*

2. *Проблема топологического изоморфизма для каждого из этих двух классов Σ_1^1-полна (уже в абелевом случае).*

В §5.3 будет также доказана оптимальность оценок из первого пункта.

Следующий параграф §5.4 посвящен проконечным группам. Напомним, что проконечные группы соответствуют периодическим группам относительно двойственности. Говорим, что проконечная группа *рекурсивна* [24, 34], если она является обратным пределом рекурсивной системы конечных групп, в которой все вложения сюръективны [24, 34]. Для проконечных абелевых групп доказательство двойственности весьма прозрачно и не требует глубоких топологических методов (см. [12]), а «посчитать» двойственную группу в этом специальном случае нетрудно. Этот феномен объясняется следующим результатом:

Предложение 1 ([55]). *Пусть P – проконечная абелева группа.*

1. *P рекурсивно представима, если и только если $\widehat{P}$ конструктивизируема.*
2. *P вычислима категорична, если и только если $\widehat{P}$ вычислимо категорична.*

В обоих случаях имеет место равномерность и полная релятивизуемость.

Напомним, что доказательство существования Фридберговой нумерации структур эквивалентности имеет технические связи с установлением Π^0_4-полноты индексного множества автоустойчивых периодических абелевых групп, что, в свою очередь, нашло свое применение в следствии ниже.

Следствие 1 ([55]). *Индексное множество вычислимо категоричных проконечных абелевых групп Π^0_4-полно.*

В конце параграфа §5.4 будут также доказаны некоторые следствия, сформулированные во введении.

Автор выражает глубокую благодарность С. С. Гончарову за всестороннюю поддержку и внимание к работе.

Литература

[1] B. Andersen, A. Kach, A. Melnikov, and R. Solomon. Jump degrees of torsion-free abelian groups. *J. Symbolic Logic*, 77(4):1067–1100, 2012.

[2] C. Ash and J. Knight. *Computable structures and the hyperarithmetical hierarchy*, volume 144 of *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 2000.

[3] R. Baer. Abelian groups without elements of finite order. *Duke Math. J.*, 3(1):68–122, 1937.

[4] R. Downey, A. Kach, and D. Turetsky. Limitwise monotonic functions and applications. In *Proceedings of STACS 2012*, pages 56–85, 2011.

[5] Rod Downey and J. B. Remmel. Questions in computable algebra and combinatorics. In *Computability theory and its applications (Boulder, CO, 1999)*, volume 257 of *Contemp. Math.*, pages 95–125. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.

[6] Rodney Downey and Alexander G. Melnikov. Computable completely decomposable groups. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 366(8):4243–4266, 2014.

[7] Rodney G. Downey, Alexander G. Melnikov, and Keng Meng Ng. Iterated effective embeddings of abelian p-groups. *IJAC*, 24(7):1055, 2014.

[8] Y. Ershov and S. Goncharov. *Constructive models*. Siberian School of Algebra and Logic. Consultants Bureau, New York, 2000.

[9] M. Faizrahmanov, I. Kalimullin, and D. Zainetdinov. Maximality and minimality under limitwise monotonic reducibility. *Lobachevskii J. Math.*, 35(4):333–338, 2014.

[10] Marat Faizrahmanov and Iskander Kalimullin. Limitwise monotonic sets of reals. *MLQ Math. Log. Q.*, 61(3):224–229, 2015.

[11] E. Fokina, J. Knight, A. Melnikov, S. Quinn, and C. Safranski. Classes of Ulm type and coding rank-homogeneous trees in other structures. *J. Symbolic Logic*, 76(3):846–869, 2011.

[12] L. Fuchs. *Infinite abelian groups. Vol. I.* Pure and Applied Mathematics, Vol. 36. Academic Press, New York, 1970.

[13] L. Fuchs. *Infinite abelian groups. Vol. II.* Academic Press, New York, 1973. Pure and Applied Mathematics. Vol. 36-II.

[14] Su Gao. *Invariant descriptive set theory*, volume 293 of *Pure and Applied Mathematics (Boca Raton).* CRC Press, Boca Raton, FL, 2009.

[15] S. Goncharov. Autostability of models and abelian groups. *Algebra i Logika*, 19(1):23–44, 132, 1980.

[16] S. Goncharov and J. Knight. Computable structure and antistructure theorems. *Algebra Logika*, 41(6):639–681, 757, 2002.

