**Казинец, Виктор Алексеевич.**

## q-аналоги специальных функций и представления конечных групп : диссертация ... кандидата физико-математических наук : 01.01.01. - Хабаровск, 2000. - 85 с.

## Введение диссертации (часть автореферата)на тему «q-аналоги специальных функций и представления конечных групп»

Связь теории специальных функций и теории представлений групп была отмечена еще в работах С. Ли. В последствии в работах Гельфан-да И.М., Граева М.И., Виленкина Н.Я. и других наряду с описанием неприводимых представлений существенное внимание уделялось матричным элементам этих представлений, их характеров, сферических функций которые являлись специальными функциями. Групповые методы позволяли получить ряд новых свойств этих функций. В настоящей работе рассматриваются q-аналоги специальных функций, связанные с комплекснознач-ными представлениями классических групп над конечным полем. Основное внимание уделяется полной линейной группы GL(n, Fq). Полученные результаты переносятся на другие классические группы над конечным полем и на группы Вейля этих классических групп. Для того, чтобы получить q-аналоги специальных функций, требуется описать и построить неприводимые представления конечных групп.

Проблеме описания и классификации комплексных представлений классических групп над конечным полем посвящено много работ. Основополагающей работой в этом направлении является работа Грина [40]. Исследование как в самой работе [40], так и в последующих посвящено в основном вычислению характеров неприводимых представлений. На основе операции «умножение кружочком» введенной в [29], Д.К. Фадеев описал структурные свойства представлений группы GL(n, q) на языке модулей и матриц с минимальным использованием теории характеров. Аналогичные результаты были в дальнейшем получены C.B. Нагорным в [21], [22] для других классических групп. Для этого были введены понятия простого и примарного представления. Простое представление - это то же самое, что и представление дискретной серии, аналитическое представление. Если 6 -простое, то ôk =ôoôo.og будет всегда приводимо при к>1. Не приводимые компоненты этого представления названы примарными. Оказывается, что число различных примарных представлений, соответствующих простому 5 и содержащихся в 5к, равно числу разбиений числа к на натуральные слагаемые. При этом любое неприводимое представление однозначно определяется произведением некоторых примарных соответствующих некоторым различным простым. В терминах статьи Спрингера [46] речь идет о структуре представлений, индуцированных представлениями дискретной серии группы М, продолженными естественным образом на Р=М-и, где Р -параболическая подгруппа, и - ее унипотентный радикал. Ряд работ посвящен изучению коммутаторных алгебр представлений такого типа. Так в работах [27], [37], [38] получили, что для минимальной параболической подгруппы РсО и ее единичного представления е коммутаторная алгебра представления тёр е изоморфна групповой алгебре С[\У] группы Вейля группы С. В этой же ситуации, при одномерном представлении группы Р, Стейнберг в [27] и Ивахори в [27] доказали, что коммутаторная алгебра представлений тёр© изоморфна С[\¥(со)], где - нормализатор представления со. Во всех вышеперечисленных работах не рассматривалась конкретная реализация представлений (здесь следует в первую очередь отметить работу Танаки [49], где было проведено непосредственное построение и классификация всех неприводимых представлений группы БЦ2, д)). Очевидно, что вначале необходимо было рассмотреть реализацию примарных представлений (представлений дискретной серии).

Первые результаты в этом направлении появились в 70-х годах в работах Зелевинского [10], Данкла [36], [37], Стентона. В этих работах рассматривалась реализация представления тёр^п'ч)(е) в пространстве функций на Грассмановом многообразии, здесь А- - разбиение числа п на два слагаемых. Так как алгебра сплетающих операторов в этом случае коммутативна, то данное представление раскладывается в прямую сумму неприводимых представлений с однократным спектром. Полученное разложение позволило вычислить сферические функции этих представлений. Эти сферические функции выражались через полиномы Кравчука и в конечном счете приводили к некоторым д-аналогам гипергеометрических функций. Методы теории представлений групп позволили найти ряд свойств полиномов Кравчука (см. [37], [39]). В своей диссертации Стентон перенес результаты и на другие классические группы. Естественно ставится вопрос о вычислении всех сферических функций классических групп, о построении теории q-aнaлoгoв гипергеометрических функций и о конкретной реализации комплексных неприводимых представлений классических групп над конечным полем.

В настоящей работе рассматриваются представления Т-, = тс1^(]), где О - полная линейная группа либо симплектическая. Данное представление реализуется в пространстве функций на флаговом многообразии. Строится алгебра сплетающих операторов Нот(Т/, Тц), и с помощью сплетающих операторов описываются все неприводимые компоненты представления Т\. Затем вычисляются сферические функции групп вЦп, д) и 8р(2п, д). Проведенное исследование позволяет ввести новый класс q-аналогов гипергеометрических функций, зависящих от целочисленных матриц, и изучить некоторые их свойства. Знание размерности неприводимых представлений и размерности представления Т\ позволяет написать уравнения, связывающие кратности неприводимых представлений представления Т\ (этот вопрос был давно поставлен и до сих пор не имеет удовлетворительного решения).

В процессе работы над вопросами теории представлений классических групп над конечным полем стала очевидным связь теории представлений и комбинаторики. С помощью теории представлений возможно находить различные комбинаторные тождества (равенство двух q-пoлинoмов). Равенство коэффициентов при соответствующих степенях q позволяет получить новые сведения о комбинаторных числах. А рассмотрение этого равенства при позволяет получить обычные комбинаторные тождества. Так как основной задачей ставилось вычисление сферических функций групп ОЦп, q) и 8р(2п, q), то основное внимание уделялось представлению Т\, индуцированному единичным представлением параболической подгруппы Р^.

Работа состоит из трех глав. В первой главе выясняются некоторые комбинаторные вопросы полной линейной группы, связанные с ее представлениями. Вводятся функции на флаговых многообразиях и изучаются их свойства. Наибольший интерес представляют функции определенные на целочисленных матрицах, определяющих Р^-орбиты на флаговых многообразиях: функция м((а;/))=((а;/)), равная числу флагов, имеющих с заданным флагом матрицу пересечения а = (а;/) (она является некоторым аналогом мультипликативного характера) и функция (а1а2а3), через которую выражаются структурные константы алгебры Ли сплетающих операторов. Затем, в размере, необходимом для данной работы, исследуются структурные свойства представлений полной линейной группы. Основным результатом является предложение о связи представлений индуцированных ат и ст и теорема 2.13. Далее рассматривается алгебра сплетающих операторов представления Т\, и алгебра Ли данной алгебры. Выделяются операторы ац, являющиеся мультипликативными образующими данной алгебры. Доказывается необходимое и достаточное условие принадлежности оператора центру алгебры Ли. На этой основе доказывается основная теорема данной главы.