[17] K. Harris. η-representation of sets and degrees. *J. Symbolic Logic*, 73(4):1097–1121, 2008.

[18] A. Kach. Computable shuffle sums of ordinals. *Arch. Math. Logic*, 47(3):211–219, 2008.

[19] I. Kalimullin, B. Khoussainov, and A. Melnikov. Limitwise monotonic sequences and degree spectra of structures. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 141(9):3275–3289, 2013.

[20] N. Khisamiev. Constructive abelian groups. In *Handbook of recursive mathematics, Vol. 2*, volume 139 of *Stud. Logic Found. Math.*, pages 1177–1231. North-Holland, Amsterdam, 1998.

[21] N. Khisamiev. On a class of strongly decomposable abelian groups. *Algebra Logika*, 41(4):493–509, 511–512, 2002.

[22] N. Khisamiev and A. Krykpaeva. Effectively completely decomposable abelian groups. *Sibirsk. Mat. Zh.*, 38(6):1410–1412, iv, 1997.

[23] A. Kurosh. *The theory of groups.* Chelsea Publishing Co., New York, 1960. Translated from the Russian and edited by K. A. Hirsch. 2nd English ed. 2 volumes.

[24] Peter La Roche. Effective Galois theory. *J. Symbolic Logic*, 46(2):385–392, 1981.

[25] K. Lange, R. Steiner, and R. Miller. Effective classification of computable structures. *The Notre Dame Journal of Formal Logic.*

[26] A. Mal′cev. Constructive algebras. I. *Uspehi Mat. Nauk*, 16(3 (99)):3–60, 1961.

[27] A. Mal′cev. On recursive Abelian groups. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 146:1009–1012, 1962.

[28] Alexander G. Melnikov. New degree spectra of abelian groups. *To appear in Notre Dame Journal of Formal Logic.*

[29] Alexander G. Melnikov. Computable abelian groups. *Bull. Symb. Log.*, 20(3):315–356, 2014.

[30] A. Nurtazin. *Computable classes and algebraic criteria of autostability.* Summary of Scientific Schools, Math. Inst. SB USSRAS, Novosibirsk, 1974.

[31] L. S. Pontryagin. *Topological groups.* Translated from the second Russian edition by Arlen Brown. Gordon and Breach Science Publishers, Inc., New York-London-Paris, 1966.

[32] K. Riggs. The decomposability problem for torsion-free abelian groups is analytic complete. Proceedings of the American Mathematical Society (to appear).

[33] R. Smith. Two theorems on autostability in p-groups. In *Logic Year 1979–80 (Proc. Seminars and Conf. Math. Logic, Univ. Connecticut, Storrs, Conn., 1979/80)*, volume 859 of *Lecture Notes in Math.*, pages 302–311. Springer, Berlin, 1981.

[34] Rick L. Smith. Effective aspects of profinite groups. *J. Symbolic Logic*, 46(4):851–863, 1981.

[35] R. Soare. *Recursively enumerable sets and degrees.* Perspectives in Mathematical Logic. Springer-Verlag, Berlin, 1987. A study of computable functions and computably generated sets.

[36] Alan M. Turing. On computable numbers, with an application to the entscheidungsproblem. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 42:230–265, 1936.

[37] Alan M. Turing. On computable numbers, with an application to the entscheidungsproblem. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 43:544–546, 1937.

[38] Klaus Weihrauch. On computable metric spaces Tietze-Urysohn extension is computable. In *Computability and complexity in analysis (Swansea, 2000)*, volume 2064 of *Lecture Notes in Comput. Sci.*, pages 357–368. Springer, Berlin, 2001.

[39] D. Kh. Zaĭ netdinov and I. Sh. Kalimullin. On the limitwise monotonic reducibility of Σ^0_2-sets. *Uch. Zap. Kazan. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 156(1):22–30, 2014.

Работы автора по теме диссертации[1]

[40] Andersen, A., Kach, A., Melnikov, A., and Solomon, R. Jump Degrees of Torsion-Free Abelian Groups, *The Journal of Symbolic Logic*, Volume 77, Issue 4 (2012), 1067-1100.

[41] Andrews, U., Dushenin, D., Hill, C., Knight., J., and Melnikov, A. Comparing classes of finite sums, *Algebra Logic*, January 2016, Volume 54, Issue 6, pp 489-501.

[42] Bazhenov K., Frolov A., Kalimullin, and Melnikov, A. Computable distributive lattices, *Sibirsk. Mat. Zh.* 58 (2017), no. 6, 1236–1251; translation in Sib. Math. J. 58 (2017), no. 6, 959–970.

[43] Downey, R., Igusa, G, and Melnikov, A. On a question of Kalimullin, *Proc. Amer. Math. Soc.* 146 (2018), no. 8, 3553–3563.

[44] Downey, R. and Melnikov, A. Computable Completely Decomposable Groups, *Transactions of the American Mathematical Society*, Volume 366, Number 8, August 2014, Pages 4243 –4266.

[45] Downey, R., Melnikov, A., Ng, K.M. On Δ^0_2-categoricity of equivalence relations, *Annals of Pure and Applied Logic* 2015, 166(9), pp. 851-880, with Rod Downey and Keng Meng Ng.

[46] Downey, R., Melnikov, A., and Ng, K.M. Abelian groups and the halting problem, *Annals of Pure and Applied Logic*, Volume 167, Issue 11, November 2016, Pages 1123-1138.

[1] Все указанные журналы входят в список ВАК. Авторы каждой отдельно взятой публикации указаны в алфавитном порядке.

[47] Downey, R., Melnikov, A., Ng, K.M. Iterated Effective Embeddings of Abelian p-Groups, *International Journal of Algebra and Computation* 24, 1055 (2014).

[48] Downey, R., Melnikov, A. and Ng, K.M. A Friedberg enumeration of equivalence structures, *Journal of Mathematical Logic*, 17 (2017), no. 2, 1750008, 28 pp.

[49] Fokina, E., Knight, J., Maher, C., Melnikov, A., and Quinn, S. Classes of Ulm Type, and Relations Between the Class of Rank-Homogeneous Trees and Other Classes, *The Journal of Symbolic Logic*, Volume 76, Number 3, September 2011, 846-849.

[50] Greenberg N., Knight J., Melnikov, A., and Turetsky D.. Uniformity in uncountable structures, *J. Symb. Log.* 83 (2018), no. 2, 529–550..

[51] Greenberg, N. and Melnikov, A. Proper divisibility in computable rings, *Journal of Algebra*, 474 (2017), 180-212.

[52] Harrison-Trainor, M., Melnikov, A., and Miller, R. On computable field embeddings and difference closed fields, *Canadian Journal of Mathematics*, *Canad. J. Math.* 69 (2017), no. 6, 1338–1363.

[53] Harrison-Trainor, M., Melnikov, A., and Montalban A. Independence in effective algebra, *Journal of Algebra*, 443 (2015), 441-468.

[54] Kalimullin, I. and Khoussainov, B., and Melnikov, A. Limitwise Monotonic Sequences and Degree Spectra of Structures, *Proc. Amer. Math. Soc.* 141 (2013), 3275-3289.

[55] Melnikov, A. Computable topological groups and Pontryagin duality, *Trans. Amer. Math. Soc.* 370 (2018), no. 12, 8709–8737.

[56] Melnikov, A. Torsion-free abelian groups with optimal Scott families, *J. Math. Log.* 18 (2018), no. 1, 1850002, 47 pp.

[57] Melnikov, A. Computable abelian groups, *The Bulletin of Symbolic Logic,* Vol. 20, No. 3 (2014), pp. 315-356.

[58] Melnikov, A. Computably Isometric Spaces, *The Journal of Symbolic Logic,* Volume 78, Issue 4 (2013), 1025-1346.

[59] Melnikov, A. New Degree Spectra of Abelian Groups, *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 58 (2017), no. 4, 507–525.

[60] Melnikov, A., Montalban A. Computable Polish group actions, *J. Symb. Log.* 83 (2018), no. 2, 443–460.

[61] Melnikov, A. and Nies, A. The classification problem for compact computable metric spaces. In Paola Bonizzoni, Vasco Brattka, and Benedikt Löwe, editors, *CiE*, volume 7921 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 320–328. Springer, 2013.

[62] Melnikov, A. and Nies A. Randomness and K-triviality in Computable Metric Spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.* 141 (2013), 2885-2899.

[63] Melnikov, A. and Ng, K.M. Computable torsion abelian groups, *Adv. Math.* 325 (2018), 864–907.

[64] Melnikov, A. and Ng K.M. Computable Structures and Operations on the Space of Continuous Functions, *Fundamenta Mathematica,* 233(2):1-41 (2015